УДК 511.37:517:518.454

Б. Д. Котляр

Об одном классе плотностей множеств натуральных чисел

1. Хорошо известны [1] некоторые псевдомеры (конечно-аддитивные функции) множеств натуральных чисел — асимптотическая и логарифмическая плотности; применяются и (счетно-аддитивные) меры множеств $\mathfrak{N} \subset \mathbb{N}$ [1, гл. III]. Возникает вопрос: нельзя ли «заполнить промежуток» между упомянутыми плотностями? Это позволило бы получать усиления и обобщения некоторых известных утверждений.

Напомним [1], что асимптотической плотностью mes $\mathfrak{N}$ множества $\mathfrak{N} \subset \mathbb{N}$ называется предел (если он существует)

$$\operatorname{mes}\mathfrak{N} = \lim_{N\to+\infty} (1/N) \sum_{\substack{n\in\mathfrak{N}\\ n\leqslant N}} 1. \tag{1}$$

Интеграл по этой функции множества от функции g натурального аргумента определяется естественным образом:

$$M(g) = \lim_{N\to+\infty} (1/N) \sum_{n=1}^{N} g(n), \tag{2}$$

если этот предел существует.

Отметим еще определение логарифмической плотности $\operatorname{mes}_* \mathfrak{N}$ как предела (если он существует)

$$\operatorname{mes}_* \mathfrak{N} = \lim_{N\to+\infty} (1/\ln N) \sum_{\substack{n\leqslant N\\ n\in\mathfrak{N}}} 1/n. \tag{3}$$

Интеграл $M_*(f)$ от функции f натурального аргумента определяется по формуле

$$M_*(f) = \lim_{N\to+\infty} (1/\ln N) \sum_{n=1}^{N} g(n)/n. \tag{4}$$

Введем семейство плотностей, построенных на общих чезаровских методах суммирования, равенством

$$\operatorname{mes}^{\sigma}\mathfrak{N} = \lim_{N\to+\infty} (A_N^{\sigma})^{-1} \sum_{\substack{n\leqslant N\\ n\in\mathfrak{N}}} A_{N-n}^{\sigma-1}, \tag{5}$$

если предел справа существует; здесь A_k^{σ} определяются из тождества [2, гл. III] $\sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\sigma} x^k \equiv (1-x)^{-\sigma-1}$.

При $\sigma = 1$ определение (5) превращается в (1). Конечно, следуя (5), можно определить соответствующий интеграл (среднее) $M^{\sigma}(g)$ функции g

натурального аргумента

$$M^{\sigma}(g)=\lim_{N\to+\infty}(A_N^{\sigma})^{-1}\sum_{n=0}^{N}A_{N-n}^{\sigma-1}g(n), \tag{6}$$

если предел справа существует; это среднее — обычный предел по Чезаро последовательности $g(n)$, которая в этом случае называется суммируемой методом (C, σ). Приведем два примера, оправдывающие рассмотрение чезаровских плотностей для множеств натуральных чисел и применение при изучении теоретико-числовых вопросов общих чезаровских методов суммирования.

2. Согласно известной теореме из [1], если g и h — функции натурального аргумента и

$$f(n)=\sum_{d/n}h(d)\,g(n/d), \tag{7}$$

существует интеграл $M(g)$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|h(n)|/n$ сходится, то существует $M(f)$, причем

$$M(f)=M(g)\sum_{n=1}^{\infty}h(n)/n. \tag{8}$$

Частным случаем этого утверждения является теорема Винтнера [3] (см. также [1]), которая получается из него при $g(n)\equiv 1$.

Теорема 1. *Пусть g и h — функции натурального аргумента и $f(n)=\sum_{d/n}h(d)\,g(n/d)$.*

Если существует интеграл $M^{\sigma}(g)$, $0<\sigma\leqslant 1$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty}|h(n)|/n<+\infty, \tag{9}$$

то существует $M^{\sigma}(f)$, причем

$$M^{\sigma}(f)=M^{\sigma}(g)\sum_{n=1}^{\infty}h(n)/n. \tag{10}$$

При $\sigma=1$ из (10) получаем (8). Отметим что так как последовательность $g(n)\equiv 1$ суммируема любым методом (C, σ), то получается следующее усиление теоремы Винтнера.

Следствие 1. *Пусть h — функция натурального аргумента, выполнено (9) и $f(n)=\sum_{d/n}h(d)$.*

Тогда для любого $\sigma\in(0, 1]$ существует интеграл $M^{\sigma}(f)$, причем $M^{\sigma}(f)=\sum_{n=1}^{\infty}h(n)/n$.

Так, для функции $t(n)=\sum_{d/n}1/2^{d}$ получаем, что при $\sigma\in(0, 1]$ $M^{\sigma}(t)=\ln 2$ (из теоремы Винтнера соответствующее равенство получается лишь при $\sigma=1$ [1]).

Отметим еще одно утверждение такого же типа.

Теорема 2. *Пусть g и h — функции натурального аргумента, f задана формулой* (7).

Если существует $M_*(g)$, сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty}|h(n)|/n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}h(n)\ln n/n$, то существует $M_*(f)$, причем

$$M_*(f)=M_*(g)\sum_{n=1}^{\infty}h(n)/n. \tag{11}$$

3. В [4] утверждается (доказательство см. в [5]), что если $f \in \widetilde{\Lambda}^{(k,\alpha)}$ — классу периодических функций, k-я производная которых удовлетворяет условию Гельдера порядка α, $0 < \alpha \leqslant 1$, c_n — коэффициенты Фурье функции f по тригонометрической системе, $c > 0$,

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(f; c) = \{n \in \mathbb{N} / |c_{|n|}| \geqslant c/n^{k+\alpha}\},$$

то $\mathrm{mes}_* \mathfrak{M} = 0$.

Из этого результата следует, что максимальный порядок убывания коэффициентов Фурье может достигаться лишь на весьма бедном множестве номеров.

Теорема 3. *Пусть* $f \in \widetilde{\Lambda}^{k,\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, c_n — *коэффициенты Фурье функции* f *по тригонометрической системе* $\{e^{int}\}$, $c > 0$, $\beta \in (0, k + \alpha + 1/2)$ *и*

$$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}(f; c, \beta) = \{n \in \mathbb{N} / |c_n| \geqslant c/n^{\beta} \vee |c_{-n}| \geqslant c/n^{\beta}\}.$$

Тогда $\mathrm{mes}^{\sigma} \mathfrak{M} = 0$, *если* $\sigma \in (\beta (k + \alpha + 1/2)^{-1}; 1]$.

Отсюда, конечно, вытекает приведенный результат из [4]; однако теорема 3 устанавливает границу, до которой утверждения такого типа остаются справедливыми.

4. Приведем доказательства полученных утверждений.

Доказательство теоремы 1. Для удобства доопределим функцию g, положив $g(0) = 0$ (тогда и $f(0) = 0$). Пусть

$$\sigma_n^{\alpha}(f) = (A_n^{\alpha})^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} f(\nu); \tag{12}$$

тогда $M^{\alpha}(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sigma_n^{\alpha}(f)$. Имеем

$$A_n^{\alpha} \sigma_n^{\alpha}(f) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} f(\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} \sum_{d/\nu} h(d)\, g(\nu/d) = \sum_{d=1}^{n} h(d) \sum_{m \leqslant n/d} A_{n-md}^{\alpha-1} g(m) =$$

$$= A_n^{\alpha} \sum_{d=1}^{n} h(d)\, (A_{[n/d]}^{\alpha})^{-1} \sum_{m=1}^{[n/d]} A_{[n/d]-m}^{\alpha-1} g(m)\, \psi(n, m, d), \tag{13}$$

где

$$\psi(n, m, d) = A_{n-md}^{\alpha-1} A_{[n/d]}^{\alpha} / (A_{[n/d]-m}^{\alpha-1} A_n^{\alpha}). \tag{14}$$

Наша задача — выделить главный член в правой части равенства (13). Учитывая, что для $\alpha > -1$ [2]

$$A_k^{\alpha} = (k^{\alpha}/\Gamma(\alpha + 1))(1 + O(1/k)) \tag{15}$$

при $k \to +\infty$, $\gamma^{\beta} - [\gamma]^{\beta} = O(\gamma^{\beta-1})$ при $\gamma \to +\infty$, получаем

$$A_{[\gamma]}^{\beta} = ([\gamma]^{\beta}/\Gamma(\beta + 1))(1 + O(1/[\gamma])) = ((\gamma^{\beta} + O(\gamma^{\beta-1}))/\Gamma(\beta + 1))(1 + O(1/\gamma)) =$$

$$= (\gamma^{\beta}/\Gamma(\beta + 1))(1 + O(1/\gamma))^2 = (\gamma^{\beta}/\Gamma(\beta + 1))(1 + O(1/\gamma)). \tag{16}$$

Из (14) — (16) находим

$$\psi(n, m, d) = (n - md)^{\alpha-1} (n/d)^{\alpha} / ((n/d - m)^{\alpha-1} n^{\alpha})(1 + O(1/(n/d - m)) +$$

$$+ O(1/n/d)) = (1/d)(1 + O(1/(n/d - m)) + O(1/n/d)). \tag{17}$$

Из (13) и (17) имеем

$$\sigma_n^{\alpha}(f) = (A_n^{\alpha})^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} f(\nu) = \sum_{d=1}^{n} (h(d)/d)(A_{[n/d]}^{\alpha})^{-1} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{[n/d]} A_{[n/d]-m}^{\alpha-1} g(m) + \sum_{d=1}^{n} (h(d)/d)(A_{[n/d]}^{\alpha})^{-1} \sum_{m=1}^{[n/d]} A_{[n/d]-m}^{\alpha-1} g(m)\, O(d/n) +$$

$$+\sum_{d=1}^{n}(h(d)/d)(A^{\alpha}_{[n/d]})^{-1}\sum_{m=1}^{[n/d]}A^{\alpha-1}_{[n/d]-m}g(m)\,O(1/(n/d-m))\equiv I_1+I_2+I_3, \quad (18)$$

где через I_r обозначено r-е слагаемое.

Рассмотрим каждое из слагаемых I_r. Обозначив $[n/d]=k$, учитывая существование $M^{\alpha}(g)$, получим

$$\sigma_k(g)=(A^{\alpha}_k)^{-1}\sum_{m=-}^{k}A^{\alpha-1}_{k-m}g(m)=M^{\alpha}(g)+\eta_0(k), \quad (19)$$

при этом $\eta_0(k)=o(1)$, когда $k\to+\infty$. Тогда, положив $\eta(s)=\eta_0([s])$, получим

$$I_1=M^{\alpha}(g)\sum_{d=1}^{n}h(d)/d+\sum_{d=1}^{n}(h(d)/d)\,\eta(n/d); \quad (20)$$

как показано в [1, гл. III, § 3.2], второе слагаемое в правой части (20) стремится к 0, когда $n\to+\infty$, т. е.

$$I_1=M^{\alpha}(g)\sum_{d=1}^{n}h(d)/d+o(1). \quad (21)$$

Оценим второе слагаемое в правой части (18). Функция

$$\eta_1(n/d)=O(d/n)(A^{\alpha}_{[n/d]})^{-1}\sum_{m=1}^{[n/d]}A^{\alpha-1}_{[n/d]-m}g(m)$$

в силу (19) стремится к 0, если $n/d\to+\infty$. Следовательно, как и при оценке второго слагаемого в правой части (20), получим

$$I_2=\sum_{d=1}^{n}(h(d)/d)\,\eta_1(n/d)=o(1). \quad (22)$$

Перейдем к оценке третьего слагаемого в правой части (18) (в случае $\alpha=1$ оно отсутствует и доказательство совпадает с доказательством из [1, § 3.2]). Так как из (C,α)-суммируемости при $\alpha<1$ вытекает $(C,1)$-суммируемость и для нее имеем [6, § 3.8], $g(n)=o(n)$, то из [2, гл. I, теорема 8.2] находим $\sum_{m=1}^{k}|g(m)|=o(k^2)$. Отсюда, учитывая

$$(A^{\alpha}_k)^{-1}\sum_{m=1}^{k}A^{\alpha-1}_{k-m}g(m)+O(1/(k-m))=O(1)\,\Gamma(\alpha+1)/k^{\alpha}\sum_{m=1}^{k}((k-m)^{\alpha-1}/$$

$$/(\Gamma(\alpha)(k-m)))\,|g(m)|=O(1)\,k^{-\alpha}k^{\alpha-2}\sum_{m=1}^{k}|g(m)|=o(1),$$

получаем

$$I_3=\sum_{d=1}^{n}(h(d)/d)\,\eta_2(n/d)=o(1). \quad (23)$$

Используя (18) и (21) — (23), получаем утверждение теоремы

Доказательство теоремы 2. Пусть

$$(1/\ln s)\sum_{m=1}^{s}(g(m)/m)=M_*(g)+\eta_3(s). \quad (24)$$

Тогда

$$(1/\ln x)\sum_{n\leqslant x}(f(n)/n)=(1/\ln x)\sum_{n\leqslant x}\sum_{d/n}(1/n)\,h(d)\,g(n/d)=(1/\ln x)\sum_{n\leqslant x}h(d)\times$$

$$\times\sum_{m\leqslant x/d}g(m)/(md)=(1/\ln x)\sum_{d\leqslant x}(h(d)/d)\sum(g(m)/m)=$$

$$= (1/\ln x) \sum_{d\leqslant x} (h(d)/d)(M_*(g)\ln(x/d) + \eta_3(x/d)\ln(x/d)) =$$

$$= M_*(g) \sum_{d\leqslant x} h(d)/d - (1/\ln x)\sum_{d\leqslant x} h(d)\ln d/d +$$

$$+ \sum_{d\leqslant x} (h(d)/d)\,\eta_3(x/d)(1 - \ln d/\ln x). \qquad (25)$$

Учитывая, что $\eta_3(y) = o(y)$ при $y \to +\infty$ и $1 - \ln d/\ln x = O(1)$ при $d \leqslant x$, $x \to +\infty$, вновь применяем уже неоднократно использованный результат из [1] (при проверке его справедливости используется сходимость ряда $\Sigma\,|h(n)|/n$). В силу сходимости ряда $\Sigma h(n)\ln n/n$ после перехода к пределу при $x \to +\infty$ получаем (11).

Доказательство теоремы 3. Учитывая (15), определение множества $\mathfrak{M}$, вводя обозначения $\varepsilon = \sigma - \beta(k + \alpha + 1/2)^{-1}$ и $p = (k + \alpha + 1/2)^{-1} + \varepsilon/\beta$, для допредельного выражения в (5) получаем

$$(A_N^\sigma)^{-1} \sum_{\substack{k\in\mathfrak{M}\\ k\leqslant N}} A_{N-k}^{\sigma-1} \leqslant (B(\sigma)/N^\sigma) \sum_{\substack{k\in\mathfrak{M}\\ k\leqslant N}} (N-k)^{\sigma-1} = (B(\sigma)/N^\sigma) \sum_{\substack{k\in\mathfrak{M}\\ k\leqslant N}} ((N -$$

$$- k)\,k)^{\sigma-1}/k^{\sigma-1} \leqslant (B(\sigma)\,N^{2(\sigma-1)}/N^\sigma) \sum_{\substack{k\in\mathfrak{M}\\ k\leqslant N}} 1/k^{\sigma-1} = B(\sigma)\,N^{\sigma-2} \times$$

$$\times \sum_{\substack{k\in\mathfrak{M}\\ k\leqslant N}} k/k^{\beta\left(k+\alpha+\frac{1}{2}\right)^{-1}+\varepsilon} = B(\sigma)\,N^{\sigma-2} \sum_{\substack{k\in\mathfrak{M}\\ k\leqslant N}} k\,(1/k^\beta)^p \leqslant$$

$$\leqslant B(\sigma)\,N^{\sigma-2} \sum_{\substack{k\in\mathfrak{M}\\ k\leqslant N}} k\,(|c_k|^p + |c_{-k}|^p) \leqslant B(\sigma)\,N^{\sigma-2} \sum_{k=1}^{N} k\,(|c_k|^p + |c_{-k}|^p) \qquad (26)$$

($B(\sigma)$ означает постоянные, зависящие от σ, вообще говоря, различные).

Так как в силу [7] (см. также [4, 5]) для функции $f \in \tilde{\Lambda}^{(k,\alpha)}$ при $p > (k + \alpha + 1/2)^{-1}$ $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^p < +\infty$, то, вводя обозначение $r_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} |c_k|^p$, получим

$$(1/N)\sum_{k=1}^{N} k\,|c_k|^p \leqslant (1/N)\sum_{j=0}^{N-1} r_j. \qquad (27)$$

Ввиду того что средние арифметические сходящейся к 0 последовательности стремятся к 0,

$$\lim_{N\to+\infty} (1/N)\sum_{k=1}^{N} k\,|c_k|^p = 0.$$

Аналогично

$$\lim_{N\to+\infty} (1/N)\sum_{k=1}^{N} k\,|c_{-k}|^p = 0.$$

Отсюда и из (26) получаем, что плотность порядка σ множества $\mathfrak{M}$ существует, при этом $\operatorname{mes}^\sigma \mathfrak{M} = 0$. Из (26) видно, что фактически доказано более сильное утверждение — в условиях теоремы 3 справедливо соотношение

$$(A_N^\alpha)^{-1} \sum_{\substack{k\leqslant N\\ k\in\mathfrak{M}}} A_{N-k} = o(N^{\sigma-1}).$$

1. *Постников А. Г.* Введение в аналитическую теорию чисел.— М.: Наука, 1971.— 416 с.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т.— М.: Мир, 1965.— Т. 1. 615 с.
3. *Wintner A.* The theory of measure in arithmetical semi-groups.— Baltimore, 1944.— 120 p.
4. *Котляр Б. Д.* О сингулярных числах интегральных операторов.— Докл. АН СССР, 1976, **229**, № 4, с. 794—796.
5. *Котляр Б. Д.* О сингулярных числах интегральных операторов.— Дифференц. уравнения, 1978, **14**, № 8, с. 1473—1477.
6. *Харди Г.* Расходящиеся ряды.— М.: Изд. иностр. лит., 1951.— 504 с.
7. *Cochran J. A.* Growth estimates for the singular values of squarte — integrable kernels.— Pasif. J. Math., 1975, **56**, N 1, 51—58.

ВНИИмехчермет, Днепропетровск

Поступила в редакцию 16.11.821