УДК 517.925.3

Н. А. Перестюк, О. С. Черникова

К вопросу об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

В работе устанавливаются некоторые достаточные условия устойчивости тривиального решения нелинейной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. При этом отдельные результаты теории характеристических показателей Ляпунова [1] распространяются на случай импульсных систем.

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$dx/dt = A(t)\,x, \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x, \tag{1}$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n) \in R^n$, $t \geqslant t_0$, $A(t)$ — непрерывная ограниченная матрица при $t \geqslant t_0$ порядка n, B_i — постоянные квадратные матрицы порядка n, ограниченные равномерно относительно $i \in N$, моменты времени τ_i, $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$, таковы, что $\lim\limits_{i\to\infty} \tau_i = \infty$.

Теорема 1. *Пусть в системе уравнений* (1) *матрицы B_i удовлетворяют условию*

$$\inf_i |\det(E + B_i)| \geqslant \delta > 0, \tag{2}$$

а моменты времени τ_i таковы, что существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} i(t_0, t_0 + t)/t = p, \tag{3}$$

где $i\ (t_0, t)$ — число точек τ_i, принадлежащих промежутку $[t_0, t]$.

Тогда каждое нетривиальное решение $x\ (t, t_0, x_0)$ системы уравнений (1) *будет иметь конечный характеристический показатель $\chi\ [x\ (t, t_0, x_0)]$.*

Доказательство. В соответствии с аналогом неравенства Важевского для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [2] любое решение $x\ (t, t_0, x_0)$ системы уравнений (1) допускает оценку

$$\prod_{t_0<\tau_i<t} \gamma_i \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\,d\tau\right) \| x_0 \| \leqslant \| x(t, t_0, x_0) \| \leqslant \prod_{t_0<\tau_i<t} \Gamma_i \exp\left(\int_{t_0}^{t} \Lambda(\tau)\,d\tau\right) \| x_0 \|, \tag{4}$$

где $\lambda(t)$ и $\Lambda(t)$ — наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы $\hat{A}(t) = (A(t) + A^T(t))/2$, γ_i^2 и Γ_i^2 — наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы $(E + B_i^T)(E + B_i)$, $i \in N$. В силу (4) для нетривиального решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) имеем

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left(\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\,d\tau + \sum_{t_0<\tau_i<t} \ln \gamma_i\right) \leqslant \chi\,[x(t, t_0, x_0)] \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left(\int_{t_0}^{t} \Lambda(\tau)\,d\tau + \sum_{t_0<\tau_i<t} \ln \Gamma_i\right). \tag{5}$$

Учитывая (2) и (3), из (5) получаем неравенства

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\,d\tau + p\gamma_0 \leqslant \chi\,[x(t, t_0, x_0)] \leqslant \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \Lambda(\tau)\,d\tau + p\Gamma_0,$$

где $\gamma_0 = \inf\limits_{i\in N} \gamma_i$, $\Gamma_0 = \sup\limits_{i\in N} \Gamma_i$. Так как равномерная ограниченность матриц B_i и условие (2) обеспечивают конечность величин γ_0 и Γ_0, то теорема доказана.

Множество всех характеристических показателей нетривиальных решений линейной импульсной системы (1) называется ее спектром.

Теорема 2. *Если система уравнений* (1) *удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, то ее спектр состоит из конечного числа элементов* $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m$, $m \leqslant n$.

Доказательство теоремы непосредственно следует из того, что вектор-функции, обладающие различными характеристическими показателями, линейно независимы [1], а множество решений системы (1) при выполнении условий (2) изоморфно фазовому пространству этой системы, т. е. R^n.

Пусть теперь $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (1) и $\sigma_X = \sum_{j=1}^{n} \chi [x^j (t)] = \sum_{s=1}^{m} n_s\lambda_s$ — сумма характеристических показателей всех решений, составляющих $X(t)$, где $n_s \geqslant 1$ показывает, сколько решений с характеристическим показателем λ_s содержится в $X(t)$. Имеет место неравенство

$$\sigma_X \geqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \left[\int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\, d\tau + \sum_{t_0<\tau_i<t} \ln |\det (E + B_i)| \right] \tag{6}$$

(аналог неравенства Ляпунова).

Действительно, $\chi [\det X(t)] \leqslant \sigma_X$. На основании аналога формулы Остроградского — Лиувилля для системы (1) [3]

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\, d\tau \right) \prod_{t_0<\tau_i<t} \det (E + B_i).$$

Имеем

$$\chi [\det X(t)] = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \left\{ \int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\, d\tau + \sum_{t_0<\tau_i<t} \ln |\det (E + B_i)| \right\}.$$

Отсюда следует (6). Если в системе (1) $B_i = B$, $i \in N$, то неравенство (6) можно представить в виде

$$\sigma_X \geqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\, d\tau + p \sum_{\nu=1}^{n} \ln |1 + \alpha_\nu (B)|,$$

где $\alpha_\nu (B)$ — собственные числа матрицы B.

Отметим, что если для фундаментальной матрицы $X(t)$ системы уравнений (1) выполняется равенство

$$\sigma_X = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \left[\int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\, d\tau + \sum_{t_0<\tau_i^*<t} \ln |\det (E + B_i)| \right]$$

(аналог равенства Ляпунова), то эта матрица нормальна, т. е. сумма характеристических показателей решений, составляющих ее, наименьшая по сравнению с другими фундаментальными матрицами этой системы.

Пусть σ — сумма характеристических показателей (с учетом их кратностей) решений системы (1), входящих в некоторую ее нормальную фундаментальную матрицу.

Систему (1) будем называть правильной по Ляпунову, если

$$\sigma = \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \left[\int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\, d\tau + \sum_{t_0<\tau_i<t} \ln |\det (E + B_i)| \right]. \tag{7}$$

Теорема 3. *Линейная система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием* (1) *правильна тогда и только тогда, когда существует*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \left[\int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\, d\tau + \sum_{t_0<\tau_i<t} \ln |\det (E + B_i)| \right] = s$$

и выполнено равенство $\sigma = s$.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству соответствующей теоремы для обыкновенных дифференциальных уравнений (см., напр., [1]).

Систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\frac{dy}{dt} = -A^T(t)\,y,\quad t \neq \tau_i,\quad \Delta y\,|_{t=\tau_i} = -(E + B_i^T)^{-1} B_i^T y, \tag{8}$$

где $A^T(t)$ и B_i^T — транспонированные относительно $A(t)$ и B_i матрицы, назовем сопряженной по отношению к системе (1). В [3] доказано, что фундаментальные матрицы $X(t)$ и $Y(t)$ импульсных систем (1) и (8) связаны соотношением $Y^T(t)\,X(t) = C$, где C — невырожденная постоянная матрица. С учетом этого факта можно установить аналог теоремы Перрона для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

Теорема 4. *Линейная система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием* (1) *правильна тогда и только тогда, когда ее полный спектр, т. е. спектр с учетом кратностей характеристических показателей,* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$, *и полный спектр сопряженной с ней системы* $\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_n$ *симметричны относительно нуля, т. е.* $\alpha_k + \nu_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Если в системе (1) матрицы $A(t)$ и B_i треугольные, то справедливо утверждение.

Теорема 5. *Линейная треугольная система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием* (1) *правильна тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left[\int_{t_0}^{t} a_{kk}(\tau)\,d\tau + \sum_{t_0<\tau_i<t} \ln|1 + b_i^{kk}|\right] = \mu_k,\quad k = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости нулевого решения системы

$$dx/dt = A(t)\,x + f(t, x),\quad t \neq \tau_i,\quad \Delta x\,|_{t=\tau_i} = B_i x + I_i(x), \tag{9}$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n) \in R^n$, $t \geqslant t_0$, матрицы $A(t)$, B_i и моменты времени импульсного воздействия τ_i такие же, как и в системе (1), а функции $f(t, x) \in C_{tx}^{(0,1)}(t_0 \leqslant t < \infty, \|x\| < h)$ и $I_i(x) \in C(\|x\| < h)$ удовлетворяют условиям

$$\|f(t, x)\| \leqslant \alpha(t)\,\|x\|^m,\quad \|I_i(x)\| \leqslant \beta_i\,\|x\|^m,\quad m > 1. \tag{10}$$

Здесь $\alpha(t) > 0$ — непрерывная функция, характеристический показатель которой $\chi[\alpha(t)]$ равен нулю, $\beta_i \geqslant 0$, при этом $\beta_i \exp(-\varepsilon\tau_i) \to 0$, $i \to \infty$, при произвольном $\varepsilon > 0$.

Предварительно докажем лемму, являющуюся аналогом леммы Бихари для кусочно-непрерывной функции.

Лемма. *Пусть неотрицательная кусочно-непрерывная с разрывами 1-го рода при* $t = \tau_i$ *функция* $u(t)$ $(t \geqslant t_0)$ *удовлетворяет неравенству*

$$u(t) \leqslant c + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,\Phi(u(\tau))\,d\tau + \sum_{t_0<\tau_i<t} \beta_i u(\tau_i),$$

где $c > 0$, $\beta_i \geqslant 0$, $v(t) \geqslant 0$ *— непрерывная функция при* $t \geqslant t_0$, $\Phi(u)$ *— положительная непрерывная неубывающая функция при* $0 < u < \bar{u}$, $\bar{u} \leqslant \infty$.

Тогда $u(t)$ *допускает оценку*

$$u(t) \leqslant \Psi_i^{-1}\left(\int_{\tau_i}^{t} v(\tau)\,d\tau\right),\quad \tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}, \tag{11}$$

при условии, что $\int_{\tau_i}^{t} v(\tau)\,d\tau < \Psi_i(\bar{u} - 0)$, где $\Psi_i(u) = \int_{c_i}^{u} [1/\Phi(u)]\,du$,

$$c_i = (1+\beta_i)\,\Psi_{i-1}^{-1}\left(\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} v(\tau)\,d\tau\right),\;\; i=1,2,\ldots,\;\; \Psi_0(u)=\int\limits_c^u [1/\Phi(u)]\,du,\;\; \tau_0=t_0.$$

Доказательство леммы проводится по индукции с использованием на каждом промежутке $\tau_i < t < \tau_{i+1}$ непрерывности функции $u(t)$ неравенства Бихари [1].

Из леммы можно вывести ряд следствий. Приведем некоторые из них.

Следствие 1. *Если $\Phi(u)=u$, то лемма дает аналог леммы Гронуолла — Беллмана для случая кусочно-непрерывной функции.*

Действительно, в этом случае $\Psi_i(u)=\ln u/c_i$, $\Psi_i^{-1}(u)=C_i\exp u$, $c_i=(1+\beta_i)\,c_{i-1}\exp\left(\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} v(\tau)\,d\tau\right)$, поэтому из (11) следует, что

$$u(t)\leqslant c\prod_{t_0<\tau_i<t}(1+\beta_i)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau\right).$$

Следствие 2. *Если $\Phi(u)=u^m$, $m>1$, то $u(t)$ допускает оценку*

$$u(t)\leqslant\left\{c^{1-m}\prod_{t_0<\tau_i<t}(1+\beta_i)^{1-m}-(m-1)\int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau\right\}^{1/(1-m)}$$

при условии, что $c^{1-m}\prod\limits_{t_0<\tau_i<t}(1+\beta_i)^{1-m}-(m-1)\int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau>0.$

Действительно, в случае, когда $\Phi(u)=u^m$, имеем $\Psi_i(u)= (u^{1-m}-c_i^{1-m})/(1-m)$, $\Psi_i^{-1}(u)=(c_i^{1-m}+(1-m)\,u)^{1/(1-m)}$, $c_i=(1+\beta_i)\times \left[c_{i-1}^{1-m}+(1-m)\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} v(\tau)\,d\tau\right]^{1/(1-m)}$; отсюда следует доказываемое неравенство.

Для системы (9) справедлива теорема.

Теорема 6. *Пусть для системы* (9) *выполняются условия* (2), (3), (10) *и ее линейная часть правильна. Если все характеристические показатели λ_k, $k=1,\ldots,n$, линейной части рассматриваемой системы отрицательны, то тривиальное решение системы* (9) *экспоненциально устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Произведем в импульсной системе дифференциальных уравнений (9) замену переменных

$$x=y\exp(-\mu(t-t_0)), \tag{12}$$

где $0<\mu<\lambda_k$, $k=1,\ldots,n$. В результате получим систему с импульсным воздействием

$$dy/dt=C(t)\,y+g(t,y),\;\; t\neq\tau_i,\;\; \Delta y|_{t=\tau_i}=B_iy+J_i(y), \tag{13}$$

где $C(t)=A(t)+\mu E$, $g(t,y)=\exp(\mu(t-t_0))\,f(t,y\exp(-\mu(t-t_0)))$, $J_i(y)=\exp(\mu(t-t_0))\,I_i(y\exp(-\mu(t-t_0)))$, причем $\|g(t,y)\|<c_1\exp[(\varepsilon-(m-1)\mu)(t-t_0)]\,\|y\|^m$, $\varepsilon>0$, $c_1>0$, $\|J_i(y(\tau_i))\|<c_2\exp[(\varepsilon-(m-1)\mu)(\tau_i-t_0)]\,\|y(\tau_i)\|^m$, $c_2>0$, $g(t,y)\in C_{ty}^{(0,1)}(t_0\leqslant t<\infty,\ \|y\|<h\exp(\mu(t-t_0)))$, $J_i(y)\in C(\|y\|<h\exp(\mu(t-t_0)))$, $i\in N$.

Очевидно, что система

$$dy/dt=C(t)\,y,\;\; t\neq\tau_i,\;\; \Delta y|_{t=\tau_i}=B_iy \tag{14}$$

правильна (см. соотношение (7)) и ее характеристические показатели отрицательны. Поэтому, учитывая утверждение теоремы 4, можно показать, что существуют такие числа $c_3\geqslant 1$, $c_4>0$, при которых выполняются оценки $\|Y(t)\|<c_3$ $(t\geqslant t_0)$, $\|Y(t)\,Y^{-1}(\sigma)\|<c_4\exp(\varepsilon(\sigma-t_0))$, $t_0\leqslant\sigma\leqslant t$,

где $Y(t)$ $(Y(t_0) = E)$ — нормированная фундаментальная матрица системы (14).

Пусть $y(t, t_0, y_0)$ $(y(t_0) = x_0)$ — произвольное решение системы (13) с достаточно малой $\|y_0\|$ и $[t_0, t_0+T)$ — такой интервал, что $\|y(t)\| < 1$ при $t \in [t_0, t_0 + T)$ (из дальнейшего будет видно, что $T = \infty$). Рассмотрим, наряду с (13), систему уравнений

$$y(t) = Y(t)\,y(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y(t)\,Y^{-1}(\sigma)\,g(\sigma, y(\sigma))\,d\sigma + \\ + \sum_{t_0<\tau_i<t} Y(t)\,Y^{-1}(\tau_i)\,J_i(y(\tau_i)). \tag{15}$$

Из (15) с учетом свойств матрицы $Y(t)$ и функций $g(t, y)$ и $J_i(y)$ получаем при $t_0 \leqslant t < t_0 + T$

$$\|y(t)\| \leqslant c_3\|y_0\| + \int_{t_0}^{t} c_1c_4 \exp[(2\varepsilon - (m-1)\mu)(\sigma - t_0)]\,\|y(\sigma)\|^m\,d\sigma + \\ + \sum_{t_0<\tau_i<t} c_2c_4 \exp[(2\varepsilon - (m-1)\mu)(\tau_i - t_0)]\,\|y(\tau_i)\|.$$

Из последнего соотношения на основании следствия 2 из аналога леммы Бихари получаем

$$\|y(t)\| \leqslant c_3\|y_0\| \Bigl\{ \prod_{t_0<\tau_i<t} \{1 + c_2c_4 \exp[(2\varepsilon - (m-1)\mu)(\tau_i - t_0)]\}^{1-m} - \\ - (c_3\|y_0\|)^{m-1}(m-1)\int_{t_0}^{t} c_1c_4 \exp[(2\varepsilon - (m-1)\mu)(\sigma - t_0)]\,d\sigma \Bigr\}^{1/(1-m)}. \tag{16}$$

Если $\varepsilon > 0$ выбрано достаточно малым и $\|y(t_0)\|$ достаточно мало́, то из (16) с учетом (12) можно получить утверждение доказываемой теоремы. Теорема 6 распространяет критерий Ляпунова для обыкновенных дифференциальных уравнений (см., напр., [1]) на случай импульсных дифференциальных уравнений.

Установим достаточное условие устойчивости нулевого решения системы (9), не предполагая, что ее линейная часть правильна. Предварительно приведем определение меры неправильности импульсной системы дифференциальных уравнений, аналогичное соответствующему определению для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1].

Число

$$\varkappa = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k - \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left[\int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\sigma)\,d\sigma + \sum_{t_0<\tau_i<t} \ln|\det(E + B_i)|\right]$$

назовем мерой неправильности системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1). Здесь через λ_k, как и выше, обозначены характеристические показатели системы (1). Предполагается, как и ранее, что выполняются условия (2) и (3). Необходимым и достаточным условием правильности импульсной системы (1) является, очевидно, равенство $\varkappa = 0$.

Т е о р е м а 7. *Если в системе* (9) *функции* $f(t, x)$ *и* $I_i(x)$ *удовлетворяют условиям* (10) *и выполняется неравенство* $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k \leqslant -\varkappa(m-1)^{-1} \leqslant \leqslant 0$, *где* $\varkappa$ — *мера неправильности линейной части системы* (9), *то нулевое решение рассматриваемой нелинейной системы асимптотически устойчиво по Ляпунову при* $t\to\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая

$$x = X(t)\exp(-Dt)\,y, \tag{17}$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица импульсной системы

$$dx/dt = A(t)\,x, \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x,$$

$D = \mathrm{diag}(\lambda_1 + \mu, \ldots, \lambda_n + \mu)$, $\varkappa(m-1)^{-1} < \mu < -\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k$, приходим к системе дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$dy/dt = Dy + g(t, y), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta y|_{t=\tau_i} = J_i(y), \tag{18}$$

где $g(t, y) = \exp(Dt) X^{-1}(t) f(t, X(t)\exp(-Dt) y)$, $I_i(y) = \exp(D\tau_i) X^{-1}(\tau_i) \times (E + B_i)^{-1} I_i(X(\tau_i)\exp(-D\tau_i) y)$. Используя проводившийся выше аналог формулы Остроградского — Лиувилля для систем с импульсным воздействием и учитывая, что $\varkappa(m-1)^{-1} < \mu < -\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k$, нетрудно убедиться в том, что $\chi[\exp(Dt) X^{-1}(t)] \leqslant \varkappa + \mu$, $\chi[X(t)\exp(-Dt)] \leqslant -\mu$, $\| X(t) \times \exp(-Dt) \| \leqslant M < \infty$, $t \geqslant t_0$. Ввиду этих неравенств

$$\| g(t, y) \| \leqslant \rho \| y \|^m, \quad \| J_i(y) \| \leqslant \rho \| y \|^m, \quad \rho > 0, \quad m > 1, \quad \| y \| < h/M,$$
$$t \geqslant t_0, \quad i \in N.$$

Таким образом, для системы (18) выполняются условия теоремы 5 из [2], и поэтому ее нулевое решение асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \to \infty$. Возвращаясь к системе (9), нетрудно убедиться в справедливости доказываемого утверждения.

Теорема 7 распространяет соответствующий результат из [4] для систем вида

$$dx/dt = A(t)x + f(t, x)$$

на случай систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени.

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М. : Наука, 1967.—472 с.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием.— Дифференц. уравнения, 1981, **17**, № 11, с. 1995—2001.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— К. : Изд-во КГУ, 1980.—80 с.
4. *Массера Х. Л.* К теории устойчивости.— В кн.: Математика. Сб. переводов.— М. : Изд-во иностр. литер., 1957, № 4, с. 81—101.

Киев. гос. ун-т

Поступила в редакцию 22.03.83