УДК 517.51

С. А. Стасюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НАИЛУЧШЕЕ m-ЧЛЕННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ $B^r_{\infty,\theta}$ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПОЛИНОМАМИ ПО СИСТЕМЕ ХААРА

We obtain the exact-order estimate for the best m-term approximation of the classes $B^r_{\infty,\theta}$ of periodic functions of many variables by polynomials with respect to the Haar system in the metric of the space L_q, $1 < q < \infty$.

Одержано точну за порядком оцінку величини найкращого m-членного наближення класів $B^r_{\infty,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних поліномами по системі Хаара в метриці простору L_q, $1 < q < \infty$.

1. Введение. Тематика, связанная с изучением одного из видов нелинейного приближения, а именно, наилучшего m-членного приближения некоторых функциональных классов полиномами, построенными по определенной (в частности, тригонометрической) системе функций, интенсивно развивается в последние десятилетия (см., например, [1, 2]). В предлагаемой работе получена точная по порядку оценка наилучшего m-членного приближения классов $B^r_{\infty,\theta}$ периодических функций многих переменных полиномами, построенными по системе Хаара. Если сравнивать эту оценку с полученной в [3] точной по порядку оценкой величины наилучшего m-членного приближения по тригонометрической системе, то можно сделать вывод о преимуществе системы Хаара над тригонометрической системой для рассматриваемого нелинейного приближения классов $B^r_{\infty,\theta}$ при небольших гладкостях, о чем подробнее будет идти речь в комментариях в заключительной части работы.

Приведем сначала определение системы Хаара.

Пусть P_τ, $\tau \in \mathbb{Z}_+$, обозначает множество всех двоичных интервалов на отрезке $[0,1]$ вида $I = [j2^{-\tau}, (j+1)2^{-\tau})$, $j = 0, \ldots, 2^\tau - 1$. Для вектора $s = (s_1, \ldots, s_d) \in \in \mathbb{Z}^d_+$ определим

$$\mathcal{P}_s := \{I = I(1) \times \ldots \times I(d),\ I(j) \in P_{s_j},\ j = 1, \ldots, d\}$$

и

$$Q_n := \bigcup_{\|s\|_1 \le n} \mathcal{P}_s,$$

где $\|s\|_1 := (s,1) := s_1 + \ldots + s_d$. Множество Q_n называют ступенчатым гиперболическим крестом. Для количества элементов Q_n имеет место соотношение (см., например, [4])

$$\#Q_n \asymp 2^n n^{d-1}. \tag{1}$$

Заметим, что в дальнейшем (как и, в частности, в (1)) при доказательстве результатов положительные последовательности $\mu_1(n)$ и $\mu_2(n)$ будем связывать соотношением $\mu_1(n) \ll \mu_2(n)$, если для них выполняется неравенство $\mu_1(n) \le C_1\mu_2(n)$, $n \in \mathbb{N}$, с некоторой постоянной $C_1 > 0$. Если же $\mu_1(n) \ll \mu_2(n)$ и $\mu_2(n) \ll \mu_1(n)$, то будем писать $\mu_1(n) \asymp \mu_2(n)$. Все постоянные C_j, $j = 1, 2, \ldots,$ которые будут встречаться в работе, могут зависеть только от параметров, входящих в определение класса, метрики, в которой измеряется погрешность приближения, и размерности d пространства $\mathbb{R}^d$.

Для $I \in P_\tau$, $\tau \geq 0$, $I = [j2^{-\tau}, (j+1)2^{-\tau})$, $j = 0, \ldots, 2^\tau - 1$, положим

$$H_I(t) := |I|^{-1/2} \begin{cases} 1, & \text{если } \ t \in \left[j2^{-\tau}, \left(j + \dfrac{1}{2}\right) 2^{-\tau}\right), \\ -1, & \text{если } \ t \in \left[\left(j + \dfrac{1}{2}\right) 2^{-\tau}, (j+1)2^{-\tau}\right), \\ 0, & \text{если } \ t \notin I, \end{cases}$$

где $|I| = 2^{-\tau}$ — длина двоичного интервала I.

В d-мерном случае для $I = I(1) \times \ldots \times I(d)$ обозначим

$$H_I(x) := \prod_{j=1}^{d} H_{I(j)}(x_j)$$

и

$$\delta_s(f) := \sum_{I \in \mathcal{P}_s} (f, H_I)\, H_I,$$

где

$$(f, H_I) := \int\limits_{[0,1]^d} f(x)\, H_I(x)\, dx.$$

Пусть $L_p[0,1]^d$, $1 \leq p < \infty$, — пространство 1-периодических по каждой переменной и суммируемых в степени p на кубе $[0,1]^d$ функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ с нормой, которая определяется следующим образом:

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p[0,1]^d} := \left(\int\limits_{[0,1]^d} |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p}.$$

Будем считать, что пространство $L_\infty[0,1]^d$ состоит из 1-периодических по каждой переменной и непрерывных на $[0,1]^d$ функций и снабжено обычной равномерной нормой.

Всюду ниже будем предполагать, что для функций $f \in L_p[0,1]^d$, $1 \leq p \leq \infty$, выполняется условие

$$\int\limits_0^1 f(x)\, dx_j = 0, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Приведем два соотношения, необходимые для дальнейшего изложения.

Теорема Литтлвуда – Пэли (см., например, [5], гл. 3]). *Для любой функции $f \in L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$, имеет место соотношение*

$$C_1(p)\|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_{\tau \in \mathbb{N}} |\delta_\tau(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq C_2(p)\|f\|_p. \qquad (2)$$

Из (2) следует неравенство (см., например, [6])

$$\|f\|_p \geq C_3(p) \left(\sum_{s>0} \|\delta_s(f)\|_p^2 \right)^{1/2}, \quad 1 < p \leq 2. \tag{3}$$

Определим классы $B^r_{\infty,\theta}$, которые являются аналогами классов Бесова, для $0 < r < 1$, $1 \leq \theta < \infty$ следующим образом:

$$B^r_{\infty,\theta} := \left\{ f \in L_\infty[0,1]^d\colon \ \|f\|_{B^r_{\infty,\theta}} \leq 1 \right\},$$

где

$$\|f\|_{B^r_{\infty,\theta}} := \left(\sum_{s>0} (2^{r\|s\|_1} \|\delta_s(f)\|_\infty)^\theta \right)^{1/\theta}. \tag{4}$$

2. Наилучшее m-членное приближение классов $B^r_{\infty,\theta}$ полиномами по системе Хаара. Определим соответствующую аппроксимационную характеристику.

Пусть $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ — некоторая система функций из пространства $L_q[0,1]^d$. Для $f \in L_q[0,1]^d$ положим

$$\sigma_m(f,\Phi)_q := \inf_{\varphi_{n_j}, a_j} \left\| f - \sum_{j=1}^m a_j\, \varphi_{n_j} \right\|_q, \tag{5}$$

где a_j — произвольные числа. Величину (5) называют наилучшим m-членным приближением функции f полиномами, построенными по системе Φ, в пространстве $L_q[0,1]^d$.

Далее, если $F \subset L_q[0,1]^d$ — некоторый класс функций, то

$$\sigma_m(F,\Phi)_q := \sup_{f \in F} \sigma_m(f,\Phi)_q. \tag{6}$$

Вопросы, связанные с исследованием величин (5) и (6) для системы Хаара, т. е. в случае $\Phi := \mathcal{H} := \{H_I\}_I$, изучались в работах [7–11].

Рассматривая в (6) в качестве F класс $B^r_{\infty,\theta}$, а в качестве Φ систему Хаара $\mathcal{H} := \{H_I\}_I$, сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть* $1 < q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $0 < r < 1$, *тогда*

$$\sigma_m(B^r_{\infty,\theta}, \mathcal{H})_q \asymp m^{-r} \left(\log_2^{d-1} m \right)^{r+1/2-1/\theta}. \tag{7}$$

Доказательство. Установим сначала в (7) оценку сверху.

Для некоторого $k \in \mathbb{N}$ введем следующие обозначения:

$$\Delta Q_k = Q_k \backslash Q_{k-1},$$

$$N_k = \#\{s \in \mathbb{N}^d, \|s\|_1 = k\},$$

$$M_k = \left[\#\{\Delta Q_n\} 2^{-\eta(k-n)} \right],$$

где $\eta > 0$, $k = n+1, \ldots$, а $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что

$$N_k \asymp k^{d-1}, \tag{8}$$

и, согласно (1),

$$M_k \asymp 2^n n^{d-1} 2^{-\eta(k-n)}. \tag{9}$$

По заданному m подберем $n \in \mathbb{N}$, которое удовлетворяет соотношению $m \asymp \asymp 2^n n^{d-1}$.

Представим функцию $f \in B^r_{\infty,\theta}$ в виде

$$f = S_{H(Q_n)}(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\sum_{\|s\|_1=k} \delta_s(f) \right), \tag{10}$$

где

$$S_{H(Q_n)}(f) := \sum_{\|s\|_1 \le n} \delta_s(f) = \sum_{I \in Q_n} (f, H_I) H_I = \sum_{|I| \ge 2^{-n}} (f, H_I) H_I$$

— ступенчато-гиперболическая сумма Фурье – Хаара. Построим для функции f приближающий полином p_m, осуществив определенную процедуру выбора слагаемых $(f, H_I)H_I$.

Для каждого s, $\|s\|_1 = k$, $k = n+1, \ldots$, рассмотрим $\left[M_k/N_k\right]$ наибольших по модулю коэффициентов (f, H_I), $H_I \in \mathcal{P}_s$, из суммы

$$\sum_{\|s\|_1=k} \delta_s(f) = \sum_{\|s\|_1=k} \sum_{I \in \mathcal{P}_s} (f, H_I) H_I \tag{11}$$

в (10).

Для s: $\|s\|_1 = k$ имеем

$$\|\delta_s(f, \cdot)\|_\infty = 2^{\|s\|_1/2} \sup_{I \in \mathcal{P}_s} |(f, H_I)| = 2^{k/2} \sup_{I \in \mathcal{P}_s} |(f, H_I)|, \tag{12}$$

поэтому, учитывая (4), получаем

$$1 \ge \left(\sum_{\|s\|_1=k} (2^{r\|s\|_1} \|\delta_s(f)\|_\infty)^\theta \right)^{1/\theta} = 2^{k(r+1/2)} \left(\sum_{\|s\|_1=k} \sup_{I \in \mathcal{P}_s} |(f, H_I)|^\theta \right)^{1/\theta}. \tag{13}$$

Удалим $\left[M_k/N_k\right]$ слагаемых $(f, H_I)H_I$ из (11) с наибольшими значениями $|(f, H_I)|$. Тогда коэффициенты (f, H_I) в каждом из оставшихся в (11) слагаемых $(f, H_I)H_I$ в силу соотношения (13) будут удовлетворять неравенству

$$|(f, H_I)| \ll 2^{-k(r+1/2)} k^{-(d-1)/\theta}. \tag{14}$$

Таким образом, объединяя все удаленные (в результате описанной выше процедуры) и содержащиеся в $S_{H(Q_n)}(f)$ слагаемые $(f, H_I)H_I$, получаем искомый полином p_m. Убедимся при этом, что количество слагаемых $(f, H_I)H_I$ построенного полинома p_m равно по порядку m. Действительно, учитывая (1), (8) и (9), имеем

$$\#Q_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\frac{M_k}{N_k}\right] k^{d-1} \asymp 2^n n^{d-1} + 2^n n^{d-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-\eta(k-n)} \asymp 2^n n^{d-1} \asymp m.$$

Далее, отправляясь от теоремы Литтлвуда – Пэли, вследствие (10), (14), (8), (9), для полинома p_m получаем

$$\|f-p_m\|_q \asymp \left\| \left(\sum_I |(f-p_m, H_I)|^2 \, |H_I|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \ll$$

$$\ll \left\| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{I \in \Delta Q_k} 2^{-2k(r+1/2)} k^{-2(d-1)/\theta} H_I^2 \right)^{1/2} \right\|_q \asymp$$

$$\asymp \left\| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-2k(r+1/2)} k^{-2(d-1)/\theta} 2^k \sum_{I \in \Delta Q_k} \chi_I \right)^{1/2} \right\|_q \ll$$

$$\ll \left\| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-2kr} k^{-2(d-1)/\theta} k^{d-1} \chi_{[0,1]^d} \right)^{1/2} \right\|_q =$$

$$= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-2kr} k^{(d-1)(1-2/\theta)} \right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp 2^{-rn} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \asymp m^{-r} \left(\log_2^{d-1} m \right)^{r+1/2-1/\theta}. \qquad (15)$$

Оценка сверху установлена.

Перейдем к получению оценки снизу.

Для любого $m \in \mathbb{N}$ выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы, с одной стороны, выполнялось соотношение

$$\sum_{\|s\|_1=n} \#\mathcal{P}_s \asymp 2^n n^{d-1} \asymp m,$$

а с другой —

$$\sum_{\|s\|_1=n} \#\mathcal{P}_s \geq 2m. \qquad (16)$$

Рассмотрим функцию

$$f_{H,n}(x) = \sum_{\|s\|_1=n} \sum_{I \in \mathcal{P}_s} H_I(x).$$

Тогда для $s\colon \|s\|_1 = n$ имеем

$$\|\delta_s(f_{H,n})\|_\infty = \left\| \sum_{I \in \mathcal{P}_s} H_I \right\|_\infty = 2^{n/2}. \qquad (17)$$

Покажем, что функция

$$f_1(x) = C_4 2^{-(r+1/2)n} n^{-(d-1)/\theta} f_{H,n}(x) \qquad (18)$$

принадлежит классу $B^r_{\infty,\theta}$ при некотором значении $C_4 > 0$. Действительно, учитывая (17), получаем

$$\|f_1\|_{B^r_{\infty,\theta}} = \left(\sum_{\|s\|_1=n} \left(2^{r\|s\|_1} \|\delta_s(f_1)\|_\infty \right)^\theta \right)^{1/\theta} = C_4 n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{\|s\|_1=n} 1 \right)^{1/\theta} \ll 1.$$

Рассмотрим произвольное множество двоичных параллелепипедов $\mathcal{I}^m \subset \bigcup\limits_s \mathcal{P}_s$, $\|s\|_1 = n$, такое, что $\#\mathcal{I}^m \le m$. Положим $m_s = \#\{\mathcal{P}_s \backslash \mathcal{I}^m\}$. Тогда, принимая во внимание (16), имеем

$$\sum_{\|s\|_1=n} m_s \ge \sum_{\|s\|_1=n} \#\mathcal{P}_s - \#\mathcal{I}^m \ge m. \tag{19}$$

Исходя из соотношения (19) и применяя к его левой части неравенство Гельдера, находим

$$2^n n^{d-1} \ll \sum_{\|s\|_1=n} m_s \le \left(\sum_{\|s\|_1=n} m_s^{2/p}\right)^{p/2} \left(\sum_{\|s\|_1=n} 1\right)^{1-p/2} \asymp$$

$$\asymp n^{(d-1)(1-p/2)} \left(\sum_{\|s\|_1=n} m_s^{2/p}\right)^{p/2}, \quad 1 < p \le 2. \tag{20}$$

Для произвольных c_I, $I \in \mathcal{I}^m$, согласно (3), (12), (20), при $1 < q \le 2$ получаем

$$\left\| f_{H,n} - \sum_{I \in \mathcal{I}^m} c_I H_I \right\|_q \gg \left\| \sum_{\|s\|_1=n} \sum_{I \in \mathcal{P}_s \backslash \mathcal{I}^m} H_I \right\|_q \gg$$

$$\gg \left(\sum_{\|s\|_1=n} \left\| \sum_{I \in \mathcal{P}_s \backslash \mathcal{I}^m} H_I \right\|_q^2 \right)^{1/2} = 2^{n(1/2-1/q)} \left(\sum_{\|s\|_1=n} m_s^{2/q}\right)^{1/2} \gg 2^{n/2} n^{(d-1)/2}. \tag{21}$$

Из (21) следует, что

$$\sigma_m(f_{H,n}, \mathcal{H})_q \gg 2^{n/2} n^{(d-1)/2}. \tag{22}$$

Поэтому, учитывая (18) и (22), имеем

$$\sigma_m(B^r_{\infty,\theta}, \mathcal{H})_q \ge C_4 2^{-(r+1/2)n} n^{-(d-1)/\theta} \sigma_m(f_{H,n}, \mathcal{H})_q \gg$$

$$\gg m^{-r} \left(\log_2^{d-1} m\right)^{r+1/2-1/\theta}. \tag{23}$$

Для $2 < q < \infty$ вследствие $\|\cdot\|_q \ge \|\cdot\|_2$ и (23) получим

$$\sigma_m(B^r_{\infty,\theta}, \mathcal{H})_q \ge \sigma_m(B^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_2 \gg m^{-r} \left(\log_2^{d-1} m\right)^{r+1/2-1/\theta}.$$

Оценка снизу установлена.

Теорема доказана.

***Замечание* 1.** В случае $\theta = \infty$, т. е. для классов H^r_∞, порядок величины $\sigma_m(H^r_\infty, \mathcal{H})_q$ установлен А. В. Андриановым [9].

***Замечание* 2.** Сравнивая доказанную теорему с полученной в [3] оценкой величины $\sigma_m(B^r_{\infty,\theta}, \mathcal{T})_q$ для тригонометрической системы $\mathcal{T} = \{e^{2\pi i(k,x)}\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$, видим, что при $1 \le \theta < 2$, $0 < r < \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{2}$ наилучшее m-членное приближение по системе

Хаара имеет преимущество (в смысле порядковых оценок) в сравнении с наилучшим m-членным приближением по тригонометрической системе. Иными словами, при указанных ограничениях на параметры r и θ имеет место соотношение

$$\sigma_m(B^r_{\infty,\theta}, \mathcal{H})_q \asymp \sigma_m(B^r_{\infty,\theta}, \mathcal{T})_q \left(\log_2^{d-1} m\right)^{r+1/2-1/\theta}.$$

1. *Temlyakov V. N.* Nonlinear methods of approximation // Found. Comput. Math. – 2003. – **3**, № 1. – P. 33 – 107.
2. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – **67**, № 2. – С. 61 – 100.
3. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Асимптотические оценки наилучших тригонометрических и билинейных приближений классов функций нескольких переменных // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 4. – С. 536 – 551.
4. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
5. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: АФЦ, 1999.
6. *Temlyakov V. N.* The best m-term approximation and greedy algorithms // Adv. Comput. Math. – 1998. – **8**, № 3. – P. 249 – 265.
7. *Temlyakov V. N.* Non linear m-term approximation with regard to the multivariate Haar system // East J. Approxim. – 1998. – **4**, № 1. – P. 87 – 106.
8. *Andrianov A. V., Temlyakov V. N.* Best m-term approximation of functions from classes $MW^r_{q,\alpha}$ // Approxim. Theory. – 1998. – **1**. – P. 7 – 14.
9. *Андрианов А. В.* Приближение функций из классов MH^r_p полиномами Хаара // Мат. заметки. – 1999. – **66**, № 3. – С. 323 – 335.
10. *Освальд П.* Об N-членных приближениях по системе Хаара в H^s-нормах // Соврем. математика. Фундам. направления. Теория функций. – 2007. – **25**. – С. 106 – 125.
11. *Стасюк С. А.* Приближение функций многих переменных классов H^Ω_p полиномами по системе Хаара // Anal. Math. – 2009. – **35**, № 4. – P. 257 – 271.

Получено 30.11.10