УДК 517.938

В. Л. Кулик

О связи квадратичных форм и функции Грина линейного расширения динамических систем на торе

Исследования условий сохранения инвариантных торов при малых возмущениях в динамических системах [1] приводят к задачам о грубости линеаризованной в окрестности тора системы уравнений, обычно называемую [2, 3] линейным расширением динамической системы на торе.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = A(\varphi)x, \tag{1}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\dot{x} = dx/dt$, a, A — соответственно векторная и матричная функции, периодические по φ_j, $j = \overline{1, m}$, с периодом 2π, непрерывно дифференцируемые до порядка r включительно $(r \geqslant 1)$.

Будем использовать обозначения:

1. $C^r(\mathcal{T}_m)$ — пространство функций $F(\varphi)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ (матричных, векторных или скалярных), периодических по φ_j, $j = \overline{1, m}$, с периодом 2π, т. е. заданных на m-мерном торе $\mathcal{T}_m$, непрерывно дифференцируемых до порядка $r \geqslant 1$ включительно, $C^0(\mathcal{T}_m)$ — пространство непрерывных функций, заданных на $\mathcal{T}_m$.

2. $\varphi_t(\varphi)$ — решение системы уравнений $\dot{\varphi} = a(\varphi)$, подчиненное начальному условию $\varphi_t(\varphi)|_{t=0} = \varphi$.

3. $C'(\mathcal{T}_m)$ — подпространство из $C^0(\mathcal{T}_m)$ таких функций $F(\varphi)$, что функция $F(\varphi_t(\varphi))$ непрерывно дифференцируема по t при всех $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

4. R^n — n-мерное эвклидово пространство, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ — обычное скалярное произведение в R^n, $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$, $\|A(\varphi)\| = \max_{\|x\|=1} \|A(\varphi)x\|$.

5. $\Omega_\tau^t(\varphi)$ — матрицант линейной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(\varphi_t(\varphi))x, \tag{2}$$

$\Omega_\tau^\tau(\varphi) = I_n$ — n-мерная единичная матрица.

6. A^T — транспонированная матрица к A.

Определение 1. *Если существует матричная функция* $C(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ *такая, что для функции*

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)\, C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau < 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi)\,(C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n), & \tau > 0 \end{cases} \tag{3}$$

имеет место оценка

$$\|G_0(\tau, \varphi)\| \leqslant K \exp\{-\gamma|\tau|\},\ K,\ \gamma - \mathrm{const} > 0, \tag{4}$$

то функцию (3) *называют функцией Грина задачи об инвариантных торах для системы уравнений* (1) *(или просто — функцией Грина).*

Теорема 1. *Пусть для системы уравнений* (1) *существует функция Грина* $G_0(\tau, \varphi)$, *тогда существует симметричная матричная функция* $S(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$, *удовлетворяющая условию*

$$\left\langle \left[\sum_{i=1}^{m} a_i(\varphi)\, \partial S(\varphi)/\partial\varphi_i - S(\varphi)A^T(\varphi) - A(\varphi)S(\varphi)\right] x, x\right\rangle \leqslant -\|x\|^2 \tag{5}$$

при всех $x \in R^n$.

Теорема 2. *Пусть существует симметричная матричная функция* $S(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$, *удовлетворяющая условию* (5), *тогда для системы уравнений* (1) *существует функция Грина* $G_0(\tau, \varphi)$ *с матричной функцией* $C(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m)$. *При этом, если выполняется неравенство*

$$\gamma - r\alpha_0 > 0, \tag{6}$$

где положительные постоянные γ, α_0 *определены соотношениями* $\gamma \leqslant \max_{\lambda \geqslant \|S\|_0^2} (\lambda + s_0^- + s_0^+)^{-1}(\lambda + 1 - ((\lambda-1)^2 + 4\|S\|_0^2)^{1/2})$, $\|S\|_0 = \max_{\varphi\in\mathcal{T}_m} \|S(\varphi)\|$, $\langle \pm S(\varphi)x, x\rangle \leqslant s_0^{\pm}\|x\|^2$, $\langle(\partial a(\varphi)/\partial\varphi)\eta, \eta\rangle \leqslant \alpha_0\|\eta\|^2$, *то* $C(\varphi) \in C^r(\mathcal{T}_m)$.

Замечание 1. В приведенной теореме 2 определитель матрицы $S(\varphi)$ может превращаться в нуль в некоторых точках $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$. Если же дополнительно потребовать, чтобы $\det S(\varphi) \neq 0$ при всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$, то (см. [3—5]) функция Грина $G_0(\tau, \varphi)$ будет единственной с матрицей $C(\varphi)$, удовлетворяющей тождествам

$$C^2(\varphi) \equiv C(\varphi) \equiv \Omega_t^0(\varphi)\, C(\varphi_t(\varphi))\, \Omega_0^t(\varphi).$$

Доказательство теоремы 1. Заметим, что условие (5) означает отрицательную определенность производной квадратичной формы $\langle S(\varphi_t(\varphi))x, x\rangle$, взятой вдоль решений системы линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -A^T(\varphi_t(\varphi))x. \tag{7}$$

Рассмотрим функции

$$S_1(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0} [\Omega_\tau^0(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi))] [\Omega_\tau^0(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi))]^T d\tau,$$

$$S_2(\varphi) = \int\limits_{0}^{\infty} [\Omega_\tau^0(\varphi)(C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n)] [\Omega_\tau^0(\varphi)(C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n)]^T d\tau \tag{8}$$

и покажем, что $S_i(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m)$. Для разности $S_1(\varphi) - S_1(\bar{\varphi})$ получаем

$$\| S_1(\varphi) - S_1(\bar{\varphi}) \| = \left\| \int\limits_{-\infty}^{0} R(\tau, \varphi, \bar{\varphi})\, d\tau \right\| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{0} \| R(\tau, \varphi, \bar{\varphi} \|\, d\tau. \tag{9}$$

С одной стороны, имеем оценку $\| R(\tau, \varphi, \bar{\varphi}) \| \leqslant 2K \exp\{\gamma\tau\}$, $\tau < 0$, а с другой, получаем $\| R(\tau, \varphi, \bar{\varphi}) \| \leqslant 2 \| \Omega_\tau^0(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi)) \| (\| \Omega_\tau^0(\varphi) - \Omega_\tau^0(\bar{\varphi}) \| \| C(\varphi_\tau \times \times (\varphi)) \| + \| C(\varphi_\tau(\varphi)) - C(\varphi_\tau(\bar{\varphi})) \| \| \Omega_\tau^0(\varphi) \| \leqslant M \exp\{-N\tau\} \mu(\| \varphi - \bar{\varphi} \|)$, $\tau < < 0$, где $\mu(u)$ — модуль непрерывности матричной функции $C(\varphi) : \mu(u) = = \sup\limits_{\|\varphi - \bar{\varphi}\| \leqslant u} \| C(\varphi) - C(\bar{\varphi}) \|$, N, M — некоторые положительные постоянные, не зависящие от φ, $\bar{\varphi}$ и τ. Таким образом, обе эти оценки для $\| R(\tau, \varphi, \bar{\varphi}) \|$ приводят к оценке

$$\| R(\tau, \varphi, \bar{\varphi}) \| \leqslant (2K)^{\sigma/(\sigma+1)} M^{1/(\sigma+1)} \exp\{\tau(\gamma\sigma - N)/(\sigma + 1)\} \mu^{1/(\sigma+1)}(\| \varphi - \bar{\varphi} \|) \tag{10}$$

при любом $\sigma > 0$, $\tau < 0$.

Выбирая σ фиксированным, больше $N\gamma^{-1}$, мы обеспечиваем сходимость интеграла в правой части (9) и получаем $\| S_1(\varphi) - S_1(\bar{\varphi}) \| \leqslant M_1 \mu^{1/(\sigma+1)}(\|\varphi - - \bar{\varphi}\|)$, что говорит о принадлежности функции $S_1(\varphi)$ пространству $C^0(\mathcal{T}_m)$. Аналогично получаем, что $S_2(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функции $S_i(\varphi_t(\varphi))$, $i = 1, 2$, непрерывно дифференцируемы по t при всех $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$ и выполняется условие

$$2 \langle [\dot{S}_2 - \dot{S}_1 - (S_2 - S_1) A^T - A(S_2 - S_1)] x, x \rangle \leqslant - \| x \|^2 \tag{11}$$

при всех $x \in R^n$. Поскольку функции $S_i(\varphi)$ можно аппроксимировать функциями из $C^1(\mathcal{T}_m)$ таким образом, чтобы одновременно аппроксимировались и производные $\dot{S}_i(\varphi_t(\varphi))$, из (11) можно получить (5), что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим вспомо..тельную систему уравнений

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = A(\varphi) x, \quad \dot{y} = -x - A^T(\varphi) y, \tag{12}$$

в которой $x, y \in R^n$, и покажем, что производная квадратичной формы

$$V(\varphi, x, y) = \lambda \langle x, y \rangle + \langle S(\varphi) y, y \rangle \tag{13}$$

вдоль решений системы уравнений (12) при достаточно большом значении параметра $\lambda > 0$ является отрицательно определенной:

$$\dot{V} = \lambda \langle Ax, y \rangle + \lambda \langle x, -x - A^T y \rangle + \langle \dot{S} y, y \rangle + \langle S(-x - A^T y), y \rangle + \\ + \langle Sy, -x - A^T y \rangle \leqslant -\lambda \| x \|^2 - 2 \langle Sx, y \rangle - \| y \|^2 \leqslant -\lambda \| x \|^2 + \\ + \sigma^2 \| S \|_0^2 \| x \|^2 + \sigma^{-2} \| y \|^2 - \| y \|^2 = -(\lambda - \sigma^2 \| S \|_0^2) \| x \|^2 - (1 - \sigma^{-2}) \| y \|^2.$$

Отсюда видно, что при $\lambda > \| S \|_0^2$ всегда можно подобрать параметр $\sigma > 1$

таким образом, чтобы

$$\dot{V}(\varphi, x, y) \leqslant -\beta(\|x\|^2 + \|y\|^2), \ \beta > 0. \tag{14}$$

Нетрудно подсчитать, что выбор параметра $\sigma > 1$ в виде

$$\sigma = (\lambda - 1 + ((\lambda - 1)^2 + 4\|S\|_0^2)^{1/2})^{1/2}\, 2^{-1/2}\, \|S\|_0^{-1} \tag{15}$$

позволяет достичь наибольшего возможного значения β в (14):

$$\beta = (\lambda + 1 - ((\lambda - 1)^2 + 4\|S\|_0^2)^{1/2})/2. \tag{16}$$

Поскольку квадратичная форма (13) невырожденна при всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$, то для системы (12) существует единственная функция Грина $\overline{G}_0(\tau, \varphi)$ (см. [3, 5])

$$\overline{G}_0(\tau, \varphi) =$$

$$= \begin{cases} \begin{bmatrix} \Omega_\tau^0(\varphi) & 0 \\ -\int\limits_\tau^0 (\Omega_0^{t_1})^T \Omega_\tau^{t_1} dt_1 & (\Omega_0^\tau(\varphi))^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}(\varphi_\tau(\varphi)) & C_{12}(\varphi_\tau(\varphi)) \\ C_{21}(\varphi_\tau(\varphi)) & C_{22}(\varphi_\tau(\varphi)) \end{bmatrix}, & \tau < 0, \\ \begin{bmatrix} \Omega_\tau^0(\varphi) & 0 \\ -\int\limits_\tau^0 (\Omega_0^{t_1})^T \Omega_\tau^{t_1} dt_1 & (\Omega_0^\tau(\varphi))^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n & C_{12}(\varphi_\tau(\varphi)) \\ C_{21}(\varphi_\tau(\varphi)) & C_{22}(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n \end{bmatrix}, & \tau > 0, \end{cases}$$

удовлетворяющая оценке $\|\overline{G}_0(\tau, \varphi)\| \leqslant K \exp\{-\gamma|\tau|\}$, K, γ — const > 0. Отсюда следует, что и блок этой матричной функции в верхнем левом углу

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)\, C_{11}(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau < 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi)\,(C_{11}(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n), & \tau > 0 \end{cases}$$

также удовлетворяет аналогичной оценке $\|G_0(\tau, \varphi)\| \leqslant K \exp\{-\gamma|\tau|\}$. Из этого следует существование функции Грина для системы уравнений (1). Поскольку матричные функции $C_{ij}(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ и имеет место тождество

$$\begin{bmatrix} \Omega_\tau^0(\varphi) & 0 \\ -\int\limits_\tau^0 (\Omega_0^{t_1})^T \Omega_\tau^{t_1} dt_1, & (\Omega_0^\tau(\varphi))^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}(\varphi_\tau(\varphi)) & C_{12}(\varphi_\tau(\varphi)) \\ C_{21}(\varphi_\tau(\varphi)) & C_{22}(\varphi_\tau(\varphi)) \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} C_{11}(\varphi) & C_{12}(\varphi) \\ C_{21}(\varphi) & C_{22}(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_\tau^0(\varphi) & 0 \\ -\int\limits_\tau^0 (\Omega_0^{t_1})^T \Omega_\tau^{t_1} dt_1 & (\Omega_0^\tau(\varphi))^T \end{bmatrix}$$

при всех $\tau \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, то $C_{11}(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m)$.

Вспомним (см. [4]), что если имеется единственная функция Грина $G_0(\tau, \varphi)$, например для системы уравнений (1), подчиненная оценке $\|G_0(\tau, \varphi)\| \leqslant K \exp\{-\gamma|\tau|\}$, то неравенство $r\alpha_0 < \gamma$ обеспечивает непрерывную дифференцируемость функции $G_0(\tau, \varphi)$, $\tau \neq 0$, по φ до порядка r включительно. Отсюда следует, что соответствующая матрица проектирования $C(\varphi)$ будет принадлежать пространству $C^r(\mathcal{T}_m)$. Учитывая оценку (14) и равенства (15), (16), несложно убедиться в том, что неравенство (6) обеспечивает включение $C_{11}(\varphi) \in C^r(\mathcal{T}_m)$.

З а м е ч а н и е 2. В определении функции Грина $G_0(\tau, \varphi)$ можно вместо условия 4 требовать выполнения более слабого условия $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau, \varphi)\| \times$ $\times\, d\tau \leqslant K = \text{const} < \infty$. При этом неясно, будут ли справедливы теоремы

1, 2? Очевидно, выполнение условия $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \| G_0(\tau, \varphi) \|^2 d\tau \leqslant K = \mathrm{const} < \infty$ обеспечивает равномерную сходимость интегралов в правых частях (8), следовательно, существует новая функция Грина $G_0(\tau, \varphi)$, для которой будет выполняться оценка (4).

Замечание 3. Все изложенное здесь справедливо и для линейных расширений динамических систем на других компактных многообразиях, отличных от тора.

1. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, **34**, с. 1219—1240.
2. *Бронштейн И. У.* Расширения минимальных групп преобразований.— Кишинев: Штиинца, 1975.— 310 с.
3. *Самойленко А. М.* Функция Грина линейного расширения динамической системы на торе, условия ее единственности и свойства, вытекающие из этих условий.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 6, с. 792—797.
4. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* О непрерывности функции Грина задачи об инвариантном торе.— Укр. мат. журн., 1978, **30**, № 6, с. 779—788.
5. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Экспоненциальная дихотомия инвариантного тора динамических систем.— Дифференц. уравнения, 1979, **15**, № 8, с. 1434—1443.
6. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
7. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— К.: Наук. думка, 1969.— 244 с.
8. *Перов А. И., Трубников Ю. В.* Монотонные дифференциальные уравнения. IV.— Дифференц. уравнения, 1978, **14**, № 7, с. 1192—1202.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Поступила в редакцию 04.12.81