УДК 517.5

В. Н. Коновалов

Приближение многочленами функций многих переменных с сохранением дифференциально-разностных свойств

1. В данной статье решается одна из задач о коприближении функций многих переменных, а именно задача о совместном приближении функций и их производных в метрике L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, алгебраическими многочленами, наследующими (с точностью до постоянного множителя) поведение модулей непрерывности определенных порядков приближаемых функций и их производных. Приближение осуществляется на ограниченных областях с липшицевой границей (определение см. в [1]).

Гармонический случай, когда функции (периодические или непериодические) заданы на всем R^n, а аппарат приближения — тригонометрические полиномы (для периодических функций) или целые функции экспоненциального типа (для непериодических функций), исследован с большой полнотой [1—4]. Гораздо меньше исследован вопрос о приближении алгебраическими многочленами непериодических функций, заданных на ограниченных множествах в R^n. В этом случае методы приближения были разработаны для канонических областей — выпуклых многогранников (см., напр., [3—5]), но и для этих областей задача о приближении с сохранением дифференциально-разностных свойств не рассматривалась. Переход от липшицевых областей к каноническим за счет применения теорем о продолжении [6, 7] хотя и возможен, но для решения рассматриваемой задачи о коприближении имеющиеся теоремы о продолжении потребовали бы некоторого обобщения и усиления. В данной работе предлагается прямой метод приближения, не использующий теорем о продолжении.

2. Приведем основные понятия и обозначения, используемые в дальнейшем. Пусть $\mathbf{R}^n$ — пространство векторов (точек) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, в котором определены две нормы $|\mathbf{x}| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$, $\|\mathbf{x}\| = |x_1| + \dots + |x_n|$, Ω — произвольное множество в $\mathbf{R}^n$, $|\Omega|$ — диаметр Ω, $\rho(\mathbf{x}, \Omega)$ — расстояние от точки $\mathbf{x}$ до Ω, определяемые в смысле нормы $|\mathbf{x}|$. Через $\Omega' + \Omega''$ обозначается множество точек $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, где $\mathbf{x} \in \Omega'$, $\mathbf{y} \in \Omega''$, а через $\alpha\Omega$ — множество точек $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$, где $\mathbf{x} \in \Omega$. Через $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, для измеримого Ω обозначается пространство вещественных измеримых на Ω функций $f(\mathbf{x})$ с конечной нормой $\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p}$. Через $w_p^{(r)}(\Omega)$ для целых $r \geqslant 0$ обозначается изотропное пространство Соболева функций $f(\mathbf{x})$, имеющих на открытом в $\mathbf{R}^n$, множестве Ω обобщенные в смысле Соболева частные несмешанные производные $D^{(r)}(\mathbf{e}) f(\mathbf{x})$ $(D^{(0)}(\mathbf{e}) f(\mathbf{x}) \equiv f(\mathbf{x}))$ порядка r вдоль каждого единичного вектора $\mathbf{e} \in \mathbf{R}^n$ и обладающих конечной полунормой

$$\|f\|_{w_p^{(r)}(\Omega)} = \sup_{\mathbf{e} \in \mathbf{R}^n,\ |\mathbf{e}|=1} \|D^{(r)}(\mathbf{e}) f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Обозначая при целых $k \geqslant 0$ через $\Delta^{(k)}(\varepsilon\mathbf{e}) f(\mathbf{x})$ $(\Delta^{(0)}(\varepsilon\mathbf{e}) f(\mathbf{x}) \equiv f(\mathbf{x}))$ операцию взятия k-й разности от функции $f(\mathbf{x})$ с шагом $\varepsilon \geqslant 0$ по направлению единичного вектора $\mathbf{e} \in \mathbf{R}^n$ (см. [1]), для открытых Ω в качестве характеристик гладкости всех производных $D^{(r)}(\mathbf{e}) f(x)$ порядка $r \geqslant 0$ будем рассматривать величины

$$\omega_k^{(r)}(f, \delta)_{L_p(\Omega)} = \sup_{\mathbf{e} \in \mathbf{R}^n,\ |\mathbf{e}|=1} \ \sup_{0 \leqslant \varepsilon \leqslant \delta} \|\Delta^{(k)}(\varepsilon\mathbf{e}) D^{(r)}(\mathbf{e}) f\|_{L_p(\Omega_{k\varepsilon\mathbf{e}})},$$

где $\Omega_{k\varepsilon\mathbf{e}}$ — подмножество из Ω всех точек $\mathbf{x} \in \Omega$ таких, что отрезки $[\mathbf{x}, \mathbf{x} + k\varepsilon\mathbf{e}]$ полностью лежат в Ω, при этом предполагаем, что при каждом $\varepsilon \leqslant \delta$ выполняется включение $\Delta^{(k)}(\varepsilon\mathbf{e}) D^{(r)}(\mathbf{e}) f \in L_p(\Omega_{k\varepsilon\mathbf{e}})$. Величина $\omega_k^{(r)}(f, \delta)_{L_p(\Omega)}$ называется функцией типа k-го модуля непрерывности, если при каждом $\delta \geqslant 0$ она конечна, неотрицательна, не убывает при возрастании δ и при любом $\tau \geqslant 0$ удовлетворяет неравенству $\omega_k^{(r)}(f, \tau\delta)_{L_p(\Omega)} \leqslant (1+\tau)^k \omega_k^{(r)}(f, \delta)_{L_p(\Omega)}$. Через $\mathscr{D}^{(r)}(\mathbf{R}^n)$ при натуральных r будет обозначаться пространство всех конечных линейных комбинаций с вещественными коэффициентами всевозможных операторов дифференцирования вида $D^{(1)}(\mathbf{e}_1) \dots D^{(1)}(\mathbf{e}_r)$ порядка r, где $\mathbf{e}_s \in \mathbf{R}^n$, $s = 1, \dots, r$, — единичные векторы, действующие на гладкие функции. Очевидно, что $\dim \mathscr{D}^{(r)}(\mathbf{R}^n) = \binom{n+r-1}{r}$. В дальнейшем для сокращения записей будет употребляться также и обозначение $[n, r] = \binom{n+r-1}{r}$.

3. Сформулируем основной результат и вспомогательные утверждения.

Теорема. *Если Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с липшицевой границей, r и k — целые $\geqslant 0$ такие, что $r + k > 0$, и для функции $f(\mathbf{x})$, определенной на Ω, величина $\omega_k^{(r)}(f, \delta)_{L_p(\Omega)}$ — функция типа k-го модуля непрерывности, то при каждом $N \geqslant r + k - 1$ можно указать алгебраический многочлен $P_N(\mathbf{x}, f)$ степени не выше N, обладающий свойствами*

$$\|f - P_N(f)\|_{w_p^{(s)}(\Omega)} \leqslant c\,\omega_{r-s+k}^{(s)}(f, N^{-1})_{L_p(\Omega)}, \quad 0 \leqslant s \leqslant r, \tag{1}$$

$$\|P_N(f)\|_{w^{(s)}(\Omega)} \leqslant cN^s \omega_s^{(0)}(f, N^{-1})_{L_p(\Omega)}, \quad 0 \leqslant s \leqslant r + k, \tag{2}$$

$$\|P_N(f)\|_{w_p^{(s)}(\Omega)} \leqslant cN^s \omega_{r+k}^{(0)}(f, N^{-1})_{L_p(\Omega)}, \quad s > r + k, \tag{3}$$

$$\omega_l^{(s)}(P_N(f), \delta)_{L_p(\Omega)} \leqslant c\,\omega_l^{(s)}(f, \delta)_{L_p(\Omega)}, \quad 0 \leqslant l \leqslant r - s + k, \quad 0 \leqslant s \leqslant r, \tag{4}$$

где $c = c(n, r, k, s, \Omega)$ не зависит от f, N, δ и p.

Лемма 1. *Если Ω — произвольное непустое ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$ и Ω_m, $m = 1, \dots, M$, — произвольное разбиение Ω на конечное число непустых попарно непересекающихся множеств, то для каждой пары натуральных чисел $\nu \geqslant n$ и $N \geqslant 1$ можно указать набор алгебраических многочленов $P_{4\nu N}(\mathbf{x}, \Omega_m)$, $m = 1, \dots, M$, обладающих свойствами*

$$\sum_{m=1}^{M} P_{4\nu N}(\mathbf{x}, \Omega_m) \equiv 1,$$

$$\sup_{\mathbf{e}\in\mathbf{R}^n,\ |\mathbf{e}|=1} |D^{(s)}(\mathbf{e}) P_{4\nu N}(\mathbf{x}, \Omega_m)| \leqslant c(N^{-1}|\Omega|)^{-s}(1 + N^{-1}|\Omega|\rho(\mathbf{x}, \Omega_m))^{n-\nu}, \quad (5)$$

где $\mathbf{x} \in \Omega$, $s \geqslant 0$, а $c = c(n, \nu, s)$ не зависит от Ω, $\mathbf{x}$, N, M и способа разбиения Ω на множества Ω_m, $m = 1, \dots, M$.

Лемма 2. *Пусть U — ограниченное измеримое множество в $\boldsymbol{R}^n$, звездное относительно некоторого шара B радиуса $\varepsilon > 0$, и существует открытый в $\boldsymbol{R}^n$ круговой конус V высоты 1 с вершиной в начале координат такой, что для функции $f(\mathbf{x})$, определенной на множестве $U + \varepsilon V$, величина $\omega_k^{(r)}(f, \delta)_{L_p(\Omega)}$ при фиксированных целых $r \geqslant 0$ и $k \geqslant 0$, удовлетворяющих условию $r + k > 0$,— функция типа k-го модуля непрерывности.*

Тогда можно указать конечные наборы $\{\mathbf{e}_{i,j}\}_{j=1}^{[n,i]}$, $i = 1, \dots, r + k$, векторов единичной длины, зависящие от конуса V, и алгебраический многочлен $p(\mathbf{x}, f)$ степени не выше $r + k - 1$ такие, что при некоторых $\alpha = \alpha(n, r, k) > 0$, $\beta = \beta(n, r, k) > 0$, $\gamma = \gamma(n, r, k) > 0$ будут выполняться неравенства

$$\|f - p(f)\|_{L_p(U)} \leqslant c\Bigg(\varepsilon^{-(r+k)\sum_{i=1}^{r+k}[n,i]} \int_{\alpha\varepsilon Q} \dots \int_{\alpha\varepsilon Q} \|\Delta^{(r+k)}\Bigg(\sum_{i=1}^{r+k}\sum_{j=1}^{[n,i]} \|\mathbf{t}_{i,j}\| \mathbf{e}_{i,j}\Bigg) \times$$

$$\times f\|_{L_p(U+\beta\varepsilon V)} \sum_{i=1}^{r+k}\sum_{j=1}^{[n,i]} d\mathbf{t}_{i,j} + (\varepsilon^{-1}|U|)^{r+k+n} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{[n,r+k]} \|\Delta^{(r+k)}(\gamma\varepsilon\mathbf{e}_{r+k,j}) f\|_{L_p(U+\beta\varepsilon V)}\Bigg), \quad (6)$$

$$\|p(f)\|_{\omega_p^{(s)}(U)} \leqslant c\varepsilon^{-s}(\varepsilon^{-1}|U|)^{-s+r+k-1+n} \sum_{i=1}^{r+k}\sum_{j=1}^{[n,i]} \|\Delta^{(s)}(\gamma\varepsilon\mathbf{e}_{i,j}) f\|_{L_p(U+\beta\varepsilon V)}, \quad (7)$$

где $c = c(n, r, k, V)$ не зависит от f, ε, U и p, а $\alpha\varepsilon Q$ — куб в $\mathbf{R}^{r+k}$, являющийся сжатием единичного куба $Q = \{\mathbf{t} : 0 < t_m < 1,\ m = 1, \dots, r + k\}$.

Лемма 3. *Если U — измеримое ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$ и V — открытый в $\mathbf{R}^n$ круговой конус высоты 1 с центром в начале координат такой, что при некотором $\varepsilon > 0$ для некоторой функции $f \in L_p(U + \varepsilon V)$ величина $\omega_k^{(r)}(f, \delta)_{L_p(\Omega)}$ при заданных $r > 0$ и $k \geqslant 0$ — функция типа k-го модуля непрерывности, то можно указать конечные наборы $\{\mathbf{e}_{s,j}\}_{j=1}^{[n,s]}$, $s = 1, \dots, r$, векторов единичной длины, зависящие от конуса V такие, что при некотором $\alpha = \alpha(r, k) > 0$ и всех $h \in (0, \alpha\varepsilon)$ будут выполняться неравенства*

$$\|f\|_{\omega_p^{(s)}(U)} \leqslant c\Bigg(h^{-s}\|f\|_{L_p(U+\alpha\varepsilon V)} + h^{r-s+k}\sum_{i=1}^{[n,s]} \int_{hQ} \|\Delta^{(k)} \times$$

$$\times (\|\mathbf{t}\|\mathbf{e}_{s,j}) D^{(r)}(\mathbf{e}_{s,j}) f\|_{L_p(U+\alpha\varepsilon V)} d\mathbf{t}\Bigg), \quad (8)$$

где $c = c(n, r, k, V)$ не зависит от f, ε, h, U и p, а hQ — куб в $\mathbf{R}^k$, являющийся сжатием единичного куба $Q = \{\mathbf{t} : 0 < t_m < 1,\ m = 1, \dots, k\}$.

Лемма 4. *Если B_m, $m = 1, \dots, M$, — некоторый набор шаров в $\mathbf{R}^n$, диаметры которых не превышают $\varepsilon > 0$, таких, что каждое множество $B_{m+1} \cap B_m$, $m = 1, \dots, M - 1$, содержит шар диаметра $\delta > 0$, то для любого набора алгебраических многочленов $p_r(\mathbf{x})_m$, $m = 1, \dots, M$, имеющих степень не выше r, будут выполняться при каждом $s = 0, \dots, r$ неравенства*

$$\| p_r(\mathbf{x})_M - p_r(\mathbf{x})_1 \|_{w_p^{(s)}(B_M)} \leqslant c\varepsilon^{-s} (M\varepsilon\delta^{-1})^{\mu} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{M-1} \| p_r(\mathbf{x})_{m+1} - p_r(\mathbf{x})_m \|_{L_p(B_{m+1} \cap B_m)}, \tag{9}$$

где $c = c(n, r)$, $\mu = \mu(n, r)$ не зависят от ε, δ, M, p и многочленов $p_r(\mathbf{x})_m$, $m = 1, \dots, M$.

Лемма 5. *Если Ω — ограниченная область в $\boldsymbol{R}^n$ с липшицевой границей, то существует конечный (зависящий лишь от Ω) набор круговых конусов V_l, $l = 1, \dots, l(\Omega)$, высоты 1 с вершинами в начале координат такой, что при каждом $\varepsilon > 0$ и некоторых $\alpha = \alpha(\Omega) > 0$, $\beta = \beta(\Omega) > 0$, $\gamma = \gamma(\Omega) > > 0$ область Ω можно разбить на попарно непересекающиеся измеримые множества $\Omega_{m,\varepsilon}$, $m = 1, \dots, M(\varepsilon, \Omega)$, такие, что*

а) *каждое из них имеет диаметр не более $\alpha\varepsilon$ и звездно относительно некоторого шара диаметра $\beta\varepsilon$;*

б) *для каждого из множеств $\Omega_{m,\varepsilon}$ можно выбрать конус $V_{l(m)}$ из набора V_l, $l = 1, \dots, l(\Omega)$, так, что если два множества $\Omega_{m',\varepsilon}$ и $\Omega_{m'',\varepsilon}$ имеют общие предельные точки, то пересечение множеств $\Omega_{m',\varepsilon} + \beta\varepsilon V_{l(m')}$ и $\Omega_{m''\varepsilon} + \beta\varepsilon V_{l(m'')}$ содержит некоторый шар диаметра $\gamma\varepsilon$;*

в) *для любой пары множеств $\Omega_{m',\varepsilon}$ и $\Omega_{m'',\varepsilon}$ найдется набор множеств $\Omega_{m_k,\varepsilon}$, $k = 1, \dots, k(m', m'')$, где $m_1 = m'$, $m_{k(m',m'')} = m''$, таких, что каждая пара $\Omega_{m_k,\varepsilon}$, $\Omega_{m_{k+1},\varepsilon}$ имеет общие предельные точки, и при этом верно неравенство $k(m', m'') \leqslant c\varepsilon^{-1} |\Omega_{m',\varepsilon} \cup \Omega_{m'',\varepsilon}|$, где $c = c(\Omega)$ не зависит от m', m'' и ε.*

4. Приведем краткие доказательства утверждений раздела 3.

Доказательство леммы 1. Многочлены $P_{4\nu N}(\mathbf{x}, \Omega_m)$, $m = = 1, \dots, M$, строятся по схеме, предложенной в [8 и 9]. Для этого шар B_0 диаметра $2|\Omega|$, концентрический с шаром B диаметра $|\Omega|$, содержащим Ω, разбивается на измеримые непустые попарно непересекающиеся множества Ω_{m,ε_N}, $m = 1, \dots, M(N, \Omega)$, такие, что при заданном $\varepsilon_N = N^{-1}|\Omega|$ и всех $\mathbf{x} \in \Omega$ выполняются неравенства $\rho(\mathbf{x}, \Omega_{m,\varepsilon_N}) + \varepsilon_N \geqslant \rho(\mathbf{x}, \Omega_m)$, $m = 1, \dots, M(N, \Omega)$. Обозначая через B^0 шар диаметра $3|\Omega|$, концентрический с B, и выбирая полиномиальное ядро вида

$$J_{4\nu N}(\mathbf{x}) = j_{4\nu N}^{-1} (3|\Omega||\mathbf{x}|^{-1} \cos(2N+1) \arccos(3|\Omega|)^{-1}|\mathbf{x}|)^{\nu},$$

где

$$j_{4\nu N} = \int_{B^0} (3|\Omega||\mathbf{x}|^{-1} \cos(2N+1) \arccos(3|\Omega|)^{-1}|\mathbf{x}|)^{\nu} d\mathbf{x},$$

согласно определению полагаем

$$P_{4\nu N}(\mathbf{x}, \Omega_m) = \int_{\Omega_{m,\varepsilon_N}} J_{4\nu N}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} + 1 - M^{-1} \int_{B_0} J_{4\nu N}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

В этом случае тождество очевидно, а неравенства (5) проверяются с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в [8 и 9].

Доказательство леммы 2. Для построения многочленов, удовлетворяющих неравенствам (6) и (7), используем идеи из [7, 10 и 11]. При каждом фиксированном $i = 1, \dots, r + k$ набор единичных векторов $\mathbf{e}_{i,j} \in V$, $j = 1, \dots, [n, i]$, определим так, чтобы при каждом $i = 1, \dots, r + k$ набор операторов дифференцирования $D^{(i)}(\mathbf{e}_{i,j})$, $j = 1, \dots, [n, i]$, порядка i по направлениям $\mathbf{e}_{i,j}$ образовывал базис в пространстве $\mathscr{D}^{(i)}(\mathbf{R}^n)$. Используя операцию усреднения по Стеклову, определим следующие функции

$$\xi_\delta(\mathbf{x}, f) = \delta^{-(r+k)\sum_{i=1}^{r+k}[n,i]} \int\limits_{\delta Q} \dots \int\limits_{\delta Q} f \times$$

$$\times \left(\mathbf{x} + \sum_{i=1}^{r+k} \sum_{j=1}^{[n,i]} \| \mathbf{t}_{i,j} \| \mathbf{e}_{i,j}\right) \prod_{i=1}^{r+k} \prod_{j=1}^{[n,i]} d\mathbf{t}_{i,j},$$

где интегрирование по $\mathbf{t}_{i,j} \in \mathbf{R}^{r+k}$ ведется на кубах δQ, являющихся сжатиями единичного куба $Q = \{\mathbf{t} : 0 < t_m < 1,\ m = 1, \dots, r+k\}$, а $\delta = \delta(n, r, k, \varepsilon)$ достаточно мало́. При $\delta = 0$ по определению полагаем $\xi_0(\mathbf{x}, f) \equiv f(\mathbf{x})$. Отправляясь от функций $\xi_\delta(\mathbf{x}, f)$, определим функции

$$\zeta_\delta(\mathbf{x}, f) = \sum_{m=1}^{r+k} (-1)^{m-1} \binom{r+k}{m} \xi_{m\delta}(\mathbf{x}, f).$$

Зафиксировав достаточно малое $\alpha = \alpha(n, r, k) > 0$ и полагая $\delta = \alpha\varepsilon$, обозначим через $t(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \zeta_{\alpha\varepsilon}(f))$ многочлен Тейлора степени $r + k - 1$, построенный для функции $\zeta_{\alpha\varepsilon}(\mathbf{x}, f)$ относительно точки $\mathbf{y} \in B$. Зафиксировав затем некоторую бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi(\mathbf{x})$ с носителем в B такую, что $\int\limits_B \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 1$, определим многочлен $p(\mathbf{x}, f)$ с помощью равенства

$$p(\mathbf{x}, f) = \int\limits_B \varphi(\mathbf{y})\, t(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \zeta_{\alpha\varepsilon}(f))\, d\mathbf{y}.$$

Представив разность $f(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}, f)$ в виде

$$f(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}, f) = f(\mathbf{x}) - \zeta_{\alpha\varepsilon}(\mathbf{x}, f) + \zeta_{\alpha\varepsilon}(\mathbf{x}, f) - p(\mathbf{x}, f),$$

используя технические приемы из [7, 10, 11] и обобщенное неравенство Минковского, можно получить оценку (6). Для получения неравенств (7) достаточно непосредственно продифференцировать $p(\mathbf{x}, f)$ и произвести необходимые оценки, пользуясь обобщенным неравенством Минковского.

Доказательство леммы 3. При $n = 1$ неравенство (8) следует из [6], с. 85. Отметим, что при $n = 1$ утверждение леммы 3 можно получить с помощью рассуждений, приведенных в [12]. Переход от одномерного случая к многомерному осуществляется достаточно просто.

Доказательство леммы 4. Неравенства (9) нетрудно установить, если воспользоваться неравенствами из [13], а затем — леммой 3.

Доказательство леммы 5. Существование множеств $\Omega_{m,\varepsilon}$, обладающих свойствами а)—в), нетрудно установить с помощью метода «мостов» из [14].

Доказательство теоремы. Зафиксировав натуральное N и полагая $\varepsilon_N = N^{-1}|\Omega|$, образуем разбиение области Ω на попарно непересекающиеся непустые измеримые множества Ω_{m,ε_N}, $m = 1, \dots, M(N, \Omega)$, обладающие свойствами а) — в) леммы 5. При этом $M(N, \Omega) \leqslant cN^n$, где $c = c(\Omega)$. По заданному разбиению области Ω на множества Ω_{m,ε_N}, $m = 1, \dots, M(N, \Omega)$, построим с помощью леммы 1 соответствующее разбиение единицы на алгебраические многочлены $P(\mathbf{x})_{m,\varepsilon_N} = P_{4\nu N}(\mathbf{x}, \Omega_{m,\varepsilon_N})$, $m = 1, \dots, M(N, \Omega)$, степени не выше $4\nu N$, где $\nu \geqslant n$ — некоторое, пока произвольное, число. Затем, полагая $U_{m,\varepsilon_N} = \Omega_{m,\varepsilon_N} + \alpha\varepsilon_N V_{l(m)}$, $m = 1, \dots, M(N, \Omega)$, где $V_{l(m)}$ — один из единичных конусов, указанных в лемме 5, а $\alpha = \alpha(n, r, k, \Omega)$ — достаточно малое число, обозначим через $p(\mathbf{x}, f)_{m,\varepsilon_N} = p_{r+k-1}(\mathbf{x}, f, U_{m,\varepsilon_N})$, $m = 1, \dots, M(N, \Omega)$, набор алгебраических многочленов, имеющих степень не выше $r + k - 1$ и обладающих свойствами, указанными в лемме 2. Выбрав число $\nu = \nu(n, r, k, \Omega)$ достаточно большим, построим приближающие многочлены, полагая

$$P_N(\mathbf{x}, f) = \sum_{m=1}^{M(N,\Omega)} p(\mathbf{x}, f)_{m,\varepsilon_N} P(\mathbf{x})_{m,\varepsilon_N}. \quad (1$$

Очевидно, что степень этих многочленов не превосходит $4\nu N + r + k - 1$.

Считая $s = 0, \ldots, r$, из равенства (10) получаем представление

$$D^{(s)}(\mathbf{e}) f(\mathbf{x}) - D^{(s)}(\mathbf{e}) P_N(\mathbf{x}, f) = \sum_{s'=0}^{s} \binom{s}{s'} \sum_{m=1}^{M(N,\Omega)} (D^{(s-s')}(\mathbf{e}) f(\mathbf{x}) -$$

$$- D^{(s-s')}(\mathbf{e}) p(\mathbf{x}, f)_{m,\varepsilon_N}) D^{(s')}(\mathbf{e}) P(\mathbf{x})_{m,\varepsilon_N}, \quad (11)$$

необходимое для доказательства неравенства (1). Затем получим представления, необходимые для доказательства неравенств (2) и (3).

При $s = 0, \ldots, r + k$ получим представление

$$D^{(s)}(\mathbf{e}) P_N(\mathbf{x}, f) = \sum_{m=1}^{M(N,\Omega)} D^{(s)}(\mathbf{e}) p(\mathbf{x}, f)_{m,\varepsilon_N} P(\mathbf{x})_{m,\varepsilon_N} +$$

$$+ \sum_{s'=1}^{s} \binom{s}{s'} \sum_{m=1}^{M(N,\Omega)} \sum_{m'=1}^{M(N,\Omega)} (D^{(s-s')}(\mathbf{e}) p(\mathbf{x}, f)_{m,\varepsilon_N} -$$

$$- D^{(s-s')}(\mathbf{e}) p(\mathbf{x}, f)_{m',\varepsilon_N}) D^{(s')}(\mathbf{e}) P(\mathbf{x})_{m,\varepsilon_N} P(\mathbf{x})_{m',\varepsilon_N}, \quad (12)$$

а при $s > r + k$ — представление

$$D^{(s)}(\mathbf{e}) P_N(\mathbf{x}, f) = \sum_{s'=0}^{s} \binom{s}{s'} \sum_{m=1}^{M(N,\Omega)} \sum_{m'=1}^{M(N,\Omega)} (D^{(s-s')}(\mathbf{e}) p(\mathbf{x}, f)_{m,\varepsilon_N} -$$

$$- D^{(s-s')}(\mathbf{e}) p(\mathbf{x}, f)_{m',\varepsilon_N}), \quad D^{(s')}(\mathbf{e}) P(\mathbf{x})_{m,\varepsilon_N} P(\mathbf{x})_{m',\varepsilon_N}. \quad (13)$$

Из равенства (11) с помощью обобщенного неравенства Минковского и лемм 1—5 можно получить неравенства (1), а из равенств (12), (13) — соответственно неравенства (2) и (3). Тогда неравенство (4) при $\delta > N^{-1}$ можно получить из неравенства (1), а при $\delta \leqslant N^{-1}$ — из неравенства (2).

1. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1977.— 455 с.
2. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций.— Изв. АН СССР.Сер. мат., 1951, **15**, № 3, с. 219—242.
3. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.— М.: Физматгиз, 1960.— 624 с.
4. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М.: Наука, 1977.— 512 с.
5. *Брудный Ю. А.* Приближение функций, заданных в выпуклом многограннике.— Докл. АН СССР, **190**, № 2, с. 9—11.
6. *Бесов О. В.* Продолжение функций за пределы области с сохранением дифференциально-разностных свойств в L_p.— Мат. сборник, 1965, **66**, № 1, с. 80—96.
7. *Брудный Ю. А.* Продолжение функции с сохранением порядка убывания модулей непрерывности.— В кн.: Исследования по теории функций многих вещественных переменных.— Ярославль: Ярослав. ун-т, 1978, № 2, с. 33—69.
8. *Коновалов В. Н.* Дифференциальные свойства и приближение функций многих переменных: Препринт 79.21.— К. Ин-т матем. АН УССР, 1979.— 42 с.
9. *Коновалов В. Н.* Аппроксимационная теорема типа Джексона для функций многих переменных.— Укр. мат. журн., 1981, **33**, № 6, с. 757—764.
10. *Брудный Ю. А.* Об одной теореме локальных наилучших приближений.— Уч. зап. Казанск. ун-та, 1964, № 6, с. 43—49.
11. *Буренков В. И.* Интегральное представление Соболева и формула Тейлора.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1973, **131**, с. 33—38.
12. *Коновалов В. Н.* О связи дифференциально-разностных свойств функции и приближающих ее целых функций экспоненциального типа.— В кн.: Вопросы теории приближений функций и ее приложений.— К.: Ин-т матем. АН УССР, 1976, с. 116—123.

13. *Ганзбург М. И.* Некоторые неравенства для многочленов и целых функций конечной степени в симметричных пространствах.— В кн.: Теория приближения функций.— М.: Наука, 1977, с. 104—107.
14. *Никольский С. М.* Об одном методе покрытия области и неравенства для многочленов от многих переменных.— Mathematica (Romina Cluj), 1966, 8, № 2, с. 345—356.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила в редакцию 1.11.82