УДК 519.21

Б. Пирджанов, Б. Пирлиев

Случайное блуждание с пуассоновским сносом

В работе изучается момент достижения нулевого уровня в решетчатом случайном блуждании с отрицательными скачками в моменты процесса восстановления и единичными положительными скачками в моменты пуассоновского процесса. Рассматриваемая задача примыкает к работе [1].

Пусть заданы последовательности неотрицательных одинаково распределенных независимых в совокупности случайных величин $\{\theta_n,\ n \geqslant 1\}$, $\{\varkappa_n,\ n \geqslant 1\}$ и $\{\alpha_n,\ n \geqslant 1\}$ с функциями распределения $p_k = P\{\theta_n = k\}$, $k >$

$> 1, \quad p(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k p_k, \ |\lambda| \leqslant 1, \quad G(t) = P\{\varkappa_n \leqslant t\}, \quad G(+0) = 0, \quad g(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st)\, dG(t), \ P\{\alpha_n \leqslant t\} = 1 - \exp(-at), \quad a > 0.$

Положим $s_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \varkappa_n, \quad \delta_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \ n \geqslant 1, \ s_0 = \sigma_0 = \delta_0 = 0.$

Введем процессы восстановления $\nu_t = \max\{k : \delta_k \leqslant t\}, \quad \mu_t = \max\{k : \sigma_k \leqslant t\}$.

Будем изучать случайное блуждание

$$\xi_t = \nu_t - s_{\mu_t} + \xi_0. \tag{1}$$

В отличие от работы [1], в случайном блуждании (1) отрицательные скачки происходят в моменты произвольного процесса восстановления μ_t, а в моменты пуассоновского процесса ν_t происходит единичный положительный снос.

Введем граничные функционалы, определяемые случайным блужданием (1)

$$\tau_r = \min\{t : \xi_t < 0/\xi_0 = r > 0\}, \tag{2}$$
$$\gamma_r = \xi_{\tau_r}$$

и положим

$$\varphi_r(u, s) = M\,[u^{\gamma_r} \exp(-s_{\tau_r});\ \tau_r < \infty], \quad |u| \geqslant 1, \quad s > 0.$$

Лемма. *Случайное блуждание $\xi_n = \xi_{\sigma_n}$ порождается суммами независимых одинаково распределенных случайных величин $\eta_m \int_0^{\infty} \xi_n = \sum_{m=1}^{n} \eta_m$ таких, что*

$$P\{\eta_n = l\} = q_l = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} p_k\,((l+k)!)^{-1} \int_0^{\infty} \exp(-a\nu)\,(a\nu)^{l+k} dG(\nu), & l \geqslant 0, \\ \sum_{k=-l}^{\infty} p_k\,((l+k)!)^{-1} \int_0^{\infty} \exp(-a\nu)\,(a\nu)^{l+k} dG(\nu), & l < 0, \end{cases}$$

и $Mz^{\eta_1} = P(z^{-1})\, g(a(1-z)), \quad |z| = 1.$

Действительно, $\xi_n - \xi_{n-1} = \nu_{\sigma_n} - \nu_{\sigma_{n-1}} - s_{\mu_{\sigma_n}} + s_{\mu_{\sigma_{n-1}}} = \nu_{\sigma_n} - \nu_{\sigma_{n-1}} - s_n + s_{n-1} = \nu_{\sigma_n} - \nu_{\sigma_{n-1}} - \theta_n$. Поскольку $P\{\theta_n = l\} = P\{\theta_1 = l\}$, а в силу строгой марковости процесса

$$P\{\nu_{\sigma_n} - \nu_{\sigma_{n-1}} = l\} = P\{\nu_{\varkappa} = l\},$$

то, учитывая независимость ν_t, σ_n и θ_n, имеем

$$\xi_n - \xi_{n-1} \doteq \nu_{\varkappa_1} - \theta_1.$$

Поскольку

$$\xi_n - \xi_0 = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_{i-1}),$$

то отсюда, а также из формулы

$$P\{\nu_{\varkappa_1} - \theta_1 = l\} = \int_0^{\infty} P\{\nu_t - \theta_1 = l\}\, dG(t) = q_l$$

следует утверждение леммы.

Пусть

$$\hat{\tau}_r = \min\{n : \xi_n < 0/\xi_0 = r\}, \quad \hat{\gamma}_r = \xi_{\hat{\tau}_r}$$

и

$$\hat{\varphi}_r(u, z) = M[u^{\hat{\gamma}_r} z^{\hat{\tau}_r};\ \ \hat{\tau}_r < \infty], \quad |u| \geqslant 1, \quad |z| \leqslant 1. \tag{3}$$

Поскольку имеют место очевидные соотношения $\tau_r = \sum_{n=1}^{\hat{\tau}_r} \varkappa_n$, $\gamma_r = \hat{\gamma}_r$, то

$$\varphi_r(u, s) = M\left[u^{\hat{\gamma}_r} \exp\left(-s \sum_{n=1}^{\hat{\tau}_r} \varkappa_n\right),\ \ \hat{\tau}_r < \infty\right] = \hat{\varphi}_r(u, g(s)), \quad |u| \geqslant 1,\ s > 0.$$

Производящая функция (3) определяется, как известно, факторизационным тождеством (см., напр., [2]), которое для случайного блуждания ξ_n имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k M[z^{\hat{\tau}_k} u^{\hat{\gamma}_k},\ \ \hat{\tau}_k < \infty] = (1 - uv)^{-1}[\varphi_+(z, 1/u) - \varphi_+(z, v)]/\varphi_+(z, 1/u),$$

и функция $\varphi_+(z, \lambda)$ является компонентой факторизации [3],

$$(1 - z)[1 - zp(\lambda)\, g(a(1 - \lambda^{-1}))]^{-1} = \varphi_+(z, \lambda)\, \varphi_-(z, \lambda), \quad |\lambda| = 1, \quad |z| = 1.$$

Теорема 1. *При* $|\lambda| = 1$, $|u| \geqslant 1$, $s > 0$

$$\Phi(\lambda, u, s) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \varphi_r(u, s) = (1 - \lambda u)^{-1}[\varphi_+(g(s), 1/u) - \varphi_+(g(s), \lambda)]/ \\ /\varphi_+(g(s), 1/u). \tag{4}$$

Наряду с (1), рассмотрим двумерный процесс $\{\xi_t, \beta_t, t \geqslant 0\}$, где β_t — время от момента t до ближайшего после t момента σ_n. При этом $\beta_{\sigma_n} = 0$, $n \geqslant 1$. Легко понять, что $\{\xi_t, \beta_t, t \geqslant 0\}$ — марковский процесс.

Положим

$$\tau_r(x) = \min\{t : \xi_t < 0/\xi_0 = r,\ \beta_0 = x\}, \quad \gamma_r(x) = \xi_{\tau_r}(x),$$

$$\varphi_r(x, u, s) = M[u^{\gamma_1(x)} \exp(-s\tau_r(x)),\ \tau_r(x) < \infty], \quad |u| > 1, \quad s > 0, \\ r \geqslant 0, \quad x \geqslant 0.$$

Имеют место стохастические соотношения

$$\tau_r(x) = x + \tau_{\gamma + \pi(x) - \theta}\, \tau(0), \quad \tau_r(0) = 0, \quad r < 0;$$

$$\gamma_r(x) = \gamma_{r + \pi(x) - \theta}(0), \quad \gamma_r(0) = r, \quad r < 0, \tag{5}$$

где $\pi(x)$ — пуассоновский процесс с параметром a и $\pi(0) = 0$. Положим $\eta(x) = \theta - \pi(x)$. Тогда

$$P\{\eta(x) = k\} = a_k(x) = \begin{cases} \exp(-ax) \sum_{l=k}^{\infty} P_l (ax)^{l-k}/(l - k)!, & k \geqslant 0, \\ \exp(-ax) \sum_{l=0}^{\infty} P_l (ax)^{l-k}/(l - k)!, & k < 0, \end{cases}$$

и

$$Mz^{\eta(x)} = P(z) \exp(-ax(1 - z^{-1})).$$

Очевидно, $\tau_n(0)$ и $\gamma_n(0)$ соответственно стохастически эквивалентны τ_n и γ_n из (2). С учетом этого из (5) получаем

$$\varphi_r(x, u, s) = \exp(-sx) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x)\, \varphi_{r-n}(u, s), \quad r \geqslant 0. \tag{6}$$

Доопределим уравнение (6) для $r<0$ с учетом того, что $\varphi_r(x, u, s)=\varphi_r(u, s)= = u^r$, $r<0$, и перейдем в (6) к производящим функциям ($|\lambda|=1$)

$$\varphi(\lambda, x, u, s) = \exp(-sx)\{\Phi(\lambda, u, s)\, p(\lambda)\exp(-ax(1-1/\lambda)) + p(\lambda)\times$$
$$\times(u\lambda-1)^{-1}\exp(-ax(1-1/\lambda))\} + g_-(\lambda, x, u, s) + \exp(-xs)\times$$
$$\times(u\lambda-1)^{-1}, \quad |u|>1,$$

где

$$\varphi(\lambda, x, u, s) = \sum_{r=0}^{+\infty}\lambda^r\varphi_r(x, u, s),$$

$$g_-(\lambda, x, u, s) = \sum_{r=-\infty}^{-1}\lambda^r\left(u^r - \exp(-sx)\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(x)\varphi_{r-n}(u, s)\right).$$

Тогда

$$\varphi(\lambda, x, u, s) = \exp(-(s+a)x)P_+\{\Phi(\lambda, u, s)P(\lambda)\exp(ax\lambda^{-1})\} +$$
$$+\exp(-sx)P_+\{P(\lambda)(u\lambda-1)^{-1}\exp(-ax(1-\lambda^{-1}))\},$$

где оператор P_+ задается соотношением

$$P_+\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lambda^n a_n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n a_n.$$

Поскольку

$$P(\lambda)\exp(ax\lambda^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\sum_{i=n}^{\infty}P_i[(i-n)!(ax)^{n-i}]^{-1} + \sum_{n=-\infty}^{-1}\lambda^n\sum_{i=0}^{\infty}P_i\times$$
$$\times[(i-n)!(ax)^{n-i}]^{-1}, \quad (\lambda u-1)^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\lambda^n u^n,$$

то, полагая

$$b_n(x) = \sum_{i=\max n,0}^{\infty}P_i[(i-n)!(ax)^{n-i}]^{-1},$$

с использованием известного соотношения

$$P_+\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n c_n(\lambda-\lambda_0)^{-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^n-\lambda_0^n)c_n(\lambda-\lambda_0)^{-1}, \quad |\lambda_0|<1$$

приходим к формуле

$$P_+(P(\lambda)(u\lambda-1)^{-1}\exp(-ax(1-\lambda^{-1}))) = (b(\lambda, x) - b(u^{-1}, x))\times$$
$$\times(u\lambda-1)^{-1}\exp(-ax),$$

где

$$b(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n b_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\sum_{k=0}^{\infty}P_{n+k}(ax)^k/k!.$$

Аналогично с использованием (4) получаем

$$P_+\{\Phi(\lambda, u, s)P(\lambda)\exp(ax\lambda^{-1})\} = P_+\left\{\Phi(\lambda, u, s)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n b_n(x) + \right.$$
$$\left.+\Phi(\lambda, u, s)\sum_{n=-\infty}^{-1}\lambda^n b_n(x)\right\} = \Phi(\lambda, u, s)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n b_n(x) + [c(\lambda, s, x) -$$
$$-c(u^{-1}, s, x)]/[(u\lambda-1)\varphi_+(g(s), u^{-1})],$$

где

$$c(\lambda, s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n c_n(s, x), \quad c_n(s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_i^+(s)\, b_{n-i}(x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_i^+(s)\, \lambda^i = \varphi_+(g(s), \lambda).$$

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 2. *При* $|\lambda| \leqslant 1,\ |u| \geqslant 1,\ s > 0,\ x > 0$

$$\varphi(\lambda, x, u, s) = \exp(-(s + a)\, x)\{\Phi(\lambda, u, s)\, b(\lambda, x) + (b(\lambda, x) - b(u^{-1}, x)) \times$$
$$\times (\lambda u - 1)^{-1} + (c(\lambda, s, x) - c(u^{-1}, s, x))/(\lambda u - 1)\, \varphi_+(g(s), u^{-1})\}.$$

1. *Пирджанов Б.* Случайное блуждание со скачками в моменты, порожденные суперпозицией двух процессов восстановления.— Изв. АН ТуркмССР. Сер. физ.-техн., хим. и геолог. наук, 1983, № 3, с. 7—12.
2. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания.— М.: Наука, 1972.— 367 с.
3. *Гусак Д. В.* О пребывании под уровнем суммы независимых случайных величин.— Укр. мат. журн., 1982, **34**, № 3, с. 289—295.

Политехн. ин-т,
Ашхабад

Поступила в редакцию
15.04.83