УДК 519.21

И. К. Мацак

Условие Ферника и гауссовские процессы

1. Задача отыскания условий непрерывности и ограниченности гауссовского процесса достаточно известна [1—8]. В настоящей работе предпринята попытка усиления результата из [2].

Пусть $\xi(t)$ — сепарабельный непрерывный в среднем квадратическом гауссовский процесс, $t \in T$, T — компактное метрическое пространство,

$$M\xi(t) = 0, \quad \sigma_0 = \sup_{t \in T} \sigma_0(t, t) = \sup_{t \in T} M\xi^2(t), \quad \sigma^2(t, s) = M|\xi(t) - \xi(s)|^2,$$

$$\delta_n = \sup_{t \in T} \inf_{t_i \in A_n} \sigma(t, t_i), \quad A_n = \{t_i \in T,\ i = \overline{1, I_n}\}, \quad I_n = 2^{2^n};$$

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \lim_{n \to \infty} \delta_n = 0; \tag{1}$$

A — счетное всюду плотное множество в T. Определим $A_n(t)$ из условий

$$A_n(t) \in A_n, \ \sigma(t, A_n(t)) = \inf_{s \in A_n} \sigma(s, t). \tag{2}$$

В случае неоднозначности выбирается любая точка $t_i \in A_n$, удовлетворяющая (2), например с минимальным номером i.

Теорема. *Справедливы неравенства*

$$P\left(\sup_{t \in T} |\xi(t)| > z\sigma_0 + z \sup_{t \in T} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(n+1)/2} \sigma(A_n(t), A_{n+1}(t))\right) \leqslant$$

$$\leqslant 4 \int_z^{\infty} \exp(-u^2/2)\, du, \tag{3}$$

$$P\left(\sup_{\sigma(t,s)<\delta_n}|\xi(t)-\xi(s)|>2^{n+4)/2}\delta_n z+2z\sup_{t\in T}\sum_{m=n}^{\infty}2^{(m+1)/2}\sigma(A_m(t),A_{m+1}(t))\right)\leqslant$$
$$\leqslant\rho_n\int_z^{\infty}\exp(-u^2/2)\,du,\quad \rho_n=12\cdot 2^{n/2}\exp(-2^{n-1}). \tag{4}$$

Следствие. *Условие*

$$\sup_{t\in T}\sum_{n=1}^{\infty}2^{n/2}\sigma(t,A_n(t))<\infty \tag{5}$$

достаточно для ограниченности, а условие

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in T}\sum_{m=n}^{\infty}\sigma(t,A_m(t))\,2^{n/2}=0 \tag{6}$$

достаточно для непрерывности с вероятностью 1 *процесса* $\xi(t)$ *на* T.

2. Доказательство теоремы. Процесс $\xi(t)$ сепарабелен и непрерывен в среднем квадратичном. Следовательно,

$$\sup_{t\in T}|\xi(t)|=\sup_{t\in A}|\xi(t)|=\sup_{n\geqslant 1}\sup_{t\in A_n}|\xi(t)|\leqslant\sup_{n}\sup_{t\in A_n}\Bigg(|\xi(A_1(t))|+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}|\xi(A_k(t))-\xi(A_{k+1}(t))|\Bigg)\leqslant\sup_{t\in T}\left(|\xi(A_1(t))+\sum_{k=1}^{\infty}|\xi(A_k(t))-\xi(A_{k+1}(t))|\right). \tag{7}$$

Пусть
$$C_0=\{\sup_{t\in T}[|\xi(A_1(t))|-z\sigma_0(A_1(t),A_1(t))]>0\},$$
$$C_n=\{\sup_{t\in T}[|\xi(A_n(t))-\xi(A_{n+1}(t))|-2^{(n+1)/2}z\sigma(A_n(t),A_{n+1}(t))]>0\},\quad n\geqslant 1,$$
$$B=\left\{\sup_{t\in T}\left(|\xi(A_1(t))|+\sum_{k=1}^{\infty}|\xi(A_k(t))-\xi(A_{k+1}(t))|\right)>z\sup_{t\in T}\Bigg(\sigma_0(A_1(t),A_1(t))+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}2^{(k+1)/2}\sigma(A_k(t),A_{k+1}(t))\Bigg)\right\},\quad C=\bigcup_{n=0}^{\infty}C_n,\quad \varphi(u)=\exp(-u^2/2).$$

Имеем $B\subset C$. Так как справедливы оценки $P(C_0)\leqslant 4(2/\pi)^{1/2}\int_z^{\infty}\varphi(u)\,du$, $P(C_n)\leqslant(2/\pi)^{1/2}I_nI_{n+1}\int_{z\cdot 2^{(n+1)/2}}^{\infty}\varphi(u)\,du$, $4I_nI_{n+1}\leqslant I_{n+2}$, то

$$P(B)\leqslant(2/\pi)^{1/2}\left[4\int_z^{\infty}\varphi(u)\,du+(1/4)\sum_{n=1}^{\infty}I_{n+2}\int_{z\cdot 2^{(n+1)/2}}^{\infty}\varphi(u)\,du\right]. \tag{8}$$

При переходе от (8) к (3) использованы неравенство (7) и оценка

$$\sum_{n=2}^{\infty}I_{n+1}\int_{2^{n/2}z}^{\infty}\varphi(u)\,du\leqslant 0{,}4\int_z^{\infty}\varphi(u)\,du. \tag{9}$$

Неравенство (9) следует из оценок [6, с. 109]

$$I_{n+1}\int_{2^{n/2}z}^{\infty}\varphi(u)\,du\leqslant 2^{n/2+2}\exp(-(2^n-1)/2)\int_z^{\infty}\varphi(u)\,du,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^{n/2}\exp(-(2^n-1)/2)\leqslant 2{,}8.$$

Перейдем к доказательству неравенства (4). Аналогично неравенству (7) имеем

$$\sup_{\sigma(t,s)\leqslant\delta_n}|\xi(t)-\xi(s)|\leqslant\sup_{\sigma(t,s)\leqslant\delta_n}\Bigg(|\xi(A_n(t))-\xi(A_n(s))|+$$

$$+\sum_{m=n}^{\infty}|\xi(A_m(t))-\xi(A_{m+1}(t))|+\sum_{m=n}^{\infty}|\xi(A_m(s))-\xi(A_{m+1}(s))|\Bigg).$$

Заметим, что при $\sigma(t,s)\leqslant\delta_n$ выполняется неравенство $\sigma(A_n(t),A_n(s))\leqslant$ $\leqslant 3\delta_n$. Пусть $C_0=\{\sup\limits_{\sigma(t,s)\leqslant\delta_n}[|\xi(A_n(t))-\xi(A_n(s))|-2^{n/2}z\sigma(A_n(t),A(s))]>0\}$. Если применить оценки и рассуждения, использованные при доказательстве неравенства (3), то получим

$$P\left(\sup_{\sigma(t,s)<\delta_n}|\xi(t)-\xi(s)|\geqslant 32^{n/2}\delta_n z+2z\sup_{t\in T}\sum_{m=n}^{\infty}2^{(m+1)/2}\sigma(A_m(t),A_{m+1}(t))\leqslant\right.$$

$$\leqslant(2/\pi)^{1/2}\sum_{m=n}^{\infty}I_{m+1}\int\limits_{z2^{m/2}}^{\infty}\varphi(u)\,du\leqslant 4(2/\pi)^{1/2}\sum_{m=n}^{\infty}2^{m/2}\exp(-(2^m-1)/2)\int\limits_{z}^{\infty}\varphi(u)du.$$

Отсюда неравенство (4) следует из достаточно грубой оценки

$$\sum_{m=n}^{\infty}2^{m/2}\exp(-2^{m-1})\leqslant 2^{n/2+1}\exp(-2^{n-1}),\quad n\geqslant 1.$$

3. Примеры. Пусть $1=a_2>\ldots>a_n\downarrow 0$, $\varphi_n(t)$ непрерывны, $\operatorname{supp}\varphi_n\in$ $\in(a_{n+1},a_n)$, $\sup\limits_{t\in[0,1]}\varphi_n(t)=1$, $0\leqslant\varphi_n(t)\leqslant 1$, $c_n>0$, $c_n\downarrow 0$, $n\to\infty$, $\{\xi_n\}_2^{\infty}$ — последовательность независимых гауссовских случайных величин, $M\xi_n=0$, $M\xi_n^2=1$,

$$X(t)=\sum_{n=2}^{\infty}\xi_n\varphi_n(t)/(\log n)^{1/2}\quad(\log\equiv\log_2),$$

$$Y(t)=\sum_{n=2}^{\infty}\xi_n c_n\varphi_n(t)/(\log n)^{1/2},\quad t\in[0,1],\quad X(0)=Y(0)=0.$$

Такого рода примеры известны [4]. Процесс $X(t)$ ограничен на $[0,1]$ и разрывен в точке $t=0$, процесс $Y(t)$ непрерывен с вероятностью 1. Разбиения A_n отрезка $[0,1]$ строятся следующим образом:

$$A_n=\bigcup_{k=1}^{K_n}A_n^k,\quad K_n=2^{2^n-n},\quad A_n^k=\{t_j\in[a_{k+1},a_k]:\varphi_k(t_j)=$$

$$=j/(\log^{1/2}k)\,2^n,\quad j=\overline{0,2^n-1}\}.$$

Проверим выполнение условия (5) для процесса $X(t)$. Пусть $t\in[a_{k+1},a_k]$, $I_{m+1}>k\geqslant I_m$. Ясно, что $\sigma_x(t,A_n(t))\leqslant(\log k)^{-1/2}$, если $K_n<k$, $\sigma_x(t,$ $A_n(t))<2^{-n}$, если $K_n\geqslant k$. Следовательно,

$$\sum_{K_n<k}2^{n/2}\sigma_x(t,A_n(t))\leqslant 2^{-m/2}\sum_{K_n<k}2^{m/2}\leqslant 3(2^{1/2}+1),$$

$$\sum_{K_n\geqslant k}2^{n/2}\sigma_x(t,A_n(t))\leqslant\sum_{n>m+2}2^{-n/2}\leqslant(2^{1/2}+1)\,2^{-(m/2+1)},$$

$$\sup_t \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n/2}\sigma_x(t, A_n(t)) \leqslant 4(2^{1/2}+1),$$

т. е. условие (5) выполнено.

Рассмотрим процесс $Y(t)$. При фиксированном N, $t \in [a_{k+1}, a_k]$, $I_{m+1} > k \geqslant I_m$ имеем

$$\sum_{K_n < k, N < n} 2^{n/2}\sigma_y(t, A_n(t)) \leqslant c_k 2^{-m/2} \sum_{m+2 \geqslant n > N} 2^{n/2} \leqslant 3c_k(2^{1/2}+1), \quad k > I_{N-2}, \tag{10}$$

$$\sum_{K_n \geqslant k, N < n} 2^{n/2}\sigma_y(t, A_n(t)) \leqslant c_k (\log k)^{-1/2} \sum_{n > N} 2^{-n/2} \leqslant 2^{-N/2}(2^{1/2}+1). \tag{11}$$

Из (10), (11) следует выполнение условия (6). Для процесса $X(t)$ условия Дадли [5] и Ферника [2] не выполняются. Они не выполняются и для процесса $Y(t)$ при достаточно медленном убывании последовательности $\{c_n\}$.

З а м е ч а н и е. Для справедливости следствия равенство $I_n = 2^{2^n}$ не обязательно. На I_n достаточно накладывать условие $\exists x$, $\sum_n I_n^{-x} < \infty$. Соответствующие суммы тогда будут иметь вид

$$\sum_n (\log I_n)^{1/2} \sigma(t, A_n(t)).$$

1. *Belyaev Yu. K.* Continuity and Holder conditions for sample functions of stationary Gaussian processes.— Proc. Fourth. Berkeley Symp. Math. Statist. Probab., Univ. of California Press., 1961, **2**, p. 23—33.
2. *Fernique X.* Continuite de processus gaussiens.— C. R. Acad. Sci. Paris, 1964, **258**, p. 6058—6060.
3. *Marcus M. B., Shepp L. A.* Continuity of Gaussian processes.— Trans. Amer. Math. Soc., 1970. **151**, № 2, p. 377—392.
4. *Garsia A., Rodemich E., Rumsey H.* A real variable lemma and the continuity of paths of some Gaussian processes.— Indiana Univ. Math. J., 1970, **20**, № 6, p. 565—578.
5. *Дадли Р. М.* Выборочные функции гауссовского процесса.— В кн.: Случайные процессы.— М.: Мир, 1978, с. 7—62.
6. *Ферник. К.* Регулярность траекторий гауссовских случайных функций.—В кн.: Случайные процессы.— М. : Мир, 1978, с. 63—132.
7. *Судаков В. Н.* Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений.— Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова.— Л.: Наука, 1976, **141**.— 191 с.
8. *Питербарг В. И.* Некоторые направления в исследовании свойств траекторий гауссовских случайных функций.— В кн.:-Случайные процессы.— М.: Мир, 1978, с. 258—280.

Укр. фил. ЦНИИКИВР, Киев

Поступила в редакцию 08.08.82
после доработки — 15.03.83