УДК 517.9

І. Д. Скутар (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

By using a method proposed by R. Langer, we construct a formal solution of an integral differential equation obtained after the asymptotic integration of one system of linear differential equations with a small parameter of a part of derivatives.

С помощью методики, предложенной Р. Лангером, построено формальное решение интегро-дифференциального уравнения, которое получено при асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных.

У роботі [1] розглянуто систему рівнянь вигляду

$$u' = A(x)u + A_1(x)v,$$

$$\varepsilon v' = (B(x) + \varepsilon B_1(x))v + \varepsilon B_2(x)u,$$

де $u \in R^p$, $v \in R^2$, A, A_1, B_1 і B_2 — матриці, голоморфні по x в області $|x| \leqslant \rho$, ε — малий параметр, $B(x)$ — матриця Ейрі [2], яка має вигляд

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

Для цієї системи побудовано перетворення, що зводить її до системи рівнянь вигляду

$$\omega_1' = c_1(\varepsilon)\upsilon_1, \quad \omega_j' = 0, \quad j = \overline{2, p}, \tag{1}$$

$$\varepsilon \upsilon' = B(x)\upsilon + \varepsilon D_1(\varepsilon)\omega, \tag{2}$$

де $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2)$ — двовимірний вектор,

$$D_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ d_1(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$c_1(\varepsilon)$, $d_1(\varepsilon)$ — відомі формальні ряди.

У процесі побудови розв'язків системи (1), (2) одержується інтегро-диференціальне рівняння вигляду

$$\varepsilon^2 \upsilon_1'' = x\upsilon_1 + \varepsilon c(\varepsilon) + 3\varepsilon\alpha(\varepsilon) \int\limits_0^x \upsilon_1(t)dt, \tag{3}$$

де $x \in \mathbb{R}$, $\alpha(\varepsilon)$ і $c(\varepsilon)$ — задані формальні ряди. Загальний розв'язок цього рівняння побудовано в [1] у вигляді степеневого ряду.

У даній статті будуємо формальний розв'язок рівняння (3) у вигляді розкладу за степенями малого параметра, використовуючи методику Р. Лангера [3].

За допомогою диференціювання рівняння (3) зводиться до вигляду

$$\upsilon_1''' - \lambda^2 x \upsilon_1' - (\lambda^2 + 3\lambda\mu)\upsilon_1 = 0, \tag{4}$$

де $x \in \mathbb{R}$, $\lambda = \varepsilon^{-1}$ — великий параметр, $\mu(\lambda) = \alpha(\lambda^{-1})$.

Для побудови формальних розв'язків рівняння

$$\frac{d^n \upsilon}{dx^n} + \lambda \rho_1(x,\lambda)\frac{d^{n-1}\upsilon}{dx^{n-1}} + \ldots + \lambda^n \rho_n(x,\lambda)\upsilon = 0,$$

де λ — великий параметр і коефіцієнти

$$\rho_i(x,\lambda) = \sum_0^{\infty} \frac{\rho_{i,r}(x)}{\lambda^r}, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

виражені у вигляді степеневого ряду за степенями $1/\lambda$, Р. Лангер [3] пропонує використовувати так зване допоміжне алгебраїчне рівняння вигляду

$$\chi^n + \rho_{1,0}(x)\chi^{n-1} + \ldots + \rho_{n,0}(x) = 0.$$

Отже, для рівняння (4) відповідне допоміжне алгебраїчне рівняння матиме вигляд

$$\chi^3 - x\chi = 0. \tag{5}$$

Рівняння (5) має корені $\chi_0 = 0$, $\chi_1 = x^{\frac{1}{2}}$, $\chi_2 = -x^{\frac{1}{2}}$. Для кожного із коренів χ_j заміна

$$\upsilon_1(x) = \exp\left\{\lambda \int \chi dx\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta_n(x)}{\lambda^n} \tag{6}$$

зводить рівняння (4) до вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(\lambda^2(3\chi^2 - x)\theta_n' + \lambda^2(3\chi\chi' - 1)\theta_n + \lambda(\chi''\theta_n + 3\chi'\theta_n' + 3\chi\theta_n'' - 3\mu\theta_n) + \theta_n'''\big)\lambda^{-n} = 0.$$

Враховуючи, що в лівій частині одержаної рівності маємо розклад за степенями $\dfrac{1}{\lambda}$, перепишемо її таким чином:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big((3\chi^2 - x)\theta_n' + (3\chi\chi' - 1)\theta_n +$$
$$+ (\chi''\theta_{n-1} + 3\chi'\theta_{n-1}' + 3\chi\theta_{n-1}'' - 3\mu\theta_{n-1}) + \theta_{n-2}'''\big)\lambda^{-n} = 0,$$

де кожне θ_n з від'ємним індексом дорівнює 0.

Функція (6) буде формальним розв'язком диференціального рівняння (4), якщо коефіцієнти θ_n задовольнятимуть систему рівнянь

$$(3\chi^2 - x)\theta_n' + (3\chi\chi' - 1)\theta_n = -(\chi''\theta_{n-1} + 3\chi'\theta_{n-1}' + 3\chi\theta_{n-1}'' - 3\mu\theta_{n-1}) - \theta_{n-2}''',$$
$$n = 0,1,2,\ldots. \tag{7}$$

Для будь-якого розв'язку рівняння (4) можна знайти вигляд коефіцієнтів θ_n. Кожне з рівнянь системи (7) може бути розв'язане як лінійне диференціальне рівняння першого порядку по відношенню до θ_n [4]. Зокрема, при $\chi = \chi_0$ система (7) матиме вигляд

$$-x\theta_n' - \theta_n = 3\mu\theta_{n-1} - \theta_{n-2}''', \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Поклавши в останньому рівнянні $n = 0, 1, 2$, одержимо

$$x\theta_0' + \theta_0 = 0,$$

$$x\theta_1' + \theta_1 = -3\mu x^{-1},$$

$$x\theta_2' + \theta_2 = 9\mu^2 x^{-1} lnx + 6x^{-4}.$$

Частинні розв'язки цих рівнянь мають відповідно розв'язки

$$\theta_0(x) = x^{-1},$$

$$\theta_1 = -3\mu x^{-1} ln(x),$$

$$\theta_2 = 2Cx^{-4} + \frac{9}{2}\mu^2 C x^{-1} ln^2(x).$$

Продовжуючи цей процес, можемо отримати загальні формули для обчислення розв'язків системи (7):

$$\begin{gathered}\theta_{2m} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{2(m-k)} K(2(m-k), k, j)\mu^{2(m-k)} x^{-3k-1} ln^j x + \\ + K(2m, 0, 2m)\mu^{2m} x^{-1} ln^{2m} x, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \\ \theta_{2m+1} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{2(m-k)+1} K(2(m-k)+1, k, j)\mu^{2(m-k)+1} x^{-3k-1} ln^j x + \\ + K(2m+1, 0, 2m+1)\mu^{2m+1} x^{-1} ln^{2m+1} x, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,\end{gathered} \tag{8}$$

з коефіцієнтами

$$K(i,k,j) = \begin{cases} 0, \quad k = 0, \quad i \neq j, \\ \dfrac{(-3)^i}{i!}, \quad k = 0, \quad i = j \neq 0, \\ \dfrac{(-1)^i (3k)!}{3^{k-j} j! k! k^{i-j}} - \displaystyle\sum_{l=j}^{i-1} \frac{l!}{j!(3k)^{l-j+1}} \times \\ \times \left(\displaystyle\sum_{n=l}^{i} K(i, k-1, n) \frac{n!}{l!} \delta_k - 3K(i-1, k, l) \right) \\ \hfill \text{в інших випадках.} \end{cases} \tag{9}$$

Тут

$$\delta_k = \begin{cases} 0, & n - l > 3, \\ 1, & n - l = 3, \\ 3(3k-1), & n - l = 2, \\ 27k^2 - 18k + 2, & n - l = 1, \\ \dfrac{(3k)!}{(3k-3)!}, & n - l = 0. \end{cases}$$

Для розв'язків $\chi = \pm x^{\frac{1}{2}}$ рівняння (5) система (7) матиме вигляд

$$2x\theta_n' + \frac{1}{2}\theta_n = \mp\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\left(3x\theta_{n-1}'' + \frac{3}{2}\theta_{n-1}' - \frac{1}{4}x^{-1}\theta_{n-1}\right) + 3\mu\theta_{n-1} - \theta_{n-2}'''.$$

Як і в попередньому випадку, покладемо $n = 0, 1, 2, \ldots$ і розв'яжемо отримані лінійні диференціальні рівняння першого порядку по відношенню до θ_n. Розв'язками попередньої системи будуть функції

$$\theta_m = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-k} K(m-k,k,j)\mu^{m-k}x^{-\frac{3}{2}k-\frac{1}{4}}\ln^j x + K(m,0,m)\mu^m x^{-\frac{1}{4}}\ln^m x,$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

з коефіцієнтами

$$K(i,k,j) = \begin{cases} 0, \quad k<0, \quad k=0, i\neq j, \\ \dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^i}{i!}, \quad k=0, \quad i=j\neq 0, \\ -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{l=j}^{i}\frac{l!(2)^{l-j+1}}{j!(3k)^{l-j+1}}\left(\sum_{n=l}^{i}K(i,k-1,n)\frac{n!}{l!}\times\right. \\ \qquad \times\left(\mp 3\delta_k^1 \mp \dfrac{3}{2}\delta_k^2 \pm \dfrac{1}{4}\delta_k^3\right) + 3K(i-1,k,l) - \\ \qquad \left. -\delta_k^0 K(i,k-2,l)\right) \quad \text{в інших випадках,} \end{cases} \tag{11}$$

де

$$\delta_k^1 = \begin{cases} 0, & n-l>2, \\ 1, & n-l=2, \\ -\dfrac{3k+3}{2}, & n-l=1, \\ \dfrac{(6k-5)(6k-1)}{16}, & n-l=0, \end{cases}$$

$$\delta_k^2 = \begin{cases} 0, & n-l>1, \\ 1, & n-l=1, \\ -\dfrac{6k-5}{4}, & n-l=0, \end{cases}$$

$$\delta_k^3 = \begin{cases} 0, & n-l\neq 0, \\ 1, & n-l=0, \end{cases}$$

$$\delta_k^0 = \begin{cases} 0, & i-l>3, \\ 1, & i-l=3, \\ -\dfrac{18k-21}{4}, & i-l=2, \\ \dfrac{108k^2-252k+131}{16} & i-l=1, \\ -\dfrac{(6k-3)(6k-7)(6k-11)}{64}, & i-l=0. \end{cases}$$

Отже, ми отримали формальні розв'язки рівняння (4). Підставляючи знайдені розв'язки у відповідне для (3) однорідне рівняння, переконуємося, що його задовольняють лише два з трьох знайдених вище розв'язків, а саме розв'язки при $\chi = \pm x^{1/2}$, що задаються формулою (10) з коефіцієнтами (11).

Залишилося знайти частинний розв'язок рівняння (3). Покажемо, що цей розв'язок можна подати у вигляді

$$v(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{2m-2k+1} C(m,k,i) x^{-3k-1} \ln^i x. \tag{12}$$

Для цього підставимо вираз (12) у рівняння (3) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x. Розв'язавши систему, що отримали в результаті підстановки, знайдемо вигляд коефіцієнтів:

$$C(m,k,i) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{i+1}(3\alpha\varepsilon)^i}{i!}\varepsilon c(\varepsilon), \quad k=0, \quad m=0, \\ 0, \quad k=0, \quad m \neq 0, \\ \dfrac{k\varepsilon^2}{k-\alpha\varepsilon}\big((-3k-5)(-3k-4)C(m,k-1,i)+ \\ \qquad +(-6k+3)(i+1)C(m,k-1,i+1)+(i+2)(i+1)\times \\ \qquad \times C(m,k-1,i+2)\big) \quad \text{в інших випадках.} \end{cases} \tag{13}$$

Формальний розв'язок рівняння (3) одержується у вигляді лінійної комбінації

$$v_1 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3.$$

Тут y_1, y_2 задаються формулами (6) при підстановці замість χ розв'язків $\chi_{1,2} = \pm x^{1/2}$ рівняння (5), а замість θ_n рівності (10) з коефіцієнтами (11). Частинний розв'язок y_3 задається формулою (12) з коефіцієнтами (13), C_1, C_2 — довільні сталі.

Приклад. Розглянемо рівняння

$$\varepsilon^2 v'' = xv, \tag{14}$$

яке одержується з (3) при $c(\varepsilon) = 0$ і $\alpha(\varepsilon) = 0$. Дане рівняння відоме як рівняння Ейрі [2]. Здиференціюємо обидві частини рівняння (14). Отримаємо рівняння

$$\varepsilon^2 v''' = xv' + v. \tag{15}$$

Випишемо розв'язки цього рівняння, використавши формули (8) та (10). Одержимо

$$\upsilon_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_m x^{-3m-1}}{\lambda^{2m}}, \quad k_m = \frac{(3m)!}{3^m m!},$$

$$\upsilon_2 = x^{-1/4} e^{2/3\lambda x^3/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_m x^{-3/2m}}{\lambda^m},$$

$$k_m = \frac{1}{3m}\left[k_{m-1}\left(3\frac{(6m-1)(6m-5)}{16} - \frac{3}{2}\frac{6m-5}{4} - \frac{1}{4}\right) - \right.$$
$$\left. -k_{m-2}\frac{(6m-3)(6m-7)(6m-11)}{64}\right],$$

$$\upsilon_3 = x^{-1/4} e^{-2/3\lambda x^3/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_m x^{-3/2m}}{\lambda^m},$$

$$k_m = -\frac{1}{3m}\left[k_{m-1}\left(3\frac{(6m-1)(6m-5)}{16} - \frac{3}{2}\frac{6m-5}{4} - \frac{1}{4}\right) + \right.$$
$$\left. +k_{m-2}\frac{(6m-3)(6m-7)(6m-11)}{64}\right].$$

Підставивши отримані розв'язки в рівняння Ейрі, одержимо, що υ_2 і υ_3 перетворюють це рівняння у тотожність. Слід також зазначити, що розв'язки υ_2 і υ_3 збігаються з розв'язками рівняння Ейрі, одержаними В. Вазовим у монографії [2].

1. *Самойленко А. М.* Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 11. – С. 1505 – 1516.
2. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
3. *Langer R. E.* The solutions of the differential equation $\upsilon''' + \lambda^2 z\upsilon' + 3\mu\lambda^2\upsilon = 0$ // Duke Math. J. – 1955. – **22**. – P. 525 – 542.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.

Одержано 30.06.10,
після доопрацювання — 30.09.10