УДК 519.46

Ю. Н. Пилипенко, В. М. Полецких

Об одном условии конечности в топологических группах

В работе под группой понимается локально компактная группа, под подгруппой — замкнутая подгруппа.

В. М. Глушков [1] доказал, что в дискретной локально нильпотентной группе без кручения порождение конечного набора подгрупп конечного ранга имеет конечный ранг. Аналогичный результат для локально компактных групп неверен [2].

Цель данной работы — изучить локально компактные нильпотентные и локально нильпотентные группы без кручения, удовлетворяющие A-свойству.

Определение 1. *Группа G называется A-группой, если произвольное конечное множество ее подгрупп конечного ранга порождает подгруппу конечного ранга.*

Определение 2. *Группа G называется $\hat{A}$-группой, если из того, что $r(G/T_i) < \infty$, $i = 1, \ldots, k$, следует, что $r\left(G/\bigcap\limits_{i=1}^{k} T_i\right) < \infty$.*

Введем обозначения: G_0 — связная компонента единицы G, $B(G) = B$ — периодическая часть G, $S_p(G)$ — силовская p-подгруппа группы G, U-группа — локально нильпотентная группа без кручения, $I_G(N)$ — изолятор множества N в G, R^n — n-мерная векторня группа, I_p — аддитивная группа кольца целых p-адических чисел, R_p — аддитивная группа поля p-адических чисел, $\hat{G}$ — группа характеров группы G, P — аддитивная группа поля рациональных чисел с дискретной топологией, $\hat{P} = Q$, G_g — группа G с дискретной топологией, $r(G)$ — ранг А. И. Мальцева, $\Pi(G)$ — множество простых чисел, для которых $S_p(G) \neq 1$. Если группа G имеет s образующих и $s \leqslant t$, то будем это обозначать $o(G) \leqslant t$.

Замечание 1. Если G — дискретная абелева U-группа и $r(G) = \infty$, то G обладает такой подгруппой L, что G/L — бесконечная счетная U-группа и $r(G/L) = \infty$.

Действительно, если $A = \sum\limits_{\alpha \in I} \{a_\alpha\} + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \{b_j\}$, где a_α, $\alpha \in I$, b_1, $b_2, \ldots$ — максимальная линейно независимая система элементов, то $L = I_G\left(\sum\limits_{\alpha \in I} \{a_\alpha\}\right)$.

Замечание 2. Фактор-группа $\hat{A}$-группы — $\hat{A}$-группа, подгруппа A-группы — A-группа.

Замечание 3. Пусть G — абелева группа и $r(G/N) < \infty$. Если группа G — $\hat{A}$-группа, то и подгруппа N — $\hat{A}$-группа.

Это следует из того, что в классе локально нильпотентных групп из условий $r(G/N) < \infty$, $r(N) < \infty$ вытекает $r(G) < \infty$ [2, лемма 4].

Теорема 1. *Пусть G — локально нильпотентная группа и $r(G/BG_0) < \infty$.*

Тогда G — $\hat{A}$-группа.

Доказательство. Пусть $r(G/G_0B) < \infty$ и $r(G/T_i) = t_i < \infty$. Обозначим через B_i периодическую часть группы T_i, $B_i = B(T_i)$. Так как $G/G_0B \cong (G/B)/(G_0B/B)$ и $r(G_0B/B) < \infty$ [3], то $r(G/B) < \infty$ [2].

Пусть $\overline{\{g_1^*, g_2^*, \ldots, g_n^*\}} \subset B/B_1 \cap B_2$ и $N = \overline{\{g_1, \ldots, g_n\}}$ — подгруппа из B, где g_i — прообраз g_i^*. В силу компактности N имеем, что $NT_1/T_1 \cong N/T_1 \cap N = N/N \cap B_1$. Значит, $r(N/N \cap B_1) \leqslant t_1$. Далее, $(N \cap B_1)T_2/T_2 \cong N \cap B_1/N \cap B_1 \cap T_2 \cong N \cap B_1/N \cap B_1 \cap B_2$. Следовательно, $r(N \cap B_1/N \cap B_1 \cap B_2) \leqslant t_2$. Так как $N(B_1 \cap B_2)/B_1 \cap B_2 \cong N/N \cap B_1 \cap B_2$, то, учитывая [4, теорема 2], получим, что $r(B/B_1 \cap B_2) \leqslant t_1 + t_2$. Но $r(G/B) < \infty$, поэтому $r(G/B_1 \cap B_2) < \infty$ [2, лемма 4]. Из соотношения $G/T_1 \cap T_2 \cong (G/B_1 \cap B_2)/ /(T_1 \cap T_2/B_1 \cap B_2)$ получаем $r(G/T_1 \cap T_2) < \infty$.

Лемма 1. *Пусть $G = G_1 \times G_2$ — абелева U-группа, где G_1 — дискретная группа бесконечного ранга, а G_2 — топологическая недискретная группа конечного ранга.*

Тогда G не является $\hat{A}$-группой.

Доказательство. Можно считать, что G_1 — счетная группа и $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \rangle$ — ее максимальная линейно независимая система элементов. Подгруппа G_2, рассматриваемая без топологии, также обладает линейно независимой системой элементов, из которой мы выберем счетную подсистему $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \rangle$. Рассмотрим подгруппу $T = I_G(a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n, \ldots)$. Подгруппа T обладает свойствами: $T \cap G_1 = T \cap G_2 = 1$. Действительно, если, например, $b \in T \cap G_1$, то $b^n = (a_1x_1)^{\alpha_1}(a_2x_2)^{\alpha_2} \ldots (a_jx_j)^{\alpha_j} \in \in G_1$, а значит, $x_i^{\alpha_i} = 1$ или $\alpha_i = 0$. Но тогда $b = 1$. Аналогично рассматривается второй случай. Итак, T — дискретная изолированная в G подгруппа. Очевидно, что G/T — периодическая U-группа, содержащая открытую подгруппу $G_2^* = TG_2/T \cong G_2/G_2 \cap T = G_2$. Поскольку $I_{G/T}(G_2^*) = G/T$, то $r(G/T) < \infty$ [2, следствие 3].

Итак, $r(G/T) < \infty$ и $r(G/G_1) < \infty$. В то же время $r(G) = r(G/T \cap G_1) = \infty$, а следовательно, G не является $\hat{A}$-группой.

Теорема 2. *Абелева U-группа G тогда и только тогда является $\hat{A}$-группой, когда она дискретна либо $r(G/BG_0) < \infty$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G недискретна. Если $BG_0 \neq 1$, то $G_1 = BG_0$ обладает фактор-группой T, изоморфной Q, либо R, либо I_p, либо R_p.

С учетом замечания 2 можно считать, что $BG_0 \cong T$. Но тогда $G = BG_0 \times \times D$. По лемме 1 $r(D) < \infty$, и, значит, $r(G/BG_0) < \infty$.

Достаточность. При $r(G/BG_0) < \infty$ применяем теорему 1. Если G дискретна и $r(G/T_i) < \infty$, $i = 1, 2$, то $T_1T_2/T_1 \cong T_2/T_1 \cap T_2$, и, следовательно, $r(T_2/T_1 \cap T_2) < \infty$. В силу $r(G/T_2) < \infty$ имеем $r(G/T_1 \cap \cap T_2) < \infty$.

Лемма 2. *Пусть $G = G_1 \times K$, где K — одномерный тор, а G_1 — дискретная абелева U-группа бесконечного ранга. Тогда G не является $\hat{A}$-группой.*

Доказательство. Можно считать, что G_1 — счетная подгруппа (замечания 1, 2) с максимальной линейно независимой системой элементов $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \rangle$. Как известно, K — делимая группа, имеющая счетное число элементов конечного порядка K_1, поэтому $K_g = K_2 + K_1$, где K_2 — делимая U-группа. Выберем из максимальной линейно независимой системы элементов группы K_2 счетную подсистему $\langle x_1, \ldots, x_n, \ldots \rangle$ и обозначим $I_{K_2}\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} = G_2$. Рассмотрим подгруппу $G_{12} = G_1 + G_2$ в алгебраическом смысле. В ней возьмем подгруппу $G_3 = I_{G_{12}}(a_1x_1, \ldots, a_nx_n, \ldots)$.

Пусть $b \in G_3 \cap K$, тогда $b^n = (a_1x_1)^{\alpha_1}(a_2x_2)^{\alpha_2} \ldots (a_jx_j)^{\alpha_j} \in K$.

Так как $G = G_1 \times K$, то $a_i^{\alpha_i} = 1$ или $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, j$. Отсюда $b = 1$, а следовательно, G_3 — дискретная подгруппа, причем $G_3 \cap K = 1$. Аналогично доказываем, что $G_3 \cap G_1 = 1$.

Пусть $a^n \in G_3G_2$, $a \in G_{12}$, тогда в G_2, в силу ее делимости, найдется такой элемент d, что $(ad)^n \in G_3$. Но G_3 — изолированная в G_{12} подгруппа, поэтому $ad \in G_3$ и $a \in G_3G_2$, т. е. G_3G_2 изолированная подгруппа в G_{12}. Так как $a_i \in \in G_3G_2$, то $G_1 \subset G_3G_2 \subset G_3K$. Отсюда $G_3K = G$. По теореме об изоморфизме имеем, что $G/G_3 = G_3K/G_3 \cong K/G_3 \cap K = K$, т. е. $r(G/G_3) = 1$. Поскольку $G_3 \cap G_1 = 1$, то $r(G/G_3 \cap G_1) = \infty$, и, следовательно, G не является $\hat{A}$-группой.

Лемма 3. *Пусть G — абелева группа, $G_0 = 1$ и все силовские p-подгруппы $S_p(G)$ — дискретные группы ранга 1.*

Тогда для любой дискретной подгруппы T без кручения существует такая дискретная подгруппа N без кручения, что выполняется:

1) $N \supset T$;

2) $B(G/N) = G/N$; $r(G/N) = 1$;

3) *фактор-группа* G/N *содержит подгруппу, изоморфную* $B(G)$.

Доказательство. Пусть $G^* = G/T$ и $B^* = B(G^*)$. Обозначим через L^* подгруппу в $G^*/B^* = G^{**}$, порожденную максимально линейно независимой системой элементов, а через S^* — ее полный прообраз в G^*. Понятно, что $L^* = S^*/B^* = \sum\limits_{\alpha} \{b^*_{\alpha}\}$ — свободная абелева дискретная группа. Так как B^* сервантна и открыта, то $S^* = W^* \times B^*$ [5, с. 150], причем W^* — дискретная U-группа. Пусть W — полный прообраз W^* в G, тогда W — дискретная U-группа. Очевидно, что $G_1 = G/W$ — периодическая группа. Подгруппа $\coprod\limits_{i=1}^{\infty} (S_{p_i}(G) : H_{p_i}) = B(G)$, где $H = \prod\limits_{i=1}^{\infty} H_{p_i}$ — открытая компактная подгруппа группы G [3]. Обозначим через B_1 образ подгруппы $B(G)$ при гомоморфизме $\varphi : G \to G_1$. В силу теоремы об изоморфизме и соотношения $B(G) \cap W = e$ получаем $B_1 = BW/W \cong B/W \cap B = B$.

Рассмотрим каждую из силовских p-подгрупп периодической группы G_1. Они дискретны. Образ $\varphi(S_{p_i}(G)) = S'_{p_i}$ — это либо циклическая подгруппа $\{a^*_{pi}\}$, либо квазициклическая группа. Если S'_{p_i} квазициклическая, то $S_{p_i}(G_1) = S^*_{p_i} = S'_{p_i} \times T_{p_i}$ [5, с. 138]. Рассмотрим случай, когда S'_p — циклическая группа, $S'_p = \{a^*_p\}$. Обозначим через K^*_p базисную подгруппу группы S^*_p [5, с. 154], $S^*_p = S_p(G_1)$.

1. Пусть $\{a^*_p\} \cap K^*_p \neq e^*$. Подгруппу K^*_p можно представить в виде $K^*_p = \{d_p\} \times D_p$ и $\{d_p\} \cap \{a^*_p\} \neq e^*$. Фактор-группа S^*_p/D_p является расширением сервантной циклической группы [5, с. 148] с помощью полной группы, а поэтому $S^*_p/D_p = F \times \{d^*_p\}$, где F — полная группа, а $\{d^*_p\}$ — образ группы $\{d_p\}$ при естественном гомоморфизме $\psi : S^*_p \to S^*_p/D_p$. Элемент $\psi(a^*_p) = fg$ и $g = d^{*t}_p$, $f = f_1^t$, $f_1 \in F$. Но тогда подгруппа $\{d^*_p f_1\}$ циклична и сервантна в S^*_p/D_p, а значит, $S^*_p/D_p = \{d^*_p f_1\} \times F_1$ [5, с. 151], где F_1 — полная группа. В этом случае через T_p обозначим полный прообраз группы F_1 в группе S^*_p,

2. Пусть $\{a^*_p\} \cap K^*_p = e^*$. В силу свойств базисной подгруппы фактор-группа S^*_p/K^*_p полна и может быть представлена в виде $S^*_p/K^*_p = N_p \times D_p$, где $N_p \cong p^{\infty}$ и N_p содержит образ подгруппы S'_p при гомоморфизме $S^*_p \to S^*_p/K^*_p$. Обозначим через T_p в этом случае полный прообраз группы D_p в группе S^*_p.

Рассмотрим подгруппу $T_1 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} T_{p_i}$. Из построения группы T_1 следует, что $T_1 \cap B_1 = e^*$, и, следовательно, $M \cap B(G) = e$, где M — полный прообраз группы T_1 в G. Следовательно, M — дискретная U-группа. Нетрудно видеть, что $r(S_p(G/M)) = 1$, и, значит, $r(G/M) = 1$. В силу $MB(G)/M \cong B(G)/B(G) \cap M \cong B(G)$ получаем, что G/M содержит подгруппу, изоморфную $B(G)$.

Лемма 4. *Пусть G — абелева недискретная группа, у которой $G_0 = 1$, $r(B) = 1$ и $r(G/B) = \infty$.*

Тогда G не является $\hat{A}$-группой.

Доказательство. Пусть H — открытая компактная подгруппа. По условию она недискретна. Поскольку $r(B(G/H)) = 1$, то по лемме 3 в G^*, $G^* = G/H$, существует такая дискретная U-группа T^*, что $B(G^*/T^*) = G^*/T^*$, $r(G^*/T^*) = 1$. Пусть T — полный прообраз T^* в G. Тогда $T = N \times H$, где N — дискретная U-группа и $r(N) = \infty$. Докажем, что T не является $\hat{A}$-группой (см. замечание 3).

Пусть $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \rangle$ — максимальная линейно независимая система элементов подгруппы N (см. замечания 1, 2). С учетом леммы 1 можно считать, что $S_p(H)$ — циклическая подгруппа. Множество $\Pi(H)$ бесконечно, поэтому его можно представить в виде объединения бесконечных взаимно непересекающихся множеств Π_i, $\Pi(H) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Pi_i$. Рассмотрим подгруппу $D = \{a_1x_1, \ldots, a_nx_n, \ldots\}$, где $\overline{\{x_k\}} = \prod_{p \in \Pi_k} S_p(H)$. Пусть $d \in D \cap H$. Тогда $d = (a_1x_1)^{n_1} \ldots (a_ix_i)^{n_i} \in H$. Отсюда $(a_j)^{n_j} = e$, и значит, $n_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, i$. Таким образом, $d = e$ и, следовательно, D — дискретная U-группа.

Пусть N_1 — дискретная U-подгруппа группы T со свойствами $N_1 \supset D$, $r(T/N_1) = 1$ (лемма 3). Так как $B(T/D) = T/D$, то N_1/D — дискретная периодическая группа. Пусть $d \in N_1 \cap N$. Тогда $d^n = (a_1x_1)^{k_1} \ldots (a_jx_j)^{k_j} \in N$ и $(x_1)^{k_1} = (x_2)^{k_2} = \ldots = (x_j)^{k_j} = e$. Но элементы x_i бесконечного порядка, поэтому $k_1 = k_2 = \ldots = k_j = 0$. Таким образом, $d^n = e$ или $d = e$. Имеем $r(T/N_1) = r(T/N) = 1$, но $r(T/N_1 \cap N) = r(T) = \infty$.

Лемма 5. *Пусть $G = \overline{\{a_1, \ldots, a_n\}}\, BG_0$ — локально нильпотентная группа. Если $r(G_0) = \infty$, то связная компонента центра группы G имеет бесконечный ранг.*

Доказательство. Так как $r(G_0/B_0) < \infty$ [3], то $r(B_0) = \infty$ и B_0 принадлежит центру подгруппы BG_0 [3]. Поэтому можно считать, что $G = \overline{\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}}\, B_0$. Пусть сперва G нильпотентна и $1 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_n = G$ — ее верхний центральный ряд. Индукцией по n покажем, что $\dim(Z_1) = \infty$, откуда получаем $r(Z_1) = \infty$. Если $\dim(Z_1) < \infty$, то $\dim(B_0Z_1/Z_1) = \dim(B_0/B_0 \cap Z_1) = \infty$. Отсюда по предположению индукции $\dim(Z_2/Z_1) = \infty$. Следовательно, для связной компоненты L_2 подгруппы $B(Z_2)$выполняется $\dim(L_2) = \infty$.

Пусть $\varphi_i : L_2 \to Z_1$, где $\varphi_i : x \to [a_i, x]$. Если N_i — ядро гомоморфизма φ_i, то в силу компактности L_2 имеем $L_2/N_i \cong \varphi_i(L_2)$, причем $\dim(\varphi_i(L_2)) < \infty$. Пусть P_i — связная компонента N_i. Ясно, что $\dim(L_2/N_i) = \dim(L_2/P_i/N_i/P_i) < \infty$. Отсюда $\dim(P_i) = \infty$. В силу соотношения $P_1P_2/P_2 \cong P_1/P_1 \cap P_2$ имеем $\dim(P_1 \cap P_2) = \infty$. Аналогично $P_3(P_1 \cap P_2)/P_3 \cong P_3/P_1 \cap P_2 \cap P_3$ и $\dim(P_1 \cap P_2 \cap P_3) = \infty$. Продолжая рассуждения, получаем $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) = \infty$. Но $\bigcap_{i=1}^{n} P_i \subset Z_1$, следовательно, $\dim(Z_1) = \infty$.

Рассмотрим общий случай. Группа характеров $\widehat{B}_0$ обладает счетной фактор-группой без кручения $\widehat{B}_0/S$ такой, что $r(\widehat{B}_0/S) = \infty$. Но тогда группа характеров $\widehat{B_0/S}$ — связная группа $T_0 = \overline{\{d\}}$, $r(T_0) = \infty$ [6, с. 518]. Подгруппа $W = \overline{\{a_1, a_2, \ldots, a_n, d\}}$ нильпотентна, и $r(W_0) = \infty$. Поскольку $W = \overline{\{t_1, t_2, \ldots, t_k\}}\, B(W)\, W_0$, то общий случай сводится к предыдущему.

Лемма 6. *Пусть $G = \overline{\{N\}}$ — нильпотентная вполне несвязная группа со свойством: если $a_1, a_2, \ldots, a_s \in N$, то $r(\overline{\{a_1, \ldots, a_s\}}) \leqslant t$, где t — фиксированное число.*

Тогда $r(G) < \infty$.

Доказательство. Элементы множества $\overline{\{N\}}$ обладают теми же свойствами, что и элементы множества N.

Пусть H — открытая компактная подгруппа группы G. В силу равенства $H = \overline{\{N\}} \cap H = \overline{\{N\} \cap H}$ имеем, что H обладает тем же свойством, что и группа G. Следовательно, любая конечная фактор-группа H/M имеет ранг не выше t. Пусть $\langle V_\alpha \rangle$ — полная система окрестностей единицы группы H, составленная из нормальных делителей этой группы [7, теорема 17], и $S_p = S_p(H)$. Тогда $r(S_pV_\alpha/V_\alpha) = r(S_p/V_\alpha \cap S_p) \leqslant t$. Отсюда вытекает, что для любой конечной фактор-группы S_p/M_p выполнено: $r(S_p/M_p) \leqslant t$.

Пусть S^*_p — подгруппа, порожденная $S^p = \{x^p, x \in S_p\}$ и коммутантом S_p. Тогда $S'_p = S_p/S^*_p = \prod_\alpha \{b_\alpha\}$, где $b_\alpha^p = 1$. Поскольку всякая конечная фактор-группа группы S_p имеет ранг не больше t, то $S'_p = \prod_{i=1}^{k} \{b_i\}$, где $k \leqslant t$.

С учетом [8, предложение 4.9] $o(S_p) \leqslant t$. Используя лемму 3 из [2], получаем, что $r(S_p) \leqslant l$, где l зависит от класса нильпотентности S_p и t. Отсюда $r(H) \leqslant l$. Произвольное конечное подмножество из B принадлежит некоторой открытой подгруппе H, поэтому $r(B) \leqslant l$. Отсюда $r(G) \leqslant t + l$ [4].

Лемма 7. *Пусть G — нильпотентная группа, а H_1 и H_2 — компактные вполне несвязные подгруппы конечного ранга, принадлежащие G. Тогда $H = \overline{\{H_1, H_2\}}$ — вполне несвязная компактная группа.*

Доказательство. Подгруппы H_1, H_2 компактны и вполне несвязны, поэтому они конечнопорождены [2, следствие 1], а H — компактна [3]. Индукцией по классу нильпотентности n докажем, что H — вполне несвязная группа.

При $n = 1$ лемма очевидна.

Предположим, что лемма 7 верна для всех групп ступени нильпотентности k, $k < n+1$, и класс нильпотентности H равен $n+1$. Фактор-группа $H^* = H/Z(H)$ — конечнопорожденная нильпотентная группа класса n. Отсюда и из предположения индукции получаем, что H^* — вполне несвязная группа и $Z(H^*) = \overline{\{c_1^*, c_2^*, \ldots, c_k^*\}}$ [2, лемма 3]. Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — произвольные прообразы элементов $c_1^*, c_2^*, \ldots, c_k^*$ в H. Рассмотрим отображения $H \to Z(H)$ по правилам $\varphi_i(x) = [x, c_i]$, $i = 1, \ldots, n$.

Эти отображения непрерывны и в силу компактности H замкнуты, поэтому образами группы H при гомоморфизмах φ_i являются замкнутые вполне несвязные подгруппы N_i центра группы H. Подгруппа N, $N = N_1 N_2 \ldots \ldots N_k$, — такая вполне несвязная группа из $Z(H)$, что фактор-группа H/N — нильпотентная группа класса n. По предположению индукции она вполне несвязна, а следовательно, вполне несвязна и группа H.

Теорема 3. *Нильпотентная топологическая группа G — A-группа тогда и только тогда, когда G — группа одного из следующих типов:*

1) $r(B_0) < \infty$;

2) $r(B_0) = \infty$, $G = B(G)$, $G/B_0 = H \times S_{p_1} \times S_{p_2} \times \ldots \times S_{p_k}$, *где H — компактная подгруппа, а в подгруппах S_{p_i} нет подгрупп типа p_i^∞ или R_{p_i}.*

Доказательство. Необходимость. Будем считать, что $r(B_0) = \infty$. Покажем, что $G_0 = B_0$, $G = B(G)$. Пусть $\{a\}$ — дискретная U-группа из G. По лемме 5 подгруппа $N_1 = \{a\} B_0$ обладает центральной связной подгруппой L такой, что $r(L) = \infty$. Подгруппа $N = \{a\} \times L$ — абелева A-группа, что противоречит лемме 2. Поэтому $G = B(G)$, $G_0 = B_0$.

Если фактор-группа $B_1 = B/B_0$ содержит подгруппу L_1 типа p^∞ или R_p, то ее полный прообраз — абелева A-группа N, $N = B_0 \times L$, где $L \cong L_1$. Но $\hat{N}$ не является $\hat{A}$-группой (лемма 1), поэтому $S_p(B_1) \not\supset L_1$.

Покажем, что почти все $S_p(B_1)$ принадлежат некоторой компактной подгруппе. Допустим, что это не так и подгруппы $S_{p_1}, S_{p_2}, \ldots, S_{p_k}, \ldots$ не принадлежат открытой компактной подгруппе M. Рассмотрим подгруппу $\prod_{i=1}^{\infty} (S_{p_i} : M_{p_i})$, где $M_{p_i} = S_{p_i} \cap M$. Пусть $a_i \in S_{p_i}$, $a_i \notin M_{p_i}$. Подгруппа $V_1 = \overline{\{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}}$ имеет вид $V_1 = \prod_{i=1}^{\infty} (\overline{\{a_i\}} : \overline{\{b_i\}})$, где $\overline{\{b_i\}} = \overline{\{a_i\}} \cap M_{p_i}$. Ясно, что V_1 — некомпактная подгруппа ранга 1. Полный прообраз V подгруппы V_1 в G — абелева A-группа. Подгруппа $T = \hat{V}$ — $\hat{A}$-группа, обладающая свойствами: $B(T)$ — недискретная группа, $r(B(T)) = 1$, $r(T/B(T)) = \infty$. Применяя лемму 4, получаем, что T — не $\hat{A}$-группа, а следовательно, $B/B_0 = H \times S_{p_1} \times \ldots \times S_{p_k}$, где H — компактная группа.

Достаточность. 1. Пусть $r(H_i) < \infty$, $i = 1, 2$. Тогда в фактор-группе G/G_0 для подгруппы $N_i = \overline{H_i G_0}/G_0$ выполняется $r(N_i) < \infty$

(лемма 6). Пусть $b_1, b_2, \dots, b_k \in \{N_1, N_2\}$, тогда $\overline{\{b_1, \dots, b_k\}} \subset \overline{\{a_1, \dots, a_{s_1}, d_1, \dots, d_{s_2}\}}$, где $r(N_i) = S_i$, $a_1, \dots, a_{s_1} \in N_1$, $d_1, \dots, d_{s_2} \in N_2$. Но тогда [2, лемма 3], $\infty > r(\overline{\{a_1, \dots, a_{s_1}, d_1, \dots, d_{s_2}\}}) \geqslant r(\overline{\{b_1, \dots, b_k\}})$. Применяя лемму 6, получаем, что $r(\overline{\{N_1, N_2\}}) < \infty$. Отсюда, учитывая $r(G_0) < \infty$ [3] и применяя лемму 4 из [2], получаем, что $r(N) < \infty$, где N — полный прообраз $\overline{\{N_1, N_2\}}$ в G. Но тогда $r(\overline{\{H_1 H_2\}}) \leqslant r(N) < \infty$.

2. Пусть T_i — связные компоненты подгруппы H_i и $T = T_1 \cdot T_2$. Рассмотрим фактор-группу $G_1 = G/T$. Обозначим через N_i образы H_i в G_1. В силу компактности T подгруппа $N_i = H_i T/T$, $r(N_i) < \infty$ и N_i — вполне несвязная группа. Подгруппа $N_i B_0/B_0 = L_i$ вполне несвязная, $r(L_i) < \infty$ и $L_i = (L_i \cap H) \times (L_i \cap S_{p_1}) \times \dots \times (L_i \cap S_{p_k})$. Так как $r(L_i \cap S_{p_i}) < \infty$, то $V_j = L_j \cap S_{p_j}$ обладает центральным рядом с факторами типа R_p, p^∞, I_p и $\{a\}$, где $a^{p^n} = 1$ [4, теорема 8]. В силу слойной компактности V_j [9, теорема 6], все факторы этого ряда компактны, так как в противном случае V_j, а значит, и G/B_0 обладали бы подгруппами типа R_{p_j} или p_j^∞ [9, теорема 1], а это не так. Поэтому L_j — компактные подгруппы. Но тогда компактна и подгруппа N_i. По лемме 7 подгруппа $N = \overline{\{N_1, N_2\}}$ компактна, вполне несвязна и $o(N_i) < t_i$ [2, следствие 1]. Но тогда $o(N) < \infty$ и, следовательно, $r(N) < \infty$ [2, следствие 1]. Так как $T_1 T_2/T_1 \cong T_2/T_1 \cap T_2$, то $r(T) < \infty$. Отсюда $r(\overline{\{H_1, H_2\}}) < \infty$.

С помощью теории характеров и теоремы 3 получаем теорему.

Теорема 4. *Абелева группа G — $\hat{A}$-группа тогда и только тогда, когда G — группа одного из следующих типов*:

1) $r(G/G_0 B) < \infty$;

2) *G — вполне несвязная группа, $B(G) = D \times S_{p_1} \times \dots \times S_{p_k}$, где D — дискретная подгруппа, а S_{p_i} не обладает факторами типа I_p или R_p.*

1) $r(B_0) < \infty$;

Теорема 5. *U-группа G тогда и только тогда, является A-группой, когда G — группа одного из следующих двух типов*:

1) $r(B_0) < \infty$;

2) $r(B_0) = \infty$, $G = B(G)$, $G/B_0 = H \times S_{p_1} \times \dots \times S_{p_k}$, где *$H$ — компактная группа, а S_{p_i} не содержат подгрупп типа R_{p_i}.*

Доказательство необходимости теоремы 5 дословно совпадает с доказательством необходимости теоремы 3, поэтому мы не будем его приводить.

Достаточность. Если $r(B_0) < \infty$, то все доказано [2, следствие 4]. Пусть $G/B_0 = H \times S_{p_1} \times \dots \times S_{p_k}$. Если T — произвольная изолированная подгруппа, то подгруппа $T \cap B_0$ изолирована в B_0, а значит, делима. Поэтому $T \cap B_0$ также связна. Таким образом, $T \cap B_0 = T_0$. В силу изоморфизма $T_1 = TB_0/B_0 \cong T/T \cap B_0 = T/T_0$ получаем, что T имеет строение, аналогичное строению группы G. Пусть $r(H_i) < \infty$, $i = 1, 2$, тогда H_i будут обладать открытыми подгруппами N_i такими, что $o(N_i) < \infty$ и $I_{H_i}(N_i) = H_i$ [2, лемма 6]. Подгруппа $T = I_G(\overline{\{N_1, N_2\}})$ — это такая изолированная нильпотентная группа [2, лемма 8], что $H_i \subset T$ и T удовлетворяет условию теоремы 3. Поэтому $r(\overline{\{H_1, H_2\}}) < \infty$.

Теоремы 2—5 на более широкие естественные классы групп не переносятся [10, примеры 1, 2].

1. *Глушков В. М.* О некоторых вопросах теории нильпотентных и локально нильпотентных групп без кручения.— Мат. сб., 1952, № 1, с. 79—104.
2. *Полецких В. М.* Топологический изолятор подгруппы конечного ранга. — Укр. мат. журн., 1977, **29**, № 5, с. 614—624.
3. *Глушков В. М.* Локально нильпотентные, локально бикомпактные группы.— Тр. Моск. мат. об-ва, 1955, **4**, с. 291—332.

4. *Чарин В. С.* О группах конечного ранга.— Укр. мат. журн., 1966, **18**, № 3, с. 85—96
5. *Курош А. Г.* Теория групп.—М.: Наука, 1967.— 640 с.
6. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ : В 2-х т.—М.: Наука, 1975.— Т. 1. 654 с.
7. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы.— М.: Наука, 1973.— 519 с.
8. *Кох X.* Теория Галуа p-расширений.— М.: Мир, 1973.— 232 с.
9. *Полецких В. М.* Слойно-компактные нильпотентные группы.—Сиб. мат. журн., 1975, **16**, № 4, с. 801—809.
10. *Пилипенко Ю. Н., Полецких В. М.* Об одном условии для замкнутых подгрупп конечного ранга.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1982, № 3, с. 17—19.

Киев. гос. ун-т

Поступила в редакцию 26,11.82