УДК 517.948.32:517.544

И. Ю. Дмитриева, В. Е. Круглов

О частных индексах одной матричной задачи Римана на торе

На римановой поверхности R (торе), описываемой уравнением

$$u^2 = \prod_{j=1}^{2} (z - a_j)(z - b_j), \tag{1}$$

задан контур $L: L = \bigcup_{k=1}^{n-1} L_k;\ L_i \cap L_j = \varnothing$ при $i \neq j$; $L_k,\ k = \overline{1, n-1}$, — гладкая разомкнутая кривая без самопересечений; $L_k = (\alpha_k, v(\alpha_k);\ \beta_k, v(\beta_k))$, где $v^2 = \prod_{j=1}^{2} (t - a_j)(t - b_j)$.

На R рассматривается матричная задача Римана: найти вектор-функцию $\Phi(z, u) \equiv \{\Phi_1(z, u), \ldots, \Phi_n(z, u)\}$, H-непрерывно продолжимую на контур L и ограниченную на концах этого контура, по заданному краевому условию

$$\Phi^+(t, v) = \Omega(t, v)\,\Phi^-(t, v),\ \ D^{-1} \mid (\Phi),\ \ (t, v) \in L. \tag{2}$$

Здесь n-мерный вектор-дивизор $D = \{(\infty, \pm\infty)^m, \ldots, (\infty, \pm\infty)^m\}$, $m \geqslant 0$ — целое число, а n-мерная матрица $\Omega(t, v)$ имеет структуру

$$\Omega(t, v) = \sum_{k=1}^{n-1} \delta(t, v; L_k)\,\Omega_k(t, v), \tag{3}$$

где

$$\delta(t, v; L_k) = \begin{cases} 1, & (t, v) \in L_k, \\ 0, & (t, v) \in L \setminus L_k, \end{cases} \qquad k = \overline{1, n-1};$$

$$\Omega_k(t,v)\equiv\Omega_k=\begin{bmatrix}0&1&0\ldots0\\0&0&1\ldots0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0\ldots1\\1&0&0\ldots0\end{bmatrix}^k,\quad (t,v)\in L_k,\ \ k=\overline{1,n-1}.$$

Матрицы Ω_k, $k=\overline{1,\ n-1}$, образуют циклическую группу без единицы матриц подстановочного типа порядка n.

Задача в указанной постановке на плоскости рассматривалась в [1]. С использованием S-преобразования

$$S=n^{-1/2}\begin{bmatrix}\lambda_1^{n-1}&\lambda_1^{n-2}\ldots1\\ \cdot&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \lambda_{n-1}^{n-1}&\lambda_{n-1}^{n-2}\ldots1\\ 1&1\ \ \ldots1\end{bmatrix},\quad S^{-1}=n^{-1/2}\begin{bmatrix}\lambda_1^{1-n}&\lambda_2^{1-n}\ldots1\\ \cdot&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \lambda_1^{-1}&\lambda_2^{-1}\ldots1\\ 1&1\ \ \ldots1\end{bmatrix},\tag{4}$$

где $\lambda_j=\exp(2\pi ij/n)$, $j=\overline{1,n}$, задача (1) — (3) сводится к эквивалентной задаче относительно новой неизвестной вектор-функции $\Psi(z,u)\equiv\equiv\{\Psi_1(z,u),\ldots,\Psi_n(z,u)\}$:

$$\Psi^+(t,v)=M(t,v)\Psi^-(t,v),\quad (t,v)\in L,\quad D^{-1}\,|\,(\Psi),\tag{5}$$

где

$$M(t,v)=\sum_{k=1}^{n-1}S\Omega_kS^{-1}\delta(t,v;L_k)=\sum_{k=1}^{n-1}\operatorname{diag}(\lambda_{n-1}^k,\lambda_{n-2}^k,\ldots,\lambda_1^k,1)\,\delta(t,v;L_k),\tag{6}$$

$$S\Phi(z,u)=\Psi(z,u).\tag{7}$$

Принимая во внимание формулу (6), краевое условие (5) можно переписать в скалярной форме

$$\Psi_j^+(t,v)=\left(\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_{n-j}^k\delta(t,v;L_k)\right)\Psi_j^-(t,v),\tag{8}$$

$$\Psi_n^+(t,v)=\Psi_n^-(t,v);\quad(\infty,\pm\infty)^{-m}\,|\,(\Psi_j),\quad j=\overline{1,n},\quad(t,v)\in L.\tag{9}$$

Решение задачи (9) легко записывается на основании теоремы об аналитическом продолжении:

$$\Psi_n(z,u)=P_{mn}(z),\tag{10}$$

где $P_{mn}(z)$ — произвольный полином m-й степени от z.

Применяя далее методику работ [2, 4] на римановой поверхности R, решим задачу (8), записанную в эквивалентном виде:

$$\Psi_j^+(t,v)=G_j(t,v)\Psi_j^-(t,v),\ \ (t,v)\in L,\ \ (\infty,\pm\infty)^{-m}\,|\,(\Psi_j),\ \ j=\overline{1,n-1},\tag{11}$$

где $G_j(t,v)\equiv G_j=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\lambda_{n-j}^k\delta(t,v;L_k)$, а $\delta(t,v;L_k)$ определено в (3).

При решении задачи (11) используются понятия: род поверхности R (тора)

$$\rho=1;\tag{12}$$

разрывный аналог ядра типа Коши на данной римановой поверхности R [4]

$$d\omega=\frac{1}{2}\,\frac{dt}{t-z}+\left(\int_{a_1}\frac{dt}{v}\right)^{-1}\left(\frac{u}{2v}\,\frac{dt}{t-z}\int_{a_1}\frac{dt}{v}-\frac{dt}{v}\int_{a_1}\frac{u+v}{2v}\,\frac{dt}{t-z}\right),\tag{13}$$

где a_1 — каноническое A-сечение R; индекс $\varkappa_j$ коэффициента G_j, $j=\overline{1, n-1}$, который подсчитывается следующим образом

$$\varkappa_j = \sum_{k=1}^{n-1} ([\varkappa_{j\alpha_k}] + [\varkappa_{j\beta_k}]) = -n + \text{НОД}(n, j), \quad j=\overline{1, n-1},$$

$$\varkappa_{j\alpha_k} = -k + kj/n, \quad \varkappa_{j\beta_k} = k - kj/n. \tag{14}$$

Тогда, опираясь на результаты работ [2—6], запишем каноническую функцию задачи (11)

$$\chi_j(z, u) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G_j d\omega - \int_{(z^*,\zeta^*)}^{(m_{j_1},\mu_{j_1})} d\omega + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sign}(\varkappa_j+1) \sum_{k=1}^{|\varkappa_j+1|} \int_{(z^*,\zeta^*)}^{(z_{jk},\zeta_{jk})} d\omega - \sum_{k=1}^{n-1}\left[-\frac{(n-j)k}{n}\right] \int_{(z^*,\zeta^*)}^{(\alpha_k,0)} d\omega\right\}, \quad j=\overline{1, n-1}, \tag{15}$$

где точка (z^*, ζ^*) выбирается на поверхности R произвольно; точки (z_{jk}, ζ_{ik}), $j=\overline{1, n-1}$, — произвольные точки поверхности R, фиксированные следующим образом:

$$A)\ T_j = (z_{j1}, \pm\zeta_{j1}) \dots (z_{jk_j}, \pm\zeta_{jk_j}), \qquad |\varkappa_j+1| = 2k_j, \tag{16}$$

$$B)\ T_j = (z_{j1}, \pm\zeta_{j1}) \dots (z_{j,k_j-1}, \pm\zeta_{j,k_j-1})(z_{jk_j}, \zeta_{jk_j}), \qquad |\varkappa_j+1| = 2k_j - 1,$$

точки (m_{j1}, μ_{j1}), $j=\overline{1, n-1}$, как и в [4], ищутся так, чтобы функция $\varkappa_j(z, u)$, $j=\overline{1, n-1}$, не имела разрывов вдоль канонического A-сечения поверхности R, что приводит к решению соответствующей проблемы обращения Якоби, рассматриваемой далее. Все остальные обозначения в (15) взяты из формул (12)—(14).

Перечислим легко получаемые свойства функции (15), характеризующие ее как каноническую функцию задачи (11). Функция $\chi_j(z, u)$, $j=\overline{1, n-1}$: 1) удовлетворяет краевому условию (11); 2) кратна дивизору $T_j^* = (m_{j1}, \mu_{j1})^{-1} T_j$; 3) ограничена всюду на данной поверхности R, в том числе в точках $(\infty, \pm\infty)$, а также на концах контура L в точках $(\alpha_k, v(\alpha_k)$; β_k, $v(\beta_k))$, $k=\overline{1, n-1}$.

Заметим, что функция (15) имеет особо простой вид, если $n=2$, т. е. если $|\varkappa_j+1| = 0$, а именно:

$$\chi_1(z, u) = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_L d\omega - \int_{(z^*,\zeta^*)}^{(m_1,\mu_1)} d\omega + \int_{(z^*,\zeta^*)}^{(\alpha,0)} d\omega\right\}.$$

Возвращаясь вновь к задаче (11), найдем точки (m_{j1}, μ_{j1}). Для этого необходимо решить проблему обращения Якоби:

$$w_1(m_{j1}, \mu_{j1}) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G_j dw_1(t, v) -$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\left[-\frac{(n-j)k}{n}\right] w_1(\alpha_k, 0) - \sum_{k=1}^{n-\text{НОД}(n,j)-1} w_1(z_{jk}, \zeta_{jk}), \qquad j=\overline{1, n-1}, \tag{17}$$

где сравнения берутся по модулю периодов комплексно-нормированного абелева дифференциала 1-го рода $dw_1(z, u) = \dfrac{dz}{u}\left(\displaystyle\int_{a_1} \frac{d\tau}{\zeta}\right)^{-1}$. В (17)

$\omega_1(z, u) = {}' \int\limits_{(z^*, \zeta^*)}^{(z,u)} d\omega_1(t, v)$, где штрих перед интегралом означает, что путь интегрирования не пересекает канонических сечений поверхности R.

Согласно [5], решение проблемы обращения Якоби (17) записывается через эллиптические функции Якоби [8]

$$m_{j1} = \mathrm{sn}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln G_j d\omega_1(t, v) - \sum_{k=1}^{n-\text{НОД}(n,j)-1} \omega_1(z_{jk}, \zeta_{jk}) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n-1}\left[-\frac{(n-j)k}{n}\right]\omega_1(\alpha_k, 0),\right.$$

$$\mu_{j1}^2 = \prod_{p=1}^{2}(m_{j1} - a_p)(m_{j1} - b_p), \qquad j = \overline{1, n-1}.$$

Обращаясь к работам [2, 4], общее решение задачи (11) ищем в виде

$$\Psi_j(z, u) = \varphi_j(z, u)\chi_j(z, u), \qquad j = \overline{1, n-1}, \tag{18}$$

где $\varphi_j(z, u)$ — произвольная рациональная от (z, u) на R функция, кратная дивизору $T_j^{*-1}(\infty, \pm\infty)^{-m}$. Структура дивизора T_j^* фиксируется по формуле (16).

Так как функции $\{1, u\}$ образуют нормальный базис целых функций поверхности R, то $\varphi_j(z, u)$ представляется как

$$\varphi_j(z, u) = P_{m-n+1+\text{НОД}(n,j),j}(z) + Q_{m-1-n+\text{НОД}(n,j),j}(z)\,u, \tag{19}$$

где $P_{p,j}(z)$, $Q_{qj}(z)$ — произвольные полиномы от z степеней p и q соответственно для функции $\Psi_j(z, u)$, $j = \overline{1, n-1}$. Коэффициенты этих полиномов ищутся из условия кратности $\varphi_j(z, u)$ дивизору $T_j^{*-1} : T_j^{*-1} \mid (\varphi_j)$. Поскольку число сопряженных пар точек в решении проблемы обращения (17) равно нулю, а из формул (12), (14) получаем

$$\varkappa_j + \rho \leqslant 0, \qquad j = \overline{1, n-1}, \tag{20}$$

то, согласно [2], можем записать выражения для $\varphi_j(z, u)$ в случаях A) и B):

$$\begin{aligned} &A)\ \varphi_j(z, u) = (P_{m-k_j,j}(z) + Q_{m-k_j-2,j}(z)\,u)\,f_j(z), \\ &B)\ \varphi_j(z, u) = (P_{m-k_j+1,j}(z) + Q_{m-k_j-1,j}(z)\,u)\,f_j(z), \end{aligned} \tag{21}$$

где $f_j(z) = (z - z_{j1})\cdot\ldots\cdot(z - z_{jk_j})$.

Подчиняя первый множитель в $\varphi_j(z, u)$ условию обращения в нуль в точках (m_{j1}, μ_{j1}), а в случае В) — еще и в точке (z_{jk_j}, ζ_{jk_j}), получаем систему линейных однородных уравнений, из которой легко определяются коэффициенты p_l полинома $P_{\ldots,j}(z)$: A) $l = 0$; B) $l = 0, 1$; в виде линейных комбинаций остальных коэффициентов:

$$A)\ p_l,\ l = \overline{1, m-k_j}; \qquad q_s,\ s = \overline{0, m-k_j-2};$$

$$B)\ p_l,\ l = \overline{2, m-k_j+1}; \qquad q_s,\ s = \overline{0, m-k_j-1};$$

где q_s — коэффициенты полинома $Q_{\ldots,j}(z)$. Решение систем такого сорта и поиск коэффициентов были реализованы для любого n. Вычислительная сторона трудности не представляет. Выберем из множества всех линейно независимых решений, кратных только дивизору $(\infty, \pm\infty)^{-m}$, два: $\varphi_{1j}(z, u)\chi_j(z, u)$ и $\varphi_{2j}(z, u)\chi_j(z, u)$, имеющие наименьший порядок на бесконечности и такие, что функции $\varphi_{1j}(z, u)$, $\varphi_{2j}(z, u)$ не связаны друг с другом соотношением вида $\varphi_{1j}(z, u) + R(z)\varphi_{2j}(z, u) = 0$, где $R(z)$ — некоторый полином от z. Таковыми являются функции при произвольных постоянных: A) q_0 и c_1; B) q_0 и c_2. Тогда, учитывая решение указанной выше системы, получим:

$$\begin{aligned} &A)\ \varphi_{1j}(z, u) = (F_{0j}(z) + u) f_j(z), \quad \varphi_{2j}(z, u) \equiv \varphi_{2j}(z) = H_{1j}(z) f_j(z), \\ &B)\ \varphi_{1j}(z, u) = (F_{1j}(z) + u)(z - z_{jk_j})^{-1} f_j(z), \quad \varphi_{2j}(z, u) \equiv \varphi_{2j}(z) = \\ &\qquad = H_{2j}(z)(z - z_{jk_j})^{-1} f_j(z), \end{aligned} \tag{22}$$

где $F_{0j}(z)$, $H_{1j}(z)$, $F_{1j}(z)$, $H_{2j}(z)$ — полиномы с коэффициентами, определенными из упомянутой выше системы, степеней 0, 1, 1, 2 соответственно. Для построения решения задачи (11) выбирается та из функций $\varphi_{1j}(z, u)$, $\varphi_{2j}(z, u)$, порядок которой на бесконечности меньше. Решение задачи (11) записывается по формуле (18). При этом в качестве $\varphi_j(z, u)$ в случае B) можно брать φ_{1j} либо φ_{2j}, поскольку из формулы (22) следует $\operatorname{ord}\varphi_{1j} = \operatorname{ord}\varphi_{2j} = k_j + 1$; в случае же A) — только функцию φ_{2j}, так как $\operatorname{ord}\varphi_{1j} = k_j + 2 > \operatorname{ord}\varphi_{2j} = k_j + 1$. Ясно, что в обоих вариантах

$$\operatorname{ord}\varphi_j = k_j + 1, \qquad j = \overline{1, n-1}. \tag{23}$$

Теорема. *Матрица*

$$\Lambda_1(z, u) = \operatorname{diag}(\tilde{\Psi}_1(z, u), \ldots, \tilde{\Psi}_{n-1}(z, u)), \tag{24}$$

где $\tilde{\Psi}_j(z, u)$, $j = \overline{1, n-1}$, *находятся из формул*

$$\tilde{\Psi}_j(z, u) = \varphi_j(z, u)\chi_j(z, u), \tag{25}$$

$\varphi_j(z, u) = \varphi_{2j}(z, u)$ — *из формул* (22), $\chi_j(z, u)$ — *из* (16), *каноническая матрица решений* (к. м. р.) *задачи* (11).

Доказательство. Удовлетворение краевому условию (11) проверяется непосредственной подстановкой (24) в краевое условие (11). По построению функций $\Psi_j(z, u)$, $j = \overline{1, n-1}$, получаем, что порядок столбцов на бесконечности матрицы $\Lambda_1(z, u)$ уменьшить нельзя. Вычислением на основании формул (22)—(24) имеем: $\det \Lambda_1(z, u)$ нигде в конечной части плоскости не имеет полюсов и $\operatorname{ord}\det\Lambda_1(z, u) = \sum_{j=1}^{n-1} r_j$, где r_j, $j = \overline{1, n-1}$, — порядок на бесконечности j-го столбца матрицы $\Lambda_1(z, u)$. Кроме того, $\det \Lambda_1(z, u)$ ограничен на концах контура L. Таким образом, $\Lambda_1(z, u)$ действительно является к. м. р. задачи (11) [7]. Очевидно, что к. м. р. задачи (8), (9) записывается в виде

$$\Lambda(z, u) = \operatorname{diag}(\Lambda_1(z, u), 1), \tag{26}$$

а значит, к. м. р. исходной задачи (1) — (3) представляется следующим образом:

$$X(z, u) = S^{-1}\Lambda(z, u) =$$

$$= n^{-1/2}\begin{bmatrix} \lambda_1^{1-n}\ \tilde{\Psi}_1(z, u) & \lambda_2^{1-n}\tilde{\Psi}_2(z, u) & \ldots & \lambda_{n-1}^{1-n}\tilde{\Psi}_{n-1}(z, u) & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{-1}\ \tilde{\Psi}_1(z, u) & \lambda_2^{-1}\tilde{\Psi}_2(z, u) & \ldots & \lambda_{n-1}^{-1}\tilde{\Psi}_{n-1}(z, u) & 1 \\ \tilde{\Psi}_1(z, u) & \tilde{\Psi}_2(z, u) & \ldots & \tilde{\Psi}_{n-1}(z, u) & 1 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} &A)\ r_j = 1 + k_j = 1 + \left[\frac{n - \text{НОД}(n, j) - 1}{2}\right], \qquad r_n = 0, \quad j = \overline{1, n-1}; \\ &B)\ r_j = 1 + k_j = 1 + \left[\frac{n - \text{НОД}(n, j)}{2}\right], \qquad r_n = 0, \quad j = \overline{1, n-1}, \end{aligned} \tag{28}$$

где r_j, $j = \overline{1, n-1}$, — порядок на бесконечности j-го столбца матрицы (27). Подсчитаем сумму порядков столбцов матрицы (27):

$$\sum_{j=1}^{n} r_j = \sum_{j=1}^{n-1} r_j = (n-1) + \sum_{j=1}^{n-1} k_j. \tag{29}$$

Когда n — простое число, сумма $\sum_{j=1}^{n-1}\left[\frac{\text{НОД}(n, j)}{2}\right] = 0$ и имеем

$$\begin{aligned} &A) \quad \sum_{j=1}^{n-1} r_j = (n-1)\left[\frac{n}{2}\right], \\ &B) \quad \sum_{j=1}^{n-1} r_j = (n-1)\left[\frac{n}{2}\right] + 1. \end{aligned} \tag{30}$$

Если n — составное число, также найдены $\sum_{j=1}^{n-1} r_j$, но ввиду их громоздкости они здесь не приводятся. Кроме того, получены аналогичные формулы и в случае гиперэллиптической поверхности произвольного рода $h > 1$.

Частные индексы $\varkappa_j^*$ задачи (1)—(3) таковы:

$$\varkappa_j^* = -r_j, \qquad j = \overline{1, n-1}, \qquad \varkappa_n^* = 0, \tag{31}$$

а решение исходной задачи (1) — (3) записывается следующим образом:

$$\Phi(z, u) = X(z, u) \begin{bmatrix} P_{m+\varkappa_1^*}(z) \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ P_{m+\varkappa_{n-1}^*}(z) \\ P_{m+\varkappa_n^*}(z) \end{bmatrix}, \tag{32}$$

где $P_{m+\varkappa_j^*}(z)$ — произвольный полином от z степени $m + \varkappa_j^*$, $j = \overline{1, n}$; $P_k(z) \equiv 0$ при $k < 0$.

1. *Круглов В. Е.* Абелевы дифференциалы и уравнение поверхности, заданные циклической группой подстановок.— Сообщ. АН ГрССР, 1978, **92**, № 3, с. 537—540.
2. *Круглов В. Е.* Частные индексы и одно приложение факторизации некоторых матриц подстановочного типа не выше четвертого порядка.— ВИНИТИ, № 3278—82 Деп.
3. *Круглов В. Е.* Частные индексы, абелевы дифференциалы 1-го рода и уравнение поверхности, заданные конечной абелевой группой подстановок.— Сиб. мат. журн., 1981, **22**, № 6, с. 87—101.
4. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях.— Усп. мат. наук, 1971, **26**, N 1 (157), с. 113—179.
5. *Зверович Э. И.* Ядро Беенке — Штейна и решение в замкнутой форме краевой задачи Римана на торе.— Докл. АН СССР, 1969, **188**, N 1, с. 27—30.
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.— М. : Наука, 1977.— 640 с.
7. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи.— М. : Наука, 1970.— 380 с.
8. *Справочник по специальным функциям.*/ Под ред. Абрамовица М., Стиган И.—М. : Наука, 1979.— 832 с.

Одесск. гос. ун-т

Поступила в редакцию
21.06.83