УДК 517.968:968.78

Н. А. Вирченко

О некоторых гибридных парных интегральных уравнениях

При решении некоторых смешанных краевых задач математической физики, в частности краевых задач для кусочно-неоднородных сред [1], возникают парные (тройные и т. д.) интегральные уравнения с принципиально разными ядрами.

В данной работе рассмотрен случай парных интегральных уравнений, когда одно уравнение содержит в качестве ядра обобщенную функцию Лежандра 1-го рода $P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)$, а второе — тригонометрическую функцию $\cos\alpha\tau$ или $\sin\alpha\tau$.

Пусть требуется решить парные интегральные уравнения

$$\int_0^\infty f(\tau)\, P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau = \psi_1(\alpha), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant a, \tag{1}$$

$$\int_0^\infty f(\tau)\cos\alpha\tau d\tau = \psi_2(\alpha), \qquad a < \alpha < +\infty. \tag{2}$$

Здесь $f(\tau)$ — неизвестная функция, $\psi_1(\alpha)$, $\psi_2(\alpha)$ — известные, причем $\psi_1(\alpha) = O(1/\alpha^q)$ при $\alpha \to 0$, $q < 3/2$, $|m| < 1/2$, $m < n < 3/2$, $P^{m,n}_k(z)$ — обобщенная присоединенная функция Лежандра 1-го рода, т. е. одно из двух линейно независимых решений обобщенного уравнения Лежандра [2]

$$(1 - z^2)\frac{d^2u}{dz^2} - 2z\frac{du}{dz} + \left[k(k+1) - \frac{m^2}{2(1-z)} - \frac{n^2}{2(1+z)}\right]u = 0.$$

Для решения парных интегральных уравнений потребуются некоторые вспомогательные результаты.

Используя формулу [3]

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(c-\lambda)}\int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{c-\lambda-1}(1-tz)^{a'} \times$$

$$\times F(a - a'. b; \lambda; tz)\, F(a', b - \lambda; c - \lambda; z(1-t)/(1-tz))\, dt, \tag{3}$$

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re}\lambda > 0, \ |\arg(1-z)| < \pi,$$

устанавливаем интегральное представление для $P^{m,n}_k(\operatorname{ch}\alpha)$:

$$P^{m,n}_k(\operatorname{ch}\alpha) = \frac{2^{(n-m+1)/2}\operatorname{sh}^m\alpha}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2-m)}\int_0^\alpha \frac{\operatorname{ch}(k+1/2)\varphi}{(\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}\varphi)^{m+1/2}} \times$$

$$\times F\left(\frac{n-m}{2}, -\frac{m+n}{2}; \frac{1}{2} - m; \frac{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}\varphi}{1 + \operatorname{ch}\alpha}\right)d\varphi, \tag{4}$$

из которого при $m = n = \mu$, $k = \nu$ следует известная формула для функции Лежандра [3, гл. 3, п. 3.7, (8)].

При $k = -1/2 + i\tau$ из (4) имеем

$$P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) = \frac{2^{(n-m+1)/2}\operatorname{sh}^m\alpha}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-m)}\int\limits_0^\alpha \frac{\cos\tau\varphi}{(\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}\varphi)^{m+1/2}}\times$$

$$\times F\left(\frac{n-m}{2},\ -\frac{m+n}{2};\ \frac{1}{2}-m;\ \frac{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}\varphi}{1+\operatorname{ch}\alpha}\right)d\varphi. \qquad (5)$$

Для нахождения $\cos\tau\varphi$ из (5) используем решение интегрального уравнения вида

$$\int\limits_a^x \varphi(t)\,[\omega(x)-\psi(t)]^{-l}\, F\left(p, q;\ r;\ \frac{\omega(x)-\psi(t)}{\omega(x)+d}\right)dt = \Phi(x) \qquad (6)$$

при $l = m + 1/2$, $p = (n-m)/2$, $q = -(m+n)/2$, $r = 1/2 - m$, $a = 0$, $d = 1$, $\omega(x) = \operatorname{ch} x$, $\psi(t) = \operatorname{ch} t$:

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma^{-1}(1/2-m)}{\Gamma(1/2+m)}\,\frac{d}{dx}\left\{[\omega(x)+d]^{(n-m)/2}\int\limits_a^x[\omega(x)-\psi(t)]^{m-1/2}\times\right.$$

$$\times[\omega(t)+d]^{(m-n)/2}F\left(\frac{m-n}{2},\ \frac{1+m-n}{2};\ \frac{1}{2}+m;\right.$$

$$\left.\left.\frac{\omega(x)-\psi(t)}{\omega(x)+d}\right)\Phi(t)\,\omega'(t)\,dt\right\}. \qquad (7)$$

Для $\cos\tau\varphi$ имеем

$$\cos\tau\varphi = \frac{\Gamma(1/2-m)\cos\pi m}{\sqrt{\pi}2^{(n-m+1)/2}}\,\frac{d}{d\varphi}\left[(\operatorname{ch}\varphi+1)^{(n-m)/2}\times\right.$$

$$\times\int\limits_0^\varphi(\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}\alpha)^{m-1/2}(\operatorname{ch}\alpha+1)^{m-n/2}F\left(\frac{m-n}{2},\ \frac{1+m-n}{2};\ \frac{1}{2}+m;\right.$$

$$\left.\left.\frac{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}\varphi}\right)P^{m,n}_{(-1/2)+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}^{1-m}\alpha d\alpha\right]. \qquad (8)$$

Перейдем к решению парных интегральных уравнений (1), (2). После умножения (1) на

$$\frac{2^{(m-n)/2}}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\cos\pi m\operatorname{sh}^{1-m}\alpha\,(\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}\alpha)^{m-1/2}(\operatorname{ch}\varphi+1)^{(n-m)/2}\times$$

$$\times(\operatorname{ch}\alpha+1)^{(m-n)/2}F\left(\frac{m-n}{2},\ \frac{1+m-n}{2};\ \frac{1}{2}+m;\ \frac{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}\varphi}\right), \qquad (9)$$

интегрирования по α от 0 до φ и дифференцирования по φ получим

$$2^{(m-n)/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\cos\pi m\int\limits_0^\infty f(\tau)\,d\tau\,\frac{d}{d\varphi}\left[(\operatorname{ch}\varphi+1)^{(n-m)/2}\times\right.$$

$$\times\int\limits_0^\varphi\frac{\operatorname{sh}^{1-m}\alpha P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)}{(\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}\alpha)^{1/2-m}}(\operatorname{ch}\alpha+1)^{(m-n)/2}\times$$

$$\left.\times F\left(\frac{m-n}{2},\ \frac{1+m-n}{2};\ \frac{1}{2}+m;\ \frac{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}\varphi}\right)d\alpha\right] = \Psi_1(\varphi),$$

$$0\leqslant\varphi\leqslant a, \qquad (10)$$

где

$$\Psi_1(\varphi) = \frac{2^{(m-n)/2}\Gamma(1/2-m)}{\pi}\cos\pi m \frac{d}{d\varphi}\Bigg[(\operatorname{ch}\varphi+1)^{(n-m)/2}\times$$

$$\times\int_0^{\varphi}\frac{\operatorname{sh}^{1-m}\alpha\cdot\psi_1(\alpha)}{(\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}\alpha)^{1/2-m}}(\operatorname{ch}\alpha+1)^{(m-n)/2}F\left(\frac{m-n}{2},\ \frac{1+m-n}{2};\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}+m;\ \frac{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}\varphi}\right)d\alpha\Bigg]. \tag{11}$$

Учитывая (8), перепишем (10) в виде

$$F_c[f(\tau)] = \Psi_1(\varphi), \qquad 0\leqslant\varphi\leqslant a. \tag{12}$$

Уравнение (2) можно переписать следующим образом:

$$F_c[f(\tau)] = \Psi_2(\varphi), \qquad \varphi > a, \tag{13}$$

где $\Psi_2(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\psi_2$, F_c— cos-преобразование Фурье. Следовательно, имеем

$$F_c[f(\tau)] = \begin{cases}\Psi_1(\varphi), & 0\leqslant\varphi\leqslant a,\\ \Psi_2(\varphi), & \varphi > a.\end{cases}$$

Используя формулу обращения cos-преобразования Фурье, получаем решение парных интегральных уравнений (1), (2):

$$f(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\int_0^a \Psi_1(\varphi)\cos\tau\varphi d\varphi + \int_a^{\infty}\Psi_2(\varphi)\cos\tau\varphi d\varphi\right]. \tag{14}$$

Рассмотрим парные интегральные уравнения

$$\int_0^{\infty}\tau f(\tau)P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = h_1(\alpha), \qquad 0\leqslant\alpha\leqslant a, \tag{15}$$

$$\int_0^{\infty} f(\tau)\sin\tau\alpha d\tau = h_2(\alpha), \qquad \alpha > a. \tag{16}$$

Умножив (15) на выражение (9), проинтегрировав по α от 0 до φ, получим

$$\frac{2^{(m-n)/2}}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\cos\pi m\int_0^{\infty}\tau f(\tau)(\operatorname{ch}\varphi+1)^{(n-m)/2}d\tau\times$$

$$\times\int_0^{\varphi}P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}^{1-m}\alpha(\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}\alpha)^{m-1/2}\times$$

$$\times F\left(\frac{m-n}{2},\ \frac{1+m-n}{2};\ \frac{1}{2}+m;\ \frac{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}\varphi}\right)d\alpha = M_1(\varphi), \tag{17}$$

где

$$M_1(\varphi) = \frac{2^{(m-n)/2}}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\cos\pi m(\operatorname{ch}\varphi+1)^{(n-m)/2}\times$$

$$\times\int_0^{\varphi}h_1(\alpha)\operatorname{sh}^{1-m}\alpha(\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}\alpha)^{m-1/2}(\operatorname{ch}\alpha+1)^{(m-n)/2}\times$$

$$\times F\left(\frac{m-n}{2},\ \frac{1+m-n}{2};\ \frac{1}{2}+m;\ \frac{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}\varphi}\right)d\alpha. \tag{18}$$

Проинтегрировав (8) по φ, используя (17), получаем

$$F_s[f(\tau)] = M_1(\varphi), \qquad 0\leqslant\varphi\leqslant a. \tag{19}$$

Здесь F_s — sin-преобразование Фурье.

Уравнение (16) можно переписать в виде

$$F_s[f(\tau)] = M_2(\varphi), \qquad \varphi > a, \tag{20}$$

где $M_2(\varphi) = (2/\pi)^{1/2} h_2$.
Использовав формулу обращения sin-преобразования Фурье, записываем окончательное решение парных интегральных уравнений (15), (16) в виде

$$f(\tau) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left[\int_0^a M_1(\varphi)\sin\tau\varphi d\varphi + \int_a^\infty M_2(\varphi)\sin\tau\varphi d\varphi\right]. \tag{21}$$

Рассмотрим парные интегральные уравнения более общего вида

$$\int_0^\infty f(\tau)[1+G(\tau)]P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = \psi_1(\alpha), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant a, \tag{22}$$

$$\int_0^\infty f(\tau)\cos\tau\alpha\,d\tau = \psi_2(\alpha), \qquad \alpha > a, \tag{23}$$

где функции $G(\tau)$, $\psi_1(\alpha)$, $\psi_2(\alpha)$ заданы, $f(\tau)$, как и прежде, искомая.

Используя (14), решение уравнений (22), (23) можно свести к уравнению Фредгольма 2-го рода. Перепишем уравнение (22) следующим образом:

$$\int_0^\infty f(\tau)P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = \psi_1(\alpha) - \int_0^\infty f(\tau)G(\tau)P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau. \tag{24}$$

Получили парные интегральные уравнения вида (1), (2). Записываем решение по формуле (14). В этом случае $\Psi_2 = (2/\pi)^{1/2}\psi_2$, а

$$\Psi_1(\varphi) = \frac{2^{m-n}}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\cos\pi m\frac{d}{d\varphi}\Bigg\{(\operatorname{ch}\varphi+1)^{(n-m)/2}\times$$

$$\times\int_0^\varphi\frac{(\operatorname{ch}\alpha+1)^{(m-n)/2}\operatorname{sh}^{1-m}\alpha}{(\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}\alpha)^{1/2-m}}F\Bigg(\frac{m-n}{2}, \frac{1+m-n}{2}; \frac{1}{2}+m;$$

$$\frac{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}\varphi}\Bigg)\left[\psi_1(\alpha) - \int_0^\infty f(\tau)G(\tau)P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau\right]d\alpha. \tag{25}$$

Решение парных интегральных уравнений (22), (23) свелось, таким образом, к решению интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода для функции $\Psi_1(\varphi)$, которое, следуя работе [4], можно записать в виде

$$\Psi_1(\varphi) + \int_0^a \Psi_1(u)K(\varphi,u)\,du = M(\varphi), \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant a, \tag{26}$$

где $K(\varphi,u) = (2\pi)^{-1/2}\{G_c(\varphi+u) + G_c(|\varphi-u|)\}$, $G_c = F_c[G(\tau)]$, $M(\varphi) = \Psi_1(\varphi) - N_2(\varphi)$, $N_2(\varphi) = F_c[N_1(\tau)G(\tau)]$, $N_1(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \Psi_2(\varphi)\cos\tau\varphi d\varphi$.

1. *Проценко В. С., Соловьев А. И.* Некоторые гибридные интегральные преобразования и их приложения в теории упругости неоднородных сред.— Прикл. мех., 1982, **18**, № 1, с. 62—67.
2. *Kuipers L., Meulenbeld B.* On a generalization of Legendre's associated differential equation.—Proc. Koninkl. Neberl. Akad. Weten., 1957, **60**, N 4, p. 436—443.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции : В 3-х т.— М. : Наука, 1965.— Т 1. 296 с.
4. *Pathak R. S.* On a class dual integral equations.— Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Weten. Ser. A, 1978, **81**, N 4, p. 491—501.

Киев. политехн. ин-т

Поступила в редакцию
04.10.83