УДК 517.5

Д. А. Ковтонюк, Р. Р. Салимов (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ В ТОЧКЕ ОБОБЩЕННЫХ КВАЗИИЗОМЕТРИЙ

We consider Q-homeomorphisms with respect to the p-modulus. An estimate for a measure of a ball image is obtained under such mappings and the asymptotic behavior at zero is investigated.

Розглядаються Q-гомеоморфізми відносно p-модуля. Отримано оцінку міри образу кулі при таких відображеннях і досліджено асимптотичну поведінку в нулі.

1. Введение. Напомним некоторые определения. Борелева функция $\varrho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$ (пишут $\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma$), если

$$\int\limits_{\gamma} \varrho(x)\, ds \geqslant 1 \tag{1}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Пусть $p \geqslant 1$, тогда *p-модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varrho^p(x)\, dm(x). \tag{2}$$

Здесь m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем полагаем $M(\Gamma) = M_n(\Gamma)$.

Свойства p-модуля, определенного соотношением (2), в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега m в $\mathbb{R}^n$, а именно:

1) p-модуль пустого семейства кривых равен нулю:

$$M_p(\varnothing) = 0;$$

2) p-модуль имеет свойство монотонности относительно семейств кривых:

$$\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \Rightarrow M_p(\Gamma_1) \leq M_p(\Gamma_2);$$

3) p-модуль имеет свойство полуаддитивности:

$$M_p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} M_p(\Gamma_i)$$

(см. теорему 6.2 в разд. 6 гл. I [1]). Заметим также, что если Γ_∞ — некоторое семейство, состоящее из неспрямляемых кривых, то $M_p(\Gamma_\infty) = 0$ (см. разд. 6 гл. I в [1, с. 18]). Упомянем еще об одном свойстве модуля. Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2 (пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$), если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2. Известно, что если $\Gamma_1 > \Gamma_2$, то $M_p(\Gamma_1) < M_p(\Gamma_2)$ (см. [1]).

Известно (см., например, разд. 13 гл. II в [1]), что в основу геометрического определения квазиконформных отображений, заданных в области G из $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, положено условие

$$M(f\Gamma) \leqslant K\, M(\Gamma) \tag{3}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области G, где $M(\cdot)$ — (конформный) модуль семейства кривых, определенный при $p=n$. Другими словами, стандартное определение квазиконформности сводится к тому, что n-модуль любого семейства кривых искажается не более чем в K раз. Отметим, что выражение „конформный модуль" употребляется в случае p-модуля, определенного в (2), при $p=n$. Упомянутое выше словосочетание вполне оправдано тем, что для любого конформного отображения $g\colon G\to\mathbb{R}^n$, заданного в области $G\subset\mathbb{R}^n$, и для произвольного семейства кривых Γ, лежащего в области G, выполнено равенство $M(g\Gamma)=M(\Gamma)$ (см., например, теорему 8.1 гл. I в [1]). Отметим, что при $p\neq n$ даже линейные отображения $f_k(x)=kx$, $k\neq 0$, не сохраняют модуль семейств кривых, а именно, $M_p\left(f_k\Gamma\right)=k^{n-p}M_p(\Gamma)$ (см. теорему 8.2 там же). Предположим, что $1<p\neq n$ и

$$M_p(f\Gamma)\leq K\,M_p(\Gamma) \tag{4}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области G. При дополнительном предположении, что f в (4) является гомеоморфизмом, Ф. Герингом установлено, что отображение f является *локально квазиизометричным*. Другими словами, при некоторой постоянной $C>0$ и всех $x_0\in G$ справедлива оценка

$$\limsup_{x\to x_0}\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|}\leqslant C$$

(см., например, теорему 2 в [2]). Целью данной работы является исследование на основе используемой нами техники аналога следующего результата из работы [3] для более общих классов.

Предположим, что $f\colon\mathbb{B}^3\to\mathbb{B}^3$ — K-квазиконформное отображение такое, что $f(0)=0$. Тогда

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{\alpha}}\leqslant 1,$$

где α — постоянная, зависящая только от коэффициента квазиконформности K.

Пусть для отображения $f\colon G\to\mathbb{R}^n$, имеющего в G частные производные почти всюду, $f'(x)$ — якобиева матрица отображения f в точке x, $\|f'(x)\| = \max_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\dfrac{|f'(x)h|}{|h|}$. *Внешняя дилатация* отображения f в точке x есть величина

$$K_O(x,f)=\frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|},$$

если *якобиан* $J(x,f):=\det f'(x)\neq 0$, $K_O(x,f)=1$, если $f'(x)=0$, и $K_O(x,f)=\infty$ в остальных точках. *Внутренняя дилатация* отображения f в точке x есть величина

$$K_I(x,f)=\frac{|J(x,f)|}{l\left(f'(x)\right)^n},$$

если якобиан $J(x,f)\neq 0$, $K_I(x,f)=1$, если $f'(x)=0$, и $K_I(x,f)=\infty$ в остальных точках. В формуле выше, как обычно,

$$l\left(f'(x)\right)=\min_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{|f'(x)h|}{|h|}.$$

Всюду далее $B(x_0,\,r)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-x_0|<r\}$, $\mathbb{B}^n=B(0,1)$, $B_r=B(0,r)$, ω_{n-1} — площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, Ω_n — объем единичного шара $\mathbb{B}^n$ в

$\mathbb{R}^n$, $n\Omega_n = \omega_{n-1}$. Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $Q\colon G \to [0,\infty]$ — измеримая функция. Тогда $q_{x_0}(r) = \dfrac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \displaystyle\int_{|x-x_0|=r} Q(x)d\mathcal{A}$ означает среднее интегральное значение над сферой $S(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x-x_0| = r\}$, где $d\mathcal{A}$ — элемент площади поверхности. В дальнейшем при $x_0 = 0$ полагаем $q(t) = q_{x_0}(t)$. Запись $m(A)$ означает меру Лебега множества A в $\mathbb{R}^n$.

Следуя работе [4], пару $E = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и C — непустое компактное множество, содержащееся в A, называем *конденсатором*. Конденсатор E называем *кольцевым конденсатором*, если $B = A \setminus C$ — кольцо, т. е. если B — область, дополнение которой $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B$ состоит в точности из двух компонент. Конденсатор E называем *ограниченным конденсатором*, если множество A является ограниченным. Говорят, что конденсатор $E = (A, C)$ лежит в области G, если $A \subset G$. Очевидно, что если $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ — открытое отображение и $E = (A, C)$ — конденсатор в G, то (fA, fC) также конденсатор в fG. Далее $fE = (fA, fC)$.

Пусть $E = (A, C)$ — конденсатор, $W_0(E) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных функций $u\colon A \to \mathbb{R}^1$ таких, что: 1) $u \in C_0(A)$, 2) $u(x) \geqslant 1$ для $x \in C$ и 3) u принадлежит классу ACL, и пусть

$$|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^{n} (\partial_i u)^2\right)^{1/2}. \tag{5}$$

При $p \geqslant 1$ величину

$$\operatorname{cap}_p E = \operatorname{cap}_p (A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int_A |\nabla u|^p \, dm \tag{6}$$

называют *p-емкостью* конденсатора E. В дальнейшем при $p > 1$ будем использовать равенство

$$\operatorname{cap}_p E = M_p(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)), \tag{7}$$

где для множеств $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ и $\mathcal{S}_3$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $\Delta(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2; \mathcal{S}_3)$ обозначает семейство всех непрерывных кривых, соединяющих $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ в $\mathcal{S}_3$ [5–7].

Известно, что при $p \geqslant 1$

$$\operatorname{cap}_p E \geqslant \frac{(\inf m_{n-1}\,\sigma)^p}{[m(A \setminus C)]^{p-1}}, \tag{8}$$

где $m_{n-1}\,\sigma$ — $(n-1)$-мерная мера Лебега C^∞-многообразия σ, которое является границей $\sigma = \partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего C и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в A, а точная нижняя грань берется по всем таким σ (см. предложение 5 из [8]).

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $Q\colon G \to [0,\infty]$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ будем называть *Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля*, если

$$M_p(f\Gamma) \leqslant \int_G Q(x)\varrho^p(x)\, dm(x) \tag{9}$$

для любого семейства Γ путей в G и любой допустимой функции ϱ для Γ.

Определение Q-гомеоморфизма относительно p-модуля впервые встречается в работе [9]. Такие отображения являются естественным обобщением квазиконформных и локально квазиизометрических отображений. Заметим, что если $Q(x) \leqslant K$ почти всюду при $p = n$, отображение f является K-квазиконформным (см., например, [1]) и локально K-квазиизометричным в случае $1 < p \neq n$ [2]. Целью теории Q-гомеоморфизмов является установление взаимосвязей между различными свойствами мажоранты Q и самого отображения f. Неравенство вида (9) при $p = n$ установлено В. Я. Гутлянским в работе [10] совместно с К. Бишопом, О. Мартио и М. Вуориненом для квазиконформных отображений, где Q было равно $K_I(x, f)$. Последнее обстоятельство, собственно, и положило начало рассмотрению классов отображений, удовлетворяющих упомянутому выше соотношению. Отметим также, что неравенство вида (9) при $p = n$ было установлено Ю. Ф. Струговым в работе [11] для так называемых отображений, квазиконформных в среднем. При $p = n$ проблема локального поведения Q-гомеоморфизмов изучалась в $\mathbb{R}^n$ в случае $Q \in \mathrm{BMO}$ (ограниченного среднего колебания), в случае $Q \in \mathrm{FMO}$ (конечного среднего колебания) и в других случаях (см. монографию [12]).

2. Искажение объема. В этом пункте получена оценка меры образа шара при Q-гомеоморфизмах относительно p-модуля. Впервые оценка площади образа круга при квазиконформных отображениях встречается в работе М. А. Лаврентьева [13].

Лемма. *Пусть $n \geqslant 2$, $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ — Q-гомеоморфизм относительно p-модуля с $Q(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^n)$. Тогда при $1 < p < n$ имеет место оценка*

$$m(fB_r) \leqslant \Omega_n \left(1 + \frac{n-p}{p-1} \int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)}\, q^{1/(p-1)}(t)}\right)^{n(p-1)/(p-n)}, \tag{10}$$

а при $p = n$ —

$$m(fB_r) \leqslant \Omega_n \exp\left\{-n \int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{1/(n-1)}(t)}\right\}. \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим сферическое кольцо $R_t = \{x \in \mathbb{B}^n : t < |x| < t + \triangle t\}$. Пусть $(A_{t+\triangle t}, C_t)$ — конденсатор, где $C_t = \overline{B_t}, A_{t+\triangle t} = B_{t+\triangle t}$. Тогда $(fA_{t+\triangle t}, fC_t)$ — кольцевой конденсатор в $\mathbb{R}^n$, и согласно (7) имеем

$$\mathrm{cap}_p(fA_{t+\triangle t}, fC_t) = M_p(\triangle(\partial fA_{t+\triangle t}, \partial fC_t; fR_t)). \tag{12}$$

В силу неравенства (8) получим

$$\mathrm{cap}_p\,(fA_{t+\triangle t}, fC_t) \geqslant \frac{(\inf m_{n-1}\,\sigma)^p}{m\,(fA_{t+\Delta t} \setminus fC_t)^{p-1}}, \tag{13}$$

где $m_{n-1}\,\sigma$ – $(n-1)$-мерная мера Лебега C^∞-многообразия σ, которое является границей $\sigma = \partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего fC_t и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в $fA_{t+\triangle t}$, а точная нижняя грань берется по всем таким σ.

С другой стороны, в силу определения Q-гомеоморфизма относительно p-модуля имеем

$$\mathrm{cap}_p\,(fA_{t+\triangle t}, fC_t) \leqslant \int\limits_{R_t} Q(x)\varrho^p(x)\, dm(x).$$

Заметим, что функция $\varrho(x) = \left(|x| \ln \frac{t+\Delta t}{t}\right)^{-1} \chi_{R_t}(x)$, где $\chi_{R_t}(x)$ — характеристическая функция множества R_t, является допустимой для семейства $\triangle(\partial A_{t+\triangle t}, \partial C_t; R_t)$, и поэтому

$$\operatorname{cap}_p\left(fA_{t+\triangle t}, fC_t\right) \leqslant \frac{1}{\left(\ln \frac{t+\Delta t}{t}\right)^p} \int\limits_{R_t} \frac{Q(x)}{|x|^p}\, dm(x). \tag{14}$$

Комбинируя неравенства (13) и (14), получаем

$$\frac{(\inf m_{n-1}\, \sigma)^p}{m\left(fA_{t+\Delta t} \setminus fC_t\right)^{p-1}} \leqslant \frac{1}{\left(\ln \frac{t+\Delta t}{t}\right)^p} \int\limits_{R_t} \frac{Q(x)}{|x|^p}\, dm(x).$$

Заметим, что по теореме Фубини имеем

$$\int\limits_{R_t} \frac{Q(x)}{|x|^p}\, dm(x) = \int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{dt}{t^p} \int\limits_{S_t} Q(x)\, d\mathcal{A} = \omega_{n-1} \int\limits_t^{t+\Delta t} t^{n-p-1} q(t)\, dt$$

и, таким образом,

$$\inf m_{n-1}\, \sigma \leqslant \omega_{n-1}^{1/p} \frac{\left[m\left(fA_{t+\Delta t} \setminus fC_t\right)\right]^{(p-1)/p}}{\ln \frac{t+\Delta t}{t}} \left[\int\limits_t^{t+\Delta t} t^{n-p-1} q(t)\, dt\right]^{1/p}.$$

Далее, воспользовавшись изопериметрическим неравенством

$$\inf m_{n-1}\, \sigma \geqslant n\Omega_n^{1/n} \left(m(fC_t)\right)^{(n-1)/n},$$

получим

$$\left(m(fC_t)\right)^{(n-1)/n} \leqslant$$
$$\leqslant \omega_{n-1}^{1/p} \frac{\left[m\left(fA_{t+\Delta t} \setminus fC_t\right)\right]^{(p-1)/p}}{\ln \frac{t+\Delta t}{t}} \left[\int\limits_t^{t+\Delta t} t^{n-p-1} q(t)\, dt\right]^{1/p}. \tag{15}$$

Определим функцию $\Phi(t)$ для данного гомеоморфизма f следующим образом: $\Phi(t) := m\left(fB_t\right)$. Тогда из соотношения (15) следует, что

$$n\Omega_n^{1/n} \Phi^{(n-1)/n}(t) \leqslant$$
$$\leqslant \omega_{n-1}^{1/p} \frac{\left[\frac{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t}\right]^{(p-1)/p}}{\frac{\ln(t+\Delta t) - \ln t}{\Delta t}} \left[\frac{1}{\Delta t} \int\limits_t^{t+\Delta t} t^{n-p-1} q(t)\, dt\right]^{1/p}. \tag{16}$$

Далее, устремляя в неравенстве (16) Δt к нулю и учитывая монотонное возрастание функции Φ по $t \in (0,1)$, для почти всех t имеем

$$\frac{n\Omega_n^{(p-n)/n(p-1)}}{t^{(n-1)/(p-1)}\,q^{1/(p-1)}(t)} \leqslant \frac{\Phi'(t)}{\Phi^{p(n-1)/n(p-1)}(t)}. \tag{17}$$

Рассмотрим неравенство (17) при $1 < p < n$. Интегрируя обе части неравенства по $t \in [r, 1]$ и учитывая, что (см., например, теорему 7.4 гл. IV в [14])

$$\int\limits_r^1 \frac{\Phi'(t)}{\Phi^{p(n-1)/n(p-1)}(t)}\,dt \leqslant \frac{n(p-1)}{p-n}\left(\Phi^{(p-n)/n(p-1)}(1) - \Phi^{(p-n)/n(p-1)}(r)\right),$$

находим

$$\int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)}\,q^{1/(p-1)}(t)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Omega_n^{(p-n)/n(p-1)}}\frac{p-1}{p-n}\left(\Phi^{(p-n)/n(p-1)}(1) - \Phi^{(p-n)/n(p-1)}(r)\right). \tag{18}$$

Из неравенства (18) получаем

$$\Phi(r) \leqslant \Bigg(\Phi^{(p-n)/n(p-1)}(1) +$$

$$+\Omega_n^{(p-n)/n(p-1)}\,\frac{n-p}{p-1}\int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)}\,q^{1/(p-1)}(t)}\Bigg)^{n(p-1)/(p-n)}.$$

Наконец, обозначая в последнем неравенстве $\Phi(r) = m(fB_r)$ и учитывая, что $m(f\mathbb{B}^n) \leq \Omega_n$, имеем оценку

$$m(fB_r) \leqslant \Omega_n\left(1 + \frac{n-p}{p-1}\int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)}\,q^{1/(p-1)}(t)}\right)^{n(p-1)/(p-n)}.$$

Неравенство (10) доказано.

Осталось рассмотреть случай $p = n$. В этом случае неравенство (17) примет вид

$$\frac{n}{tq^{1/(n-1)}(t)} \leqslant \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}. \tag{19}$$

Интегрируя обе части неравенства (19) по $t \in [r, 1]$ и учитывая, что (см., например, теорему 7.4 гл. IV в [14])

$$\int\limits_r^1 \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}dt \leqslant \ln\frac{\Phi(1)}{\Phi(r)},$$

получаем

$$n\int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{1/(n-1)}(t)} \leqslant \ln\frac{\Phi(1)}{\Phi(r)}.$$

Следовательно,

$$\exp\left\{n\int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{1/(n-1)}(t)}\right\} \leqslant \frac{\Phi(1)}{\Phi(r)},$$

а потому

$$\Phi(r) \leqslant \Phi(1)\exp\left\{-n\int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{1/(n-1)}(t)}\right\}.$$

Наконец, обозначая в последнем неравенстве $\Phi(r) = m(fB_r)$, имеем

$$m(fB_r) \leqslant \Omega_n \exp\left\{-n\int\limits_r^1 \frac{dt}{tq^{1/(n-1)}(t)}\right\}.$$

Неравенство (11) доказано, что и завершает доказательство леммы.

3. Поведение в точке. Лемма, приведенная в предыдущем пункте, позволяет также описать асимптотическое поведение Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля в нуле.

Предложение. *Пусть* $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$, *— гомеоморфизм,* $f(0) = 0$. *Тогда если*

$$m(fB_r) \leqslant \Omega_n\, R^n(r), \tag{20}$$

то

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{R(|x|)} \leqslant 1. \tag{21}$$

Доказательство. Положим $\min_{|x|=r} |f(x)| = l_f(r)$. Тогда, учитывая, что $f(0) = 0$, получаем $\Omega_n\, l_f^n(r) \leqslant m(fB_r)$ и, следовательно,

$$l_f(r) \leqslant \left(\frac{m(fB_r)}{\Omega_n}\right)^{1/n}. \tag{22}$$

Таким образом, учитывая неравенства (22) и (20), имеем

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{R(|x|)} = \liminf_{r\to 0} \frac{l_f(r)}{R(r)} \leqslant \liminf_{r\to 0} \left(\frac{m(fB_r)}{\Omega_n}\right)^{1/n} \frac{1}{R(r)} \leqslant 1.$$

Предложение доказано.

Комбинируя лемму и предложение с функцией

$$R(r) = \left(1 + \frac{n-p}{p-1}\int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{(-n-1)/(p-1)}\, q^{1/(p-1)}(t)}\right)^{(p-1)/(n-p)}$$

при $1 < p < n$ и $R(r) = \exp\left\{-\int_r^1 \frac{dt}{tq^{1/(n-1)}(t)}\right\}$ при $p = n$, получаем следующий результат.

Теорема. *Пусть* $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$, *—* Q*-гомеоморфизм относительно* p*-модуля с* $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^n)$, $f(0) = 0$. *Тогда при* $1 < p < n$ *имеет место оценка*

$$\liminf_{x\to 0} |f(x)| \left(1 + \frac{n-p}{p-1}\int\limits_{|x|}^1 \frac{dt}{t^{(n-1)/(p-1)}\, q^{1/(p-1)}(t)}\right)^{(p-1)/(n-p)} \leqslant 1,$$

а при $p = n$ —

$$\liminf_{x\to 0} |f(x)| \exp\left\{\int\limits_{|x|}^{1} \frac{dt}{tq^{1/(n-1)}(t)}\right\} \leqslant 1.$$

Авторы выражают благодарность профессору Гутлянскому В. Я. за постановку задачи об оценке меры образа шара, восходящей к Лаврентьеву М. А. в классе квазиконформных отображений на комплексной плоскости.

1. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – 1971. – **229**. – 229 p.
2. *Gehring F. W.* Lipschitz mappings and the p-capacity of ring in n-space // Adv. Theory Riemann Surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, New York, 1969). Ann. Math. Stud. – 1971. – **66**. – P. 175 — 193.
3. *Ikoma K.* On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space // Nagoya Math. J. – 1965. – **25**. – P. 175 – 203.
4. *Martio O., Rickman S., Vaisala J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1969. – **448**. – P. 1 – 40.
5. *Gehring F. W.* Quasiconformal mappings in complex analysis and its applications. – Vienna: Int. Atomic Energy Agency, 1976.
6. *Hesse J.* A p-extremal length and p-capacity equality // Arch. mat. – 1975. – **13**. – P. 131 – 144.
7. *Shlyk V. A.* On the equality between p-capacity and p-modulus // Sib. Mat. Zh. – 1993. – **34**, № 6. – S. 216 – 221.
8. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб. – 1986. – **130**, № 2. – С. 185 – 206.
9. *Golberg A.* Differential properties of (α, Q)-homeomorphisms // Further Progress in Analysis. – World Sci. Publ., 2009. – P. 218 – 228.
10. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397 – 1420.
11. *Стругов Ю. Ф.* Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем // Докл. АН СССР. – 1978. – **243**, № 4. – С. 859 – 861.
12. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer, 2009. – 367 p.
13. *Лаврентьев М. А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. – М.: Наука, 1962. – 136 с.
14. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949.

Получено 01.11.10