УДК 519.21

Н. М. Зинченко

Об аппроксимации сумм случайных величин с мультииндексами

Пусть $\xi(\nu)$, $\nu \in Z^q$, — независимые случайные величины, определенные на целочисленной положительной решетке $Z^q = \{\nu = (\nu_1, \dots, \nu_q), \nu_i = 1, 2, \dots\}$ в R^q_+. Рассмотрим асимптотическое поведение при $n \to \infty$ последовательности сумм $S(n) = \sum\limits_{\nu \leqslant n} \xi(\nu)$, $\nu, n \in Z^q$, где неравенство $\nu \leqslant n$ понимаем покоординатно, а $n \to \infty$ означает, что $n_i \to \infty$, $i = 1, \dots, q$.

В случае одномерного индекса удобным методом получения результатов об асимптотике $S(n)$, $n \geqslant 1$, стал «сильный принцип инвариантности», дающий возможность с определенной «погрешностью» приблизить последовательность $S(n)$ броуновским движением. Так, в [1] показано, что независимые одинаково распределенные случайные величины (н. о. р. с. в.) X_j, $j \geqslant 1$, с $MX_1 = 0$, $MX_1^2 = \sigma^2$ можно переопределить на новом вероятностном пространстве вместе с броуновским движением $B(t)$, $t \geqslant 0$, так, что с вероятностью 1

$$\left| \sum_{j=1}^{n} X_j - B(n) \right| = o((n \ln \ln n)^{1/2}). \tag{1}$$

Дальнейшее развитие сильный принцип инвариантности получил в работах [2—5]. Естественный интерес представляет доказательство утверждений типа (1) для сумм случайных величин с q-мерными индексами, что позволило бы аппроксимировать последовательность $S(n)$, $n \in Z^q$, q-параметрическим броуновским движением $W(t), t \in R^q_+$. Здесь $W(t)$, $t \in R^q_+$, — гауссовское случайное поле с $Mw(t) = 0$, $Mw(t)w(s) = \sigma^2 \prod\limits_{i=1}^{q} \min(t_i, s_i)$, обращающееся в нуль на осях.

Теорема 1. *Пусть* $\xi(\nu)$, $\nu \in Z^q$, — *н. о. р. с. в.*, $M\xi(\nu) = 0$, $M\xi^2(\nu) = \sigma^2$ *и для некоторого* $0 < \delta \leqslant 1$ $M|\xi(\nu)|^{2+\delta} < \infty$.

Тогда можно переопределить $\xi(\nu)$ *без изменения их распределения на более богатом вероятностном пространстве вместе с q-параметрическим броуновским движением* $W(t)$, $t \in R^q_+$, *так, чтобы*

$$|S([t]) - W(t)| = O\Big(\Big(\prod_{i=1}^{q} t_i\Big)^{1/2}\Big) \tag{2}$$

почти наверное, где $t = (t_1, \dots, t_q)$, $[t] = ([t_1], \dots, [t_q])$, $[\cdot]$ — *целая часть.*

В теореме 1 уменьшен остаточный член по сравнению с [4] для независимых слагаемых без каких-либо ограничений на область изменения $t \in R^q_+$.

Для $t = (t_1, \dots, t_q)$, $s = (s_1, \dots, s_q) \in R^q_+$ обозначим через $W([t, s]) = \Delta^{(1)}_{t_1, s_1} \dots \Delta^{(q)}_{t_q, s_q} W$ приращения поля $W(t)$ на интервале $[t, s] = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{q} [t_i, s_i]$, задаваемые q-ми смешанными разностями, $\Pi(t) = \prod\limits_{i=1}^{q} t_i$.

Для доказательства теоремы 1 понадобятся следующие вспомогательные факты.

Лемма 1. *Пусть* $X(k)$, $k \in Z^q$, — *последовательность независимых случайных величин,* $G_k(\cdot)$ — *последовательность вероятностных распределений в* R^1 *с характеристическими функциями* $g_k(u)$ *соответственно.*

Если для некоторых $\lambda(k)$, $\delta(k) > 0$ *и* $T(k) > 10^8$

$$|M\{\exp(iuX(k))\} - g_k(u)| \leqslant \lambda_{(k)} \qquad \forall |u| < T(k),$$
$$G_k\{u: |u| > T(k)/4\} \leqslant \delta(k),$$

то, не меняя распределения $X(k)$, *их можно переопределить на новом вероятностном пространстве вместе с последовательностью независимых случайных величин* $Y(k)$, $k \in Z^q$, *имеющих распределение* $G_k(\cdot)$, *так, чтобы*

$$P\{|X(k) - Y(k)| \geqslant \alpha(k)\} \leqslant \alpha(k),$$
$$\alpha(1) = 1, \quad \alpha(k) = 16(T(k))^{-1}\ln T(k) + 4(\lambda(k))^{1/2}T(k) + \delta(k).$$

Утверждение леммы 1 легко следует из теоремы 1 работы [3].

Лемма 2. *Пусть* $f_n(u)$, $u \in R^1$, $n \in Z^q$,— *характеристическая функция нормированной суммы* $(\Pi(n))^{1/2}$ $S(n)$. *Если слагаемые удовлетворяют условиям теоремы 1, то*

$$|f_n(u) - \exp(-u^2\sigma^2/2)| \leqslant C_1(\Pi(n))^{-\delta/2}|u|^{2+\delta}\exp(-\gamma u^2) \qquad \forall u \in R^1$$

с $|u| < C_2(\Pi(n))^{1/2}$, $\qquad C_1, C_2, \quad \gamma > 0$.

Доказательство аналогично случаю $q = 1$ [6].

Во избежание слишком громоздких выкладок рассмотрим случай $q = 2$. Всюду далее $\xi(\nu)$, $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in Z^2$,— н. о. р. с. в., удовлетворяющие условиям теоремы 1.

Пусть $r(k_i) = \sum_{j=1}^{k_i} j^\alpha$, $\quad h_{k_i} = r(k_i - 1) + 1$, $\qquad i = 1, 2$, где целое $\alpha > 1$ будет выбрано позже. Обозначим $H_{k_i} = \{m_i$ целое: $h_{k_i} \leqslant m_i \leqslant r(k_i)\}$, $i = 1, 2$, $H(k) = H_{k_1} \times H_{k_2}$, $h(k) = (h_{k_1}, h_{k_2})$. Заметим, что $\operatorname{card} H_{k_i} = k_i^\alpha$, $i = 1, 2$. Используем запись $f(u) \ll g(u)$, $u \in R^q$, $q \geqslant 1$, в том же смысле, что и $f(u) = O(g(u))$ при $u \to \infty$.

Для $L = (L_1, L_2)$ определим $\bar{N} = \bar{N}(L) = (N_1, N_2)$ соотношениями $L_1 \in H_{N_1}$, $L_2 \in H_{N_2}$ и получим

$$(N_1N_2)^{1+\alpha} \ll \sum_{k_1=1}^{N_1}\sum_{k_2=1}^{N_2}(k_1k_2)^\alpha \ll h_{N_1}h_{N_2} \leqslant L_1L_2 \ll (N_1N_2)^{1+\alpha}.$$

Ясно, что $N_i^{1+\alpha} \ll h_{N_i} \ll N_i^{1+\alpha}$, $i = 1, 2$.

Введем случайные величины

$$X(k) = X(k_1, k_2) = (k_1k_2)^{-\alpha/2}\sum_{\nu_1 \in H_{k_1}}\sum_{\nu_2 \in H_{k_2}}\xi(\nu_1, \nu_2), \qquad k_1, k_2 = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Замечание 1. Случайные поля $X(k_1, k_2)$ и $X(k_1^*, k_2^*)$ при $k_1 \neq k_1^*$ или $k_2 \neq k_2^*$ независимы как суммы независимых случайных величин по непересекающимся массивам индексов.

Замечание 2. Величины $X(k)$ — нормированные суммы независимых случайных величин, для которых справедлива центральная предельная теорема (ц. п. т.) и оценка скорости сходимости в ц. п. т., являющаяся аналогом оценки Бери — Эссеена.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha = 1 + [18/\delta]$. *Тогда, начиная с некоторого* $\bar{N}_0 \in Z^2$

$$\max_{L \in H(\bar{N})}\sum_{h_{N_1} \leqslant \nu_1 \leqslant L_1}\sum_{h_{N_2} \leqslant \nu_2 \leqslant L_2}\xi(\nu_1, \nu_2) \leqslant (h_{N_1}h_{N_2})^{1/2-\lambda}, \qquad \lambda = 1/4(1+\alpha),$$

почти наверное.

Доказательство. Так как суммы $(N_1N_2)^{-\alpha/2}\sum\limits_{\nu_1\in H_{N_1}}\sum\limits_{\nu_2\in H_{N_2}}\xi(\nu_1,\nu_2)$ удовлетворяют ц. п. т. с остаточным членом $O(N_1N_2)^{-\alpha\delta/2}$, то, используя аналог неравенства Леви для сумм независимых случайных величин с мультииндексами [7], имеем

$$P_1(\bar N)=P\left\{\max_{L\in H(\bar N)}\left|\sum_{\nu_1=h_{N_1}}^{L_1}\sum_{\nu_2=h_{N_2}}^{L_2}\xi(\nu_1,\nu_2)\right|\geqslant(h_{N_1}h_{N_2})^{1/2-\lambda}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 2^2P\left\{\left|\sum_{\nu_1\in H_{N_1}}\sum_{\nu_2\in H_{N_2}}\xi(\nu_1,\nu_2)\right|\geqslant(h_{N_1}h_{N_2})^{1/2-\lambda}-2\,(2\sigma^2(N_1N_2)^{\alpha/2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant C_3\exp\{-C_4(N_1N_2)^{(1+\alpha)(1-2\lambda)-\alpha}\}+C_5(N_1N_2)^{-\alpha\delta/2},$$

$C_3>0$, $C_4>0$ зависят только от σ^2, $C_5>0$ от N_1, N_2 не зависит.

Выбирая $\lambda=1/4(1+\alpha)$, видим, что $(1+\alpha)(1-2\lambda)-\alpha>0$, а $\alpha\delta/2\geqslant 9$. Следовательно, $P_1(\bar N)\leqslant(N_1N_2)^{-9}$ и $\sum\limits_{\bar N}P_1(\bar N)<\infty$. Применяя лемму Бореля — Кантелли, завершаем доказательство леммы.

Лемма 4. *В условиях леммы 3 с вероятностью 1 для достаточно больших N_1, N_2*

$$\max_{L_1\in H_{N_1}}\left|\sum_{\nu_1=h_{N_1}}^{L_1}\sum_{\nu_2=1}^{h_{N_2}}\xi(\nu_1,\nu_2)\right|\leqslant h_{N_1}^{1/2-\lambda}h_{N_2}^{1/2},$$

$$\max_{L_2\in H_{N_2}}\left|\sum_{\nu_1=1}^{h_{N_1}}\sum_{\nu_2=h_N}^{L_2}\xi(\nu_1,\nu_2)\right|\leqslant h_{N_1}^{1/2}h_{N_2}^{1/2-\lambda}.$$

Доказательство. Для любого N_2, используя неравенство Леви и ц. п. т. с остаточным членом $O(N_1^\alpha h_{N_2})^{-\delta/2}$, получаем

$$P_2(\bar N)=P_2(N_1,N_2)=P\left\{\max_{L_1\in H_{N_1}}\left|\sum_{h_{N_1}\leqslant\nu_1\leqslant L_1}\sum_{1\leqslant\nu_2\leqslant h_{N_2}}\xi(\nu_1,\nu_2)\right|\geqslant\right.$$

$$\left.\geqslant h_{N_1}^{1/2\lambda}-h_{N_2}^{1/2}\right\}\leqslant 2P\left\{\left|\sum_{h_{N_1}\leqslant\nu_1<h_{N_1+1}}\sum_{1\leqslant\nu_2\leqslant h_{N_2}}\xi(\nu_1,\nu_2)\right|\geqslant\right.$$

$\geqslant h_{N_1}^{1/2-\lambda}h_{N_2}^{1/2}-(2\sigma^2N_1^\alpha h_{N_2})^{1/2}\leqslant C_6\exp\{-C_7h_{N_1}^{1-2\lambda}N_1^\alpha\}+C_8(N_1^\alpha h_{N_2})^{-\delta/2}$, где C_6, C_7, $C_8>0$ от N_1, N_2 не зависят. Если N_1 достаточно велико, то $P_2(N_1,N_2)\leqslant C_8(N_1^\alpha h_{N_2})^{-\delta/2}\leqslant\mathrm{const}\,(N_1N_2)^{-9}$ при $\alpha=1+[18/\delta]$, $\lambda=1/4(\alpha+1)$. Так как ряд $\sum\limits_{\bar N}P_2(\bar N)$ сходится, то из леммы Бореля—Кантелли следует первое утверждение. Второе утверждение доказывается аналогично.

Оценим далее колебание поля $W(t)$ на прямоугольнике $H(\bar N)$.

Лемма 5. *Пусть $W(t)=W(t_1,t_2)$ — 2-параметрическое броуновское движение.*

Тогда с вероятностью 1 для достаточно больших N_1 и N_2

$$\sup_{t\in H(\bar N)}|W(h_{N_1},h_{N_2})-W(t_1,t_2)|\leqslant(h_{N_1}h_{N_2})^{1/2}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$W(h_{N_1},h_{N_2})-W(t_1,t_2)=W([t_1-h_{N_1})\times[t_2,h_{N_2}))+W([t_1-h_{N_1})\times[0,h_{N_2}))+$$

$$+W([0,h_{N_1})\times[t_2-h_{N_2}))=A_1+A_2+A_3.$$

Оценим сверху каждое из трех слагаемых. Как и в [4], почти наверное $|A_1|\leqslant\sup\limits_{t\in H(\bar N)}|W(t_1-h_{N_1},t_2-h_{N_2})|\leqslant(h_{N_1}h_{N_2})^{1/2-\lambda}$ при $\lambda=1/4(1+\alpha)$.

Далее,

$$P_3(N_1)=P\{\sup_{t\in H_{N_1}}|W(t-h_{N_1},h_{N_2})|>h_{N_1}^{1/2-\lambda}h_{N_2}^{1/2}\}=P\{\sup_{0\leqslant s\leqslant(h_{N_1+1}-h_{N_1})}|W(s,1)|>$$

$$>h_{N_1}^{1/2-\lambda}\}\leqslant 2P\{|W(1,1)|\geqslant(h_{N_1+1}-h_{N_1})^{-1/2}h_{N_1}^{1/2-\lambda}\}\leqslant$$

$$\leqslant C_9\exp\{-h_{N_1}^{1-2\lambda}N_1^{-\alpha}\}\leqslant N_1^{-\beta},\qquad C_9>0,$$

для N_1 большого и $\forall\,\beta>0$, в частности $P_3(N_1)\leqslant N_1^{-2}$. Для любого N_2 ряд $\sum_{N_1}P_3(N_1)$ сходится, и по лемме Бореля — Кантелли с вероятностью 1 для достаточно большого N_1 и N_2

$$|A_2|\leqslant\sup_{t\in H_{N_1}}|W(t_1-h_{N_1},h_{N_2})|\leqslant h_{N_1}^{1/2-\lambda}h_{N_2}^{1/2}\leqslant(h_{N_1}h_{N_2})^{1/2}.$$

Аналогично $P\{|A_3|\leqslant\sup_{t\in H_{N_2}}|W(h_{N_1},t_2-h_{N_2})|\leqslant(h_{N_1}h_{N_2})^{1/2}\}=1$ для произвольного N_1 и N_2, достаточно большого.

Доказательство теоремы 1. Применим лемму 1 к последовательности независимых случайных величин $X(k)=X(k_1,k_2)$, определенных соотношением (3). По лемме 2 $\lambda(k)$ и $T(k)$ могут быть выбраны следующим способом:

$$|M\exp(iuX(k))-\exp(-u^2\sigma^2/2)|\leqslant C_1(k_1k_2)^{-\alpha\delta/2}|u|^{2+\delta}\exp(-\gamma u^2)=$$

$$=\lambda(k_1,k_2)=\lambda(k),\quad T(k)=T_{k_1}T_{k_2}=(k_1k_2)^{2,5}<C_2(k_1k_2)^{\alpha/2}$$

при $\alpha=1+[18/\delta]$. Заметим, что при больших k_1, k_2 $\lambda(k_1,k_2)\ll(k_1k_2)^{-9}$, $T(k)>10^8$. Простая оценка для «хвоста» нормального распределения дает $\Phi(u:|u|>T(k)/4)\leqslant\exp(-T^2(k)/32\sigma^2)=\delta(k)$.

Поэтому, не меняя распределения $X(k)$, их можно определить на более богатом вероятностном пространстве вместе с последовательностью независимых нормально распределенных с параметрами $(0,\sigma^2)$ случайных величин $Y(k)=Y(k_1,k_2)$ так, чтобы $P\{|X(k)-Y(k)|\geqslant\alpha(k)\}\leqslant\alpha(k)$, где $\alpha(k)=\alpha(k_1,k_2)=16\,(T(k))^{-1}\ln T(k)+4\lambda^{1/2}\,T(k)+\delta(k)\}\leqslant(k_1k_2)^{-2}$.

Обозначим через $\Delta W_k=W([h(k),h(k+1)])$ приращения поля $W(t)$ на прямоугольнике $[h(k),h(k+1)]$. Случайные величины $Y^*(k)=Y^*(k_1,k_2)=(k_1,k_2)^{-\alpha/2}\Delta W_k$ имеют распределение $N(0,\sigma^2)$ и независимы как приращения поля на непересекающихся прямоугольниках. Следовательно, $Y^*(k)$ и $Y(k)$ одинаково распределены. Поэтому по теореме Колмогорова можно определить на одном вероятностном пространстве $S(k)$, $Y(k)$ поле $W(t)$ так, чтобы $Y(k)$ и $Y^*(k)$ имели одинаковое распределение. Докажем, что поле $W(t)=W(t_1,t_2)$ удовлетворяет соотношению (2). Для $L_1=[t_1]$, $L_2=[t_2]$ и $\bar N(L)=(N_1,N_2)$ имеем

$$\left|\sum_{\nu_1=1}^{L_1}\sum_{\nu_2=1}^{L_2}\xi(\nu_1,\nu_2)-W(t_1,t_2)\right|\leqslant\left|\sum_{\nu_1=1}^{h_{N_1}}\sum_{\nu_2=1}^{h_{N_2}}\xi(\nu_1,\nu_2)-w(h_{N_1},h_{N_2})\right|+$$

$$+\left|\sum_{h_{N_1}\leqslant\nu_1\leqslant L_1}\ \sum_{h_{N_2}\leqslant\nu_2\leqslant L_2}\xi(\nu_1,\nu_2)\right|+\left|\sum_{h_{N_1}\leqslant\nu_1\leqslant L_1}\ \sum_{1\leqslant\nu_2\leqslant h_{N_2}}\xi(\nu_1,\nu_2)\right|+$$

$$+|W(t_1,t_2)-W(h_{N_1},h_{N_2})|+\left|\sum_{1\leqslant\nu_1\leqslant h_{N_1}}\ \sum_{h_{N_2}\leqslant\nu_2\leqslant L_2}\xi(\nu_1,\nu_2)\right|=s_1+\ldots+s_5.$$

Оценим сверху все пять членов.

$$s_1=\left|\sum_{k_1=1}^{N_1}\sum_{k_2=1}^{N_2}\sum_{\nu_1\in H_{N_1}}\sum_{\nu_2\in H_{N_2}}\xi(\nu_1,\nu_2)-\sum_{k_1=1}^{N_1}\sum_{k_2=1}^{N_2}(k_1k_2)^{\alpha/2}Y^*(k_1,k_2)\right|\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k_1=1}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} (k_1k_2)^{\alpha/2} \,|\, X(k_1, k_2) - Y(k_1, k_2) \,|.$$

Так как $\sum_{k_1,k_2} \alpha(k_1, k_2) < \infty$, $P\{|X(k_1, k_2) - Y(k_1, k_2)| \leqslant \alpha(k_1, k_2)\} = 1$ для k_1, k_2 достаточно больших. Следовательно,

$$S_1 \leqslant \sum_{1 \leqslant k_1 \leqslant N_1} \sum_{1 \leqslant k_2 \leqslant N_2} \alpha(k_1, k_2)(k_1k_2)^{\alpha/2} \ll (N_1N_2)^{\alpha/2-1} \ll (L_1L_2)^{1/2-\delta_0},$$

$$\delta_0 = 3/2\,(2 + [18/\delta]) > 0.$$

По леммам 3 — 5 имеем $s_2, \ldots, s_5 \leqslant (h_{N_1}h_{N_2})^{1/2} \leqslant (L_1L_2)^{1/2}$. Таким образом, $|S([t]) - W(t)| \ll (t_1t_2)^{1/2}$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Аналогичными рассуждениями приведенное доказательство переносится на случай $q > 2$.

Следствие 1 [4]. *С вероятностью* 1

$$|S([t]) - W(t)| = o\left(\left(\prod_{i=1}^{q} t_i \ln\left(\prod_{i=1}^{q} t_i\right)\right)^{1/2}\right).$$

Доказательство очевидно.

Используем сильный принцип инвариантности для исследования асимптотического поведения последовательности нормированных сумм $S(n)/(\Pi(n))^{1/2}\varphi(n)$, $n = (n_1, \ldots, n_q) \in Z^q$. Опишем множество предельных точек семейства непрерывных случайных функций $g_n(t)$, $n \in Z^q$, $t \in T = [0, 1]^q$, построенных следующим способом:

1) $g_n(t) = g_n(t_1, \ldots, t_q) = 0$, если $t_i = 0$ для некоторого $i = 1, \ldots, q$;

2) $g_n(t) = S(m)/(\Pi(n))^{1/2}\,\varphi(n) = S([n\,t])/(\Pi(n))^{1/2}\varphi(n)$ для $m = (m_1, \ldots, m_q) \in Z^q$, $t_i = m_i/n_i$, $1 \leqslant m_i \leqslant n_i$, $i = 1, \ldots, q$;

3) $g_n(t)$ получается в результате интерполяции по Лагранжу при $t \in X_{i=1}^{q}\ [(m_i - 1)/n_i,\ m_i/n_i]$.

Рассмотрим пространство $C_0(T)$ непрерывных на T функций, обращающихся в нуль на осях, с метрикой, задаваемой нормой $\|g\| = \sup_{t \in T} |g(t)|$. Обозначим H_r, $0 < r < \infty$, множество абсолютно непрерывных относительно меры Лебега λ функций $g \in C_0(T)$ с производной Радона — Никодима $\dot{g}$, удовлетворяющей условию $\int_T (\dot{g}(t))^2 d\lambda(t) \leqslant r^2$ (если $r = 0$, то H_0 состоит из единственной функции $g(t) \equiv 0$). Пусть Φ — класс неотрицательных, неубывающих по каждой переменной функций $\varphi(t)$, $t \in R^q$, таких, что $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ и

$$\overline{\lim_{c \downarrow 0}}\ \lim_{k \to \infty} \varphi(c^{k_1+1}, \ldots, c^{k_q+1})/\varphi(c^{k_1}, \ldots, c^{k_q}) = 1.$$

Положим $I(\varphi, r) = \int_{[1,\infty)^q} \left(\prod_{i=1}^{q} t_i\right)^{-1} \varphi(t) \exp\{-r\varphi^2(t)/2\}\, d\lambda(t)$, $R^2 = R^2(\varphi) = \inf\{r : I(\varphi, r) < \infty\}$.

Теорема 2. *В предположениях теоремы 1 множество предельных точек семейства $g_n(t)$ в $C_0(T)$ с вероятностью* 1 *совпадает с H_R для любой $\varphi \in \Phi$ с $0 \leqslant R(\varphi) < \infty$.*

Доказательство. Как показано в [8] для $q = 1$ и в [9] для $q > 1$, множество предельных точек семейства функций

$$f_n(t) = W(n_1t_1, \ldots, n_qt_q)/(\Pi(n))^{1/2}\varphi(n), \quad n \in Z^q, \quad t \in T,$$

совпадает с H_R $\forall \varphi \in \Phi$ с $0 \leqslant R(\varphi) < \infty$. По теореме 1 для произвольного $\varepsilon > 0$ и n_i, $i = 1, \ldots, q$, достаточно больших,

$$\sup_{t \in T} |g_n(t) - f_n(t)| = \|g_n - f_n\| \leqslant C/\varphi(n) \leqslant \varepsilon,$$

что и завершает доказательство.

Замечание. Когда $\varphi(t)$ зависит лишь от произведения аргументов $\Pi_{i=1}^{q} t_i$, q-кратный интеграл $I(\varphi, r)$ сводится к однократному:

$$I^*(\varphi, r) = \int_{1}^{\infty} u^{-1} (\ln u)^{q-1} \varphi(u) \exp\{-r\varphi^2(u)/2\} du,$$

что упрощает исследование его сходимости.

1. *Strassen V.* An invariance principle for the law of the iterated logarithm.— Z. Wahrschein. verw. Gebiete, 1964, **3**, N 3, p. 221—226.
2. *Philipp W., Stout F.* Almost sure invariance principles for partial sums of weakle dependent random variables.— Mem. Amer. Math. Soc., 1975, **2**, N 161, p. 1—140.
3. *Berkes I., Philipp W.* Approximation theorems for independent and weakly dependent random vectors.— Ann. Probab., 1979, **7**, N 1, p. 29—54.
4. *Berkes I., Morrow G.* Strong invariance principles for the mixing random fields.— Z. Wahrschein. verw. Gebiete, 1981, **57**, N 1, p. 15—37.
5. *Morrow G.* Approximation of rectangular sums of B-valued random variables.— Z. Wahrschein. verw. Gebiete, 1981, **57**, N 2, p. 265—291.
6. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.— М.— Л.: Гостехиздат, 1949.— 264 с.
7. *Gut A.* Convergece rates for probabilities of moderate deviations for sums of random variables with multidimensional indeces.— Ann. Probab., 1980, **8**, N 2, p. 298—313.
8. *Булинский А. В.* Новый вариант функционального закона повторного логарифма.— Теория вероятн. и ее примен., 1980, **25**, № 3, с. 502—512.
9. *Зинченко Н. М.* О функциональном законе повторного логарифма для многопараметрического броуновского движения.— Теория вероятн. и мат. статистика, 1983, вып. 29, с. 46—51.

Киев. гос. ун-т

Поступила в редакцию 26.06.82
после доработки — 23.03.83