УДК 533.72

В. Д. Гордевский, А. А. Гукалов (Харьков. нац. ун-т им. В. Н. Каразина)

МАКСВЕЛЛОВСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В МОДЕЛИ ШЕРОХОВАТЫХ СФЕР

The Boltzmann equation is considered for the model of rough spherical molecules which possess both translational and rotational energies. The general form of local Maxwell distributions for this model is obtained. The main possible types of corresponding flows of a gas are selected and analysed.

Розглянуто рівняння Больцмана для моделі шорсткуватих сферичних молекул, які мають як поступальну, так і обертальну енергію. Отримано загальний вигляд локальних максвеллівських розподілів для цієї моделі. Виділено і проаналізовано основні можливі типи відповідних потоків газу.

1. Введение. В данной статье рассматривается модель шероховатых сфер [1], которая впервые была введена в 1894 г. Брианом [2]. Методы, развитые Чепменом и Энскогом для общих невращающихся сферических молекул, в 1922 г. были распространены на модель Бриана Пиддаком [3]. Преимущество этой модели перед всеми другими моделями, допускающими изменение состояния вращения молекул, состоит в том, что здесь не требуется никаких переменных, определяющих ориентацию молекулы в пространстве.

Указанные молекулы являются абсолютно упругими и абсолютно шероховатыми, что означает следующее. При столкновении двух молекул приходящие в соприкосновение точки не имеют в общем случае одинаковой скорости. Предполагается, что две сферы зацепляют одна другую без скольжения. В начальный момент сферы деформируют одна другую, а затем энергия деформации возвращается обратно в кинетическую энергию поступательного и вращательного движения без каких-либо потерь. В результате относительная скорость сфер в точке их соприкосновения изменяется при ударе на обратную.

Уравнение Больцмана для модели шероховатых сфер имеет вид [1 – 6]

$$D(f) = Q(f,f), \tag{1}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial f}{\partial x}\right), \tag{2}$$

$$Q(f,f) = \frac{d^2}{2}\int\limits_{R^3} dV_1 \int\limits_{R^3} d\omega_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha B(V - V_1, \alpha)\times$$

$$\times\Big[f(t,V_1^*,x,\omega_1^*)f(t,V^*,x,\omega^*) - f(t,V,x,\omega)f(t,V_1,x,\omega_1)\Big]. \tag{3}$$

Здесь d — диаметр молекулы, который связан с моментом инерции I соотношением

$$I = \frac{bd^2}{4}, \tag{4}$$

где b — параметр, $b \in \left(0, \frac{2}{3}\right]$, характеризующий изотропное распределение вещества внутри молекулы; t — время; $x = (x^1, x^2, x^3) \in R^3$ — пространственная координата; $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $w = (w^1, w^2, w^3) \in R^3$ — линейная и угловая скорости молекулы соответственно; $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ — градиент функции f по переменной x; Σ —

единичная сфера в пространстве R^3; α — единичный вектор из R^3, соединяющий центры сталкивающихся молекул;

$$B\left(V-V_1,\alpha\right)=\left|\left(V-V_1,\alpha\right)\right|-\left(V-V_1,\alpha\right) \tag{5}$$

— ядро интеграла столкновений.

Линейные (V^*, V_1^*) и угловые (w^*, w_1^*) скорости молекул после столкновения выражаются через соответствующие скорости до столкновения следующим образом:

$$\begin{aligned}
V^* &= V-\frac{1}{b+1}\left(b(V_1-V)-\frac{bd}{2}\alpha\times(\omega+\omega_1)+\alpha(\alpha,V_1-V)\right),\\
V_1^* &= V_1+\frac{1}{b+1}\left(b(V_1-V)-\frac{bd}{2}\alpha\times(\omega+\omega_1)+\alpha(\alpha,V_1-V)\right),\\
\omega^* &= \omega+\frac{2}{d(b+1)}\left\{\alpha\times(V-V_1)+\frac{d}{2}\left[\alpha(\omega+\omega_1,\alpha)-\omega-\omega_1\right]\right\},\\
\omega_1^* &= \omega_1+\frac{2}{d(b+1)}\left\{\alpha\times(V-V_1)+\frac{d}{2}\left[\alpha(\omega+\omega_1,\alpha)-\omega-\omega_1\right]\right\},
\end{aligned} \tag{6}$$

знаком $\times$ обозначено векторное произведение.

2. Постановка задачи и основные результаты. Единственным точным решением уравнения Больцмана (1), которое известно в явном виде до настоящего времени, является выражение, аналогичное полученному Максвеллом в 1899 г. для случая модели твердых сфер, т. е. удовлетворяющее системе

$$\begin{aligned}
D(f)&=0,\\
Q(f,f)&=0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Для рассматриваемой нами модели такое выражение тоже использовалось в монографии [1], где утверждалось, что логарифм этого выражения имеет вид

$$\ln f=\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}V-\alpha^{(3)}\left(\frac{1}{2}V^2+\frac{1}{2}I\omega^2\right)+\alpha^{(4)}(I\omega+[x\times V]). \tag{8}$$

В общем случае коэффициенты $\alpha^{(i)}$, $i=1,\ldots,4$, зависят и от времени, и от пространственной координаты. В монографии [1] исследованы только два частных случая: так называемый глобальный максвеллиан (когда рассматриваемое выражение зависит только от линейной и угловой скоростей молекулы) и один из локальных (так называемый винт или спираль, у которого в отличие от глобального есть еще зависимость и от пространственной координаты).

Однако при непосредственной подстановке выражения (8) в выражения (2) и (3) оказывается, что в общем случае оно не удовлетворяет системе (7), что показано в приложении. Именно, нетрудно убедиться в том, что выражение (8) не должно содержать слагаемое $\alpha^{(4)}I\omega$. Это объясняется тем, что авторы посчитали равными среднюю угловую скорость по всем молекулам и угловую скорость газа в целом (как твердого тела), что в действительности не всегда верно. Однако, даже исправляя эту неточность, мы не получим наиболее общего выражения, описывающего максвеллиан в газе из шероховатых молекул, так как возможный вид коэффициентов $\alpha^{(i)}$, $i = 1, \ldots, 4$, нигде не исследовался.

Поэтому целью данной работы является поиск такого выражения, а также исследование его физического смысла и выделение особо интересных частных случаев подобно тому, как это было сделано для модели твердых сфер в [7 – 10] (некоторые результаты в этом направлении можно найти также в [11, 12]).

Итак, исправляя обнаруженную неточность, имеем

$$\ln f = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} V - \alpha^{(3)} \left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right) + \alpha^{(4)} [x \times V]. \tag{9}$$

Предполагая теперь, что коэффициенты $\alpha^{(i)}$ зависят от t и x, преобразуем выражение (9):

$$\ln f = \alpha^{(1)} - \alpha^{(3)} \left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right) + \alpha^{(2)} \cdot V - (V, [x \times \alpha^{(4)}]) =$$

$$= \alpha^{(1)} - \alpha^{(3)} \left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right) + (V, \alpha^{(2)} - [x \times \alpha^{(4)}]). \tag{10}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &\alpha^{(1)} = a(t,x), && a(t,x) \colon R^4 \to R^1, \\ &\alpha^{(3)} = -2b(t,x), && b(t,x) \colon R^4 \to R^1, \\ &\alpha^{(2)} + [\alpha^{(4)} \times x] = c(t,x), && c(t,x) \colon R^4 \to R^3. \end{aligned}$$

Перепишем равенство (10) в новых обозначениях:

$$\ln f = a(t,x) + b(t,x)(V^2 + I\omega^2) + c(t,x) \cdot V =$$

$$= a(t,x) + b(t,x)(V^1)^2 + b(t,x)(V^2)^2 +$$

$$+ b(t,x)(V^3)^2 + Ib(t,x)(\omega^1)^2 + Ib(t,x)(\omega^2)^2 + Ib(t,x)(\omega^3)^2 +$$

$$+ c_1(t,x) V^1 + c_2(t,x) \cdot V^2 + c_3(t,x) \cdot V^3.$$

Потребуем, чтобы выражение (2) тождественно было равно нулю в соответствии с (7) $\Big($вместо функции f будем подставлять выражение $\ln f$, ибо $(\ln f)' = \dfrac{1}{f} f'$ и $\dfrac{1}{f} \neq 0\Big)$:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + (V^1)^2 \frac{\partial b}{\partial t} + (V^2)^2 \frac{\partial b}{\partial t} +$$

$$+ (V^3)^2 \frac{\partial b}{\partial t} + I(\omega^1)^2 \frac{\partial b}{\partial t} + I(\omega^2)^2 \frac{\partial b}{\partial t} + I(\omega^3)^2 \frac{\partial b}{\partial t} + V^1 \frac{\partial c_1}{\partial t} +$$

$$+ V^2 \frac{\partial c_2}{\partial t} + V^3 \frac{\partial c_3}{\partial t} + V^1 \frac{\partial a}{\partial x^1} + (V^1)^3 \frac{\partial b}{\partial x^1} + V^1 (V^2)^2 \frac{\partial b}{\partial x^1} + V^1 (V^3)^2 \frac{\partial b}{\partial x^1} +$$

$$+ IV^1 (\omega^1)^2 \frac{\partial b}{\partial x^1} + IV^1 (\omega^2)^2 \frac{\partial b}{\partial x^1} + IV^1 (\omega^3)^2 \frac{\partial b}{\partial x^1} + (V^1)^2 \frac{\partial c_1}{\partial x^1} + V^1 V^2 \frac{\partial c_2}{\partial x^1} +$$

$$+V^1V^3\frac{\partial c_3}{\partial x^1}+V^2\frac{\partial a}{\partial x^2}+(V^1)^2V^2\frac{\partial b}{\partial x^2}+(V^2)^3\frac{\partial b}{\partial x^2}+IV^2(\omega^1)^2\frac{\partial b}{\partial x^2}+$$

$$+V^2(V^3)^2\frac{\partial b}{\partial x^2}+IV^2(\omega^2)^2\frac{\partial b}{\partial x^2}+IV^2(\omega^3)^2\frac{\partial b}{\partial x^2}+V^1V^2\frac{\partial c_1}{\partial x^2}+(V^2)^2\frac{\partial c_2}{\partial x^2}+$$

$$+V^2V^3\frac{\partial c_3}{\partial x^2}+V^3\frac{\partial a}{\partial x^3}+(V^1)^2V^3\frac{\partial b}{\partial x^3}+(V^2)^2V^3\frac{\partial b}{\partial x^3}+$$

$$+(V^3)^3\frac{\partial b}{\partial x^3}+IV^3(\omega^1)^2\frac{\partial b}{\partial x^3}+IV^3(\omega^2)^2\frac{\partial b}{\partial x^3}+IV^3(\omega^3)^2\frac{\partial b}{\partial x^3}+$$

$$+V^1V^3\frac{\partial c_1}{\partial x^3}+V^2V^3\frac{\partial c_2}{\partial x^3}+(V^3)^2\frac{\partial c_3}{\partial x^3}\equiv 0.$$

Приравнивая коэффициенты при компонентах векторов V и ω и их различных степенях, а также произведениях, имеем:

1) $\dfrac{\partial a}{\partial t}=0$, а значит, $a=a(x)$;

2) для любого $i=1,2,3$ при $(\omega^i)^2$ $\dfrac{\partial b}{\partial t}=0$, тогда $b=b(x)$; при $(V^i)^3$ $\dfrac{\partial b}{\partial x^i}=$ $=0$, т. е. $b=b(t)$.

Итак, $b=\mathrm{const}\in R^1$.

Учитывая найденный вид функций a и b, из остальных соотношений получаем следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial c_1}{\partial x^1}=0, \tag{11.1}$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial x^2}=0, \tag{11.2}$$

$$\frac{\partial c_3}{\partial x^3}=0, \tag{11.3}$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial t}+\frac{\partial a}{\partial x^1}=0, \tag{11.4}$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t}+\frac{\partial a}{\partial x^2}=0, \tag{11.5}$$

$$\frac{\partial c_3}{\partial t}+\frac{\partial a}{\partial x^3}=0, \tag{11.6}$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial x^1}+\frac{\partial c_1}{\partial x^2}=0, \tag{11.7}$$

$$\frac{\partial c_3}{\partial x^1}+\frac{\partial c_1}{\partial x^3}=0, \tag{11.8}$$

$$\frac{\partial c_3}{\partial x^2}+\frac{\partial c_2}{\partial x^3}=0. \tag{11.9}$$

Из уравнений (11.1) – (11.3) имеем

$$c_1=c_1(t,x^2,x^3),$$

$$c_2=c_2(t,x^1,x^3),$$

$$c_3=c_3(t,x^1,x^2).$$

Определим вид функции c_1.

Из уравнения (11.1) следует, что $\dfrac{\partial^2 c_1}{\partial x^2 \partial x^1} = 0$ и $\dfrac{\partial^2 c_1}{\partial x^3 \partial x^1} = 0$.

Продифференцируем уравнение (11.7) по x^3, а уравнение (11.8) по x^2:

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^3 \partial x^1} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^3 \partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 c_3}{\partial x^2 \partial x^1} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2 \partial x^3} = 0.$$

Складывая почленно полученные равенства, получаем

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^3 \partial x^1} + \frac{\partial^2 c_3}{\partial x^2 \partial x^1} + 2\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^3 \partial x^2} = 0.$$

Поскольку производная по x^1 уравнения (11.9) такова:

$$\frac{\partial^2 c_3}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^1 \partial x^3} = 0,$$

получаем $\dfrac{\partial^2 c_1}{\partial x^3 \partial x^2} = 0$.

Очевидно, что $\dfrac{\partial^2 c_1}{\partial (x^1)^2} = 0$, а с учетом полученных выше выражений для c_1, c_2, c_3 из уравнения (11.7) следует $\dfrac{\partial^2 c_1}{\partial (x^2)^2} = 0$, а из (11.8) вытекает $\dfrac{\partial^2 c_1}{\partial (x^3)^2} = 0$.

Значит, c_1 — линейная функция от x^2 и x^3, но коэффициенты при данных компонентах пространственной координаты могут зависеть и от t.

Аналогично, можно показать, что c_2 — линейная функция от x^1 и x^3, но коэффициенты могут зависеть от t, а c_3 — линейная функция от x^1 и x^2 и коэффициенты тоже могут зависеть от t.

Таким образом, функции c_1, c_2 и c_3 имеют вид

$$c_1(t, x^2, x^3) = c_{11}(t) + c_{12}(t) \cdot x^2 + c_{13}(t) \cdot x^3,$$
$$c_2(t, x^1, x^3) = c_{21}(t) + c_{22}(t) \cdot x^1 + c_{23}(t) \cdot x^3,$$
$$c_3(t, x^1, x^2) = c_{31}(t) + c_{32}(t) \cdot x^1 + c_{33}(t) \cdot x^2.$$

Теперь, использовав уравнения (11.7) – (11.9), определим зависимость между некоторыми c_{ij}.

Из (11.7) следует, что $c_{22}(t) + c_{12}(t) = 0$, т. е. $c_{22}(t) = -c_{12}(t)$. Аналогично $c_{32}(t) + c_{13}(t) = 0$, т. е. $c_{32}(t) = -c_{13}(t)$, и $c_{33}(t) + c_{23}(t) = 0$, т. е. $c_{33}(t) = -c_{23}(t)$. Далее, из (11.4) получаем

$$c'_{11}(t) + c'_{12}(t)x^2 + c'_{13}(t)x^3 = -\frac{\partial a}{\partial x^1}.$$

Нам известно, что $a = a(x)$, значит, $c'_{11}(t) = C$, $c'_{12}(t) = C_1$, $c'_{13}(t) = C_2$, $C, C_1, C_2 \in R^1$. Отсюда

$$c_{11}(t) = C \cdot t + C_3,$$
$$c_{12}(t) = C_1 \cdot t + C_4,$$
$$c_{13}(t) = C_2 \cdot t + C_5,$$

$$c_{22}(t) = -C_1 \cdot t - C_4,$$

$$c_{32}(t) = -C_2 \cdot t - C_5, \quad C_3,\, C_4,\, C_5 \in R^1.$$

Итак, $\dfrac{\partial a}{\partial x^1} = -C - C_1 \cdot x^2 - C_2 \cdot x^3$, т. е.

$$a = -Cx^1 - C_1x^1x^2 - C_2x^1x^3 + \varphi(x^2, x^3). \tag{12}$$

Из (11.5) имеем $c'_{21}(t) - C_1x^1 + c'_{23}(t)x^3 = -\dfrac{\partial a}{\partial x^2}$. Но $a = a(x)$, значит, $c'_{21}(t) = C_6, c'_{23}(t) = C_7, C_6, C_7 \in R^1$, т. е.

$$c_{21}(t) = C_6 \cdot t + C_8,$$

$$c_{23}(t) = C_7 \cdot t + C_9,$$

$$c_{33}(t) = -C_7 \cdot t - C_9, \quad C_8, C_9 \in R^1.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial a}{\partial x^2} = -C_6 + C_1x^1 - C_7x^3,$$

или

$$a = -C_6x^2 + C_1x^1x^2 - C_7x^2x^3 + \varphi_1(x^1, x3). \tag{13}$$

Из (11.6) имеем $c'_{31}(t) - C_2 \cdot x^1 - C_7 \cdot x^2 = -\dfrac{\partial a}{\partial x^3}$.

Как было отмечено, $c'_{31}(t) = C_{10}$, откуда $c_{31}(t) = C_{10} \cdot t + C_{11}, C_{10}, C_{11} \in R^1$. Наконец,

$$\frac{\partial a}{\partial x^3} = -C_{10} + C_2 \cdot x^1 + C_7 \cdot x^2,$$

значит,

$$a = -C_{10}x^3 + C_2x^1x^3 + C_7x^2x^3 + \varphi_2(x^1, x^2). \tag{14}$$

Итак, получены выражения (12) – (14), которые описывают искомую функцию $a = a(x)$, но в них содержатся неизвестные функции $\varphi(x^2, x^3)$, $\varphi_1(x^1, x^3)$ и $\varphi_2(x^1, x^2)$. С целью уточнения вида функций φ, φ_1 и φ_2, а также окончательного представления функции $a(x)$ подставим выражения (12) – (14) в уравнения (11.4), (11.5) и (11.6).

При подстановке (12) в (11.4) получаем тождество, так как (12) получено из (11.4), а при подстановке в (11.5) $C_6 - C_1x^1 + C_7x^3 - C_1x^1 + \dfrac{\partial\varphi(x^2, x^3)}{\partial x^2} = 0$. Тогда $\varphi = -C_7x^2x^3 - C_6x^2 + \psi(x^3)$, а из (11.6) имеем $C_{10} - C_2x^1 - C_7x^2 - C_2x^1 + \dfrac{\partial\varphi(x^2, x^3)}{\partial x^3} = 0$, $C_{10} - 2C_2x^1 - 2C_7x^2 + \dfrac{\partial\psi}{\partial x^3} = 0$, т. е. $C_2 \equiv 0$ и $C_7 \equiv 0$, $\psi = -C_{10} \cdot x^3 + D$. Значит, (12) преобразуется следующим образом:

$$a(x) = -Cx^1 - C_1x^1x^2 - C_6x^2 - C_{10}x^3 + D, \quad D \in R^1.$$

Подставляя (13) в уравнения (11.4), (11.6), получаем $C + 2C_1x^2 + \dfrac{\partial\varphi_1(x^1, x^3)}{\partial x^1} = 0$. Поскольку здесь последнее слагаемое не зависит от x^2, то $C_1 \equiv 0$, и тогда $\varphi_1(x^1, x^3) = -C \cdot x^1 + \xi(x^3)$.

Далее, при подстановке (13) в (11.5) и (11.6) имеем

$$C_6 - C_6 + \frac{\partial \varphi_1(x^1, x^3)}{\partial x^2} = 0,$$
$$C_{10} + \frac{\partial \varphi_1(x^1, x^3)}{\partial x^3} = 0,$$

откуда $C_{10} + \dfrac{\partial \xi}{\partial x^3} = 0$, значит, $\xi(x^3) = -C_{10} \cdot x^3 + D_1$, $D_1 \in R^1$.

Итак, (13) преобразуется в

$$a(x) = -C_6 x^2 - C x^1 - C_{10} x^3 + D_1.$$

Аналогично, подставляя (14) в уравнения (11.4) – (11.6), получаем

$$a(x) = -C_{10} x^3 - C x^1 - C_6 x^2 + D_2,$$

где $D_2 \in R^1$.

Таким образом, мы показали, что

$$a(x) = -Cx^1 - C_6 x^2 - C_{10} x^3 + D = (-C, -C_6, -C_{10})x + D.$$

Так же преобразовались функции c_{ik}, $i = 1, \ldots, 3, k = 1, \ldots, 3:$

$$\begin{aligned}
&c_{11}(t) = C \cdot t + C_3, \quad && c_{12}(t) = C_4, \quad && c_{23}(t) = C_9,\\
&c_{21}(t) = C_6 \cdot t + C_8, && c_{13}(t) = C_5, && c_{32}(t) = -C_5,\\
&c_{31}(t) = C_{10} \cdot t + C_{11}, && c_{22}(t) = -C_4, && c_{33}(t) = -C_9,
\end{aligned}$$
$$C,\, C_3,\, C_4,\, C_5,\, C_6,\, C_8,\, C_9,\, C_{10},\, C_{11} \in R^1.$$

Окончательно имеем

$$a(x) = (-C, -C_6, -C_{10})(x^1, x^2, x^3) + D,$$
$$c(t,x) = \begin{pmatrix} C \\ C_6 \\ C_{10} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} C_4 x^2 + C_5 x^3 + C_3 \\ -C_4 x^1 + C_9 x^3 + C_8 \\ -C_5 x^1 - C_9 x^2 + C_{11} \end{pmatrix}.$$

Итак, получено следующее решение системы (11.1) – (11.9) (здесь за вновь введенными векторными и скалярными константами сохранены обозначения, использованные выше для иных величин):

$$\begin{aligned}
&a(x) = Cx + C_1, \quad C \in R^3, \quad C_1 \in R^1,\\
&b(x) = C_2, \quad C_2 \in R^1,\\
&c(t,x) = -Ct + C_3 + [C_4 \times x], \quad C_3, C_4 \in R^3.
\end{aligned}$$

Возвращаясь к начальным обозначениям, получаем

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)} &= Cx + C_1, \\ \alpha^{(2)} &= -Ct + C_3, \\ \alpha^{(3)} &= -2C_2, \\ \alpha^{(4)} &= C_4. \end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Общий вид максвеллианов для модели шероховатых молекул задается формулами* (9), (15), *где* C, C_1, C_2, C_3, C_4 *— произвольные числовые и векторные константы.*

3. Физический смысл найденного решения. Основные частные случаи. Подставим найденные коэффициенты (15) в выражение (10) и преобразуем:

$$\begin{gathered} \ln f = Cx + C_1 + C_2(V^2 + I\omega^2) + V(-Ct + C_3 + [C_4 \times x]) = \\ = Cx + C_1 + C_2 \left(V - \frac{Ct - C_3 + [x \times C_4]}{2C_2} \right)^2 - \\ - \frac{(Ct - C_3 + [x \times C_4])^2}{4C_2} + IC_2\omega^2 = \\ = Cx + C_1 - \frac{(Ct - C_3 + [x \times C_4])^2}{4C_2} + \\ + C_2 \left(\left(V - \frac{Ct - C_3 + [x \times C_4]}{2C_2} \right)^2 + I\omega^2 \right). \end{gathered}$$

Сначала рассмотрим случай, когда $C_4 \neq 0$.

Выразив отсюда функцию f и подобрав константы C, C_i следующим образом (подобно тому, как это было сделано в [10] в случае модели твердых сфер):

$$C = 2\beta[\overline{\omega} \times \overline{u_0}] - 2\beta\widetilde{V}, \qquad C_1 = \ln\left(\rho_0 I^{3/2} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3\right),$$

$$C_2 = -\beta, \qquad C_3 = -2\beta[\overline{\omega} \times x_0] + 2\beta\widetilde{V}, \qquad C_4 = 2\beta\overline{\omega},$$

получим

$$\begin{gathered} f(t, V, x, \omega) = \rho_0 I^{3/2} e^{\beta([\overline{\omega} \times (x - \overline{x}_0 - \overline{u}_0 t)]^2 - 2\widetilde{W}_{||} x)} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3 \times \\ \times e^{-\beta\left(\left(V - \widehat{V}_{||}(t) - [\overline{\omega} \times (x - x_0 - \overline{u}_0 t)]\right)^2 + I\omega^2\right)}, \end{gathered} \tag{16}$$

где $\overline{\omega}$ — угловая скорость потока газа в целом; $\overline{V}(t, x) = \widehat{V}_{||}(t) + [\overline{\omega} \times (x - x_0 - \overline{u}_0 t)]$ — массовая скорость; x_0, $\overline{x}_0$ — оси скоростей и плотностей соответственно:

$$x_0 = \frac{1}{\overline{\omega}^2}\big[\overline{\omega} \times \widetilde{V}\big], \qquad \overline{x}_0 = \frac{1}{\overline{\omega}^2}\big[\overline{\omega} \times (\widetilde{V} - \overline{u}_0)\big];$$

$\overline{u}_0$ — произвольный вектор, перпендикулярный к $\overline{\omega}$ (поступательная скорость этих осей); $\beta = \dfrac{1}{2T}$ — обратная температура газа; $\widehat{V}_{||}(t) = \widetilde{V}_{||} + \widetilde{W}_{||} t$ — составляющая вектора $\widehat{V}(t) = \widetilde{V} + \widetilde{W}t$, параллельная $\overline{\omega}$, где $\widetilde{V}, \widetilde{W} \in R^3$ — произвольные постоянные векторы.

Следует отметить, что, во-первых, температура газа из шероховатых сфер не зависит от времени, а в работе [10] показано, что для модели твердых сфер такая зависимость существует и имеет вполне конкретный вид.

Во-вторых, показатель экспоненты в выражении для плотности квадратично зависит от перпендикулярной по отношению к $\overline{\omega}$ составляющей вектора x и лишь линейно от параллельной его составляющей (в отличие от модели твердых сфер [10], где содержится еще слагаемое, пропорциональное x^2). Далее, массовая скорость не содержит члена, пропорционального tx, т. е. теперь невозможны движения типа разогрев – остывание и расширение – сжатие (подробнее такие движения в случае модели твердых сфер также описаны в [10]).

Отметим, что выражение (16) при $\widetilde{W} = 0$ является аналогом смерча (в справедливости этого утверждения можно убедиться и непосредственно, подставив его в систему (7)).

Теперь исследуем случай $C_4 \equiv 0$. Имеем

$$\ln f = Cx + C_1 - \frac{(Ct - C_3)^2}{4C_2} + C_2 \left(\left(V - \frac{Ct - C_3}{2C_2} \right)^2 + I\omega^2 \right).$$

Подберем коэффициенты C_i, $i = 1, \ldots, 4$, следующим образом:

$$C = 2\overline{u}\beta,$$

$$C_1 = \ln \left(\rho_0 I^{3/2} \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^3 \right),$$

$$C_2 = -\beta,$$

$$C_3 = 2\beta\widehat{V}.$$

Тогда получаем

$$f(t, V, x, \omega) = \rho_0 I^{3/2} e^{\beta\left((\widehat{V} - \overline{u}t)^2 + 2\overline{u}x]\right)} \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^3 e^{-\beta((V - \widehat{V} + \overline{u}t)^2 + I\omega^2)}. \qquad (17)$$

Выражение (17) описывает движение типа ускорение – уплотнение, т. е. $\overline{\omega} = 0$, а $\overline{u} \neq 0$ (подробнее о таком движении в случае модели твердых сфер см. в работе [13]).

Также следует отметить, что „винт” (т. е. „стационарный смерч” или “спираль” — терминология [14]) в газе из шероховатых сфер теперь имеет вид

$$f = \rho_0 I^{3/2} e^{\beta[\overline{\omega} \times (x - x_0)]^2} \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^3 e^{-\beta((V - \widetilde{V} - [\overline{\omega} \times (x - x_0)])^2 + I\omega^2)}.$$

4. Приложение. Выражение (8) можно преобразовать к виду

$$f = \rho_0 I^{3/2} \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^3 e^{\beta[\overline{\omega} \times (x - x_0)]^2} e^{-\beta((V - \widehat{V}_{||} - [\overline{\omega} \times (x - x_0)])^2 + I(\omega - \overline{\omega})^2)}. \qquad (18)$$

Поскольку $\widehat{V}_{||} || \overline{\omega}$, правую часть выражения (18) можно записать так:

$$\rho_0 I^{3/2}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3 e^{\beta[\overline{\omega}\times(x-x_0)]^2} e^{-\beta((V-\widehat{V}_{||}-[\overline{\omega}\times(x-x_0)])^2+I(\omega-\overline{\omega})^2)} =$$

$$= \rho_0 I^{3/2}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3 e^{\beta[\overline{\omega}\times(x-x_0)]^2} e^{-\beta(V-\widehat{V}_{||})^2}\times$$

$$\times e^{2\beta(V-\widehat{V}_{||},[\overline{\omega}\times(x-x_0)])-\beta[\overline{\omega}\times(x-x_0)]^2-\beta I(\omega-\overline{\omega})^2} =$$

$$= \rho_0 I^{3/2}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3 e^{-\beta\left(V-\widehat{V}_{||}\right)^2+2\beta(V-\widehat{V}_{||},[\overline{\omega}\times(x-x_0)])-\beta I(\omega-\overline{\omega})^2}. \qquad (19)$$

Подставим теперь представление (19) в уравнения (1)–(3). Производная по t равна 0, а градиент по x имеет вид

$$\rho_0 I^{3/2}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3 e^{-\beta\left(V-\widehat{V}_{||}\right)^2+2\beta\left(V-\widehat{V}_{||},[\overline{\omega}\times(x-x_0)]\right)-\beta I(\omega-\overline{\omega})^2}\cdot 2\beta[V\times\overline{\omega}],$$

т. е.

$$\rho_0\cdot 2\beta I^{3/2}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3 e^{-\beta\left(V-\widehat{V}_{||}\right)^2+2\beta(V-\widehat{V}_{||},[\overline{\omega}\times(x-x_0)])-\beta I(\omega-\overline{\omega})^2}\cdot(V,[V\times\overline{\omega}])=0,$$

значит, $D(f)=0$.

Для того чтобы $Q(f,f)$ также было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство [1] (см. также [11, 12])

$$f(V_1^*,x,\omega_1^*)f(V^*,x,\omega^*)-f(V,x,\omega)f(V_1,x,\omega_1)=0. \qquad (20)$$

Проверим выполнение равенства (20). Разделив его на $\left(\rho_0 I^{3/2}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3\right)^2\neq 0$ и приравняв соответствующие аргументы экспонент, получим соотношение

$$-\beta(V^*-\widehat{V}_{||})^2-I\beta(\omega^*-\overline{\omega})^2+2\beta(V^*,[\overline{\omega}\times(x-x_0)])-\beta(V_1^*-\widehat{V}_{||})^2-$$

$$-I\beta(\omega_1^*-\overline{\omega})^2+2\beta(V_1^*,[\overline{\omega}\times(x-x_0)])+\beta(V-\widehat{V}_{||})^2+I\beta(\omega-\overline{\omega})^2-$$

$$-2\beta(V,[\overline{\omega}\times(x-x_0)])+\beta(V_1-\widehat{V}_{||})^2+I\beta(\omega_1-\overline{\omega})^2-$$

$$-2\beta(V_1,[\overline{\omega}\times(x-x_0)])=0.$$

Сократим его на $(-\beta)\neq 0$ и далее упростим, использовав следующие законы:

закон сохранения импульса:

$$V+V_1=V^*+V_1^*,$$

закон сохранения суммарной энергии:

$$V^2+I\omega^2+V_1^2+I\omega_1^2=(V^*)^2+I(\omega^*)^2+(V_1^*)^2+I(\omega_1^*)^2$$

(их справедливость ясна как из физических соображений, так и соотношений (6), из которых они могут быть проверены формально).

Именно,

$$(V^*-\widehat{V}_{||})^2+I(\omega^*-\overline{\omega})^2-2(V^*,[\overline{\omega}\times(x-x_0)])+(V_1^*-\widehat{V}_{||})^2+I(\omega_1^*-\overline{\omega})^2-$$

$$-2(V_1^*, [\overline{\omega} \times (x - x_0)]) - (V - \widehat{V}_{||})^2 - I(\omega - \overline{\omega})^2 + 2(V, [\overline{\omega} \times (x - x_0)]) -$$

$$-(V_1 - \widehat{V}_{||})^2 - I(\omega_1 - \overline{\omega})^2 + 2(V_1, [\overline{\omega} \times (x - x_0)]) =$$

$$= (V^*)^2 - 2V^*\widehat{V}_{||} + \cancel{\widehat{V}_{||}^2} + I(\omega^*)^2 - 2I(\omega^*, \overline{\omega}) + \cancel{I}\overline{\omega}^2 +$$

$$+(V_1^*)^2 - 2V_1^*\widehat{V}_{||} + \cancel{\widehat{V}_{||}^2} + I(\omega_1^*)^2 - 2I(\omega_1^*, \overline{\omega}) + \cancel{I}\overline{\omega}^2 -$$

$$-V^2 + 2V\widehat{V}_{||} - \cancel{\widehat{V}_{||}^2} - I\omega^2 - \cancel{I}\overline{\omega}^2 + 2I(\omega, \overline{\omega}) - V_1^2 + 2V_1\widehat{V}_{||} - \cancel{\widehat{V}_{||}^2} - I\omega_1^2 +$$

$$+2I(\omega_1, \overline{\omega}) - \cancel{I}\overline{\omega}^2 + 2(V + V_1 - V^* - V_1^*, [\overline{\omega} \times (x - x_0)]) =$$

$$= (V^*)^2 + I(\omega^*)^2 + (V_1^*)^2 + I(\omega_1^*)^2 - (V^2 + I\omega^2 + V_1^2 + I\omega_1^2) +$$

$$+2(V + V_1 - V^* - V_1^*, [\overline{\omega} \times (x - x_0)]) + 2I(\omega + \omega_1 - \omega^* - \omega_1^*, \overline{\omega}) =$$

$$= 2I(\omega + \omega_1 - \omega^* - \omega_1^*, \overline{\omega}) = 0.$$

Из формул (6) видно, что $\omega - \omega^* = \omega_1 - \omega_1^*$, значит, последнее равенство еще упрощается: $4I(\omega - \omega^*, \overline{\omega}) = 0$.

Однако, принимая во внимание, что $\overline{\omega}$ — произвольный вектор из пространства R^3, убеждаемся, что в общем случае это неверно. Отсюда $Q(f, f) \neq 0$.

Следовательно, выражение (8) не является решением системы (7).

1. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
2. *Bryan G. H.* On the application of the determinantal relation to the kinetic theory of polyatomic gases // Rept Brit. Assoc. Adv. Sci. – 1894. – **64**. – P. 102 – 106.
3. *Pidduck F. B.* The kinetic theory of a special type of rigid molecule // Proc. Roy. Soc. – 1922. – **A101**. – P. 101 – 110.
4. *Cercignani C., Lampis M.* On the kinetic theory of a dense gas of rough spheres // J. Statist. Phys. – 1988. – **53**. – P. 655 – 672.
5. *Gordevsky V. D.* Explicit approximate solutions of the Boltzmann equation for the model of rough spheres // Dop. NAN Ukrainy. – 2000. – № 4. – P. 10 – 13 (in Ukrainian).
6. *Gordevskyy V. D.* Approximate billow solutions of the kinetic Bryan – Pidduck equation // Math. Meth. Appl. Sci. – 2000. – **23**. – P. 1121 – 1137.
7. *Карлеман Т.* Математические задачи кинетической теории газов. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 118 с.
8. *Grad H.* On the kinetic theory of racefied gases // Communs Pure and Appl. Math. – 1949. – **2**, № 4. – P. 331 – 407.
9. *Фридлендер О. Г.* Локально-максвелловские решения уравнения Больцмана // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, № 5. – С. 973 – 977.
10. *Gordevskyy V. D.* On the non-stationary Maxwellians // Math. Meth. Appl. Sci. – 2004. – **27**. – P. 231 – 247.
11. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. – М.: Мир, 1978. – 495 с.
12. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. – М.: Наука, 1967. – 440 с.
13. *Gordevskyy V. D., Andriyasheva N. V.* Interaction between "accebtaling-packing" flows in low-temperature gas // Math. Phys., Anal., Geom. – 2009. – **5**, № 1. – P. 38 – 53.
14. *Gordevskyy V. D., Sysoyeva Yu. A.* Interaction between non-uniform flows in a gas of rough spheres // Mat. Fiz., Anal., Gom. – 2002. – **9**, № 2. – P. 285 – 293.

Получено 28.12.09,
после доработки — 30.03.11