УДК 519.21

М. Н. Марушин

О предельном Г-распределении для сумм случайных величин, связанных в неоднородную цепь Маркова с двумя состояниями

Рассматривается цепь Маркова в виде последовательности серий величин $x_{n1}, \ldots, x_{nk}$, каждая из которых принимает только значения 0 и 1. Предполагается, что $k = k(n)$ — неубывающая последовательность положительных целых чисел, стремящаяся к ∞. Переходные вероятности

$$p_{s,t}^{(i)} = P(x_{ni} = t \mid x_{n,i-1} = s), \quad s, t = 0, 1,$$

и начальное распределение $P(x_{n1} = 1) = p_{n1}$ зависит от n, которое в обозначениях переходных вероятностей опускается.

Положим $\Pi_{i+1,j+i} = \prod_{t=1}^{j} (p_{11}^{(i+t)} - p_{01}^{(i+t)})$, $\Pi_{i+1,i} = 1$, $\overset{+}{T}_i = \sum_{j=0}^{k-i} |\Pi_{i+1,i+j}|$, $M_{nk} = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \overset{+}{T}_i$, $\sigma_{nk} = CM_{nk}$, $C > 0$ — константа. Условимся говорить, что к сумме S_{nk} применимо предельное Г-распределение с параметром $a > 0$, если

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_{nk}}{\sigma_{nk}} < x\right) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt, \tag{1}$$

где $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$.

Говорят, что к сумме S_{nk} применима предельная теорема моментов Г-распределения с параметром $a > 0$, если для любого натурального числа m выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} M \left| \frac{S_{nk}}{\sigma_{nk}} \right|^m = a(a+1) \ldots (a+m-1). \tag{2}$$

В данной работе устанавливаются необходимые и достаточные условия применимости к сумме S_{nk} предельной теоремы моментов Г-распределения.

Введем обозначения

$$\delta_{nk} = \frac{1}{\sigma_{nk}} \sum_{i=1}^{k-1} p_{01}^{(i+1)} \overset{+}{T}_{i+1},$$

$$T_{i,j}^{(\alpha)} = \sum_{t=0}^{j-1} \Pi_{i+1,i+\alpha-1+t} C_{\alpha-1+t}^{\alpha-1},\ T_i^{(\alpha)} = T_{i,k-i-\alpha+2}^{(\alpha)}.$$

Теорема. *Пусть* $a > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \max_{2\leqslant i\leqslant k} p_{01}^{(i)} = 0, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \delta_{nk} = \delta < \infty, \tag{4}$$

$$\sigma_{nk} \to \infty. \tag{5}$$

Если при всех натуральных числах β

$$\lim_{n\to\infty} T_1^{(\beta)}/\sigma_{nk}^{\beta} = 0, \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_{nk}^{\beta}} \sum_{i=1}^{k-\beta} p_{01}^{(i+1)} T_{i+1}^{(\beta)} = \frac{a}{\beta}, \tag{7}$$

то к сумме S_{nk} *применима предельная теорема моментов* Γ*-распределения. Наоборот, если при любом предельном начальном распределении* $p_1 = \lim_{n\to\infty} p_{n1}$ *к сумме* S_{nk} *применима предельная теорема моментов* Γ*-распределения, то соблюдаются условия* (6) *и* (7).

Следствие. *Если соблюдаются условия теоремы, то к сумме* S_{nk} *применимо предельное* Γ*-распределение с параметром* $a > 0$.

Доказательство теоремы. Достаточность. Обозначим множества

$$N_j^{(m)} = \left\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_j)\colon \begin{matrix} \alpha_1 + \ldots + \alpha_j = m \\ \alpha_t > 0,\ t = 1, \ldots, j \end{matrix}\right\},$$

$$\mathfrak{M}_j^{(k)} = \left\{(i_1, \ldots, i_j)\colon \begin{matrix} j \leqslant i_1 + \ldots + i_j \leqslant k \\ i_t > 0,\ t = 1, \ldots, j \end{matrix}\right\}.$$

В соответствии с полиномиальной формулой

$$MS_{nk}^m = \sum_{j=1}^{m} \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_j)\in N_j^{(m)}} \frac{m!}{\alpha_1! \ldots \alpha_j!} \sum_{(i_1,\ldots,i_j)\in\mathfrak{M}_j^{(k)}} Mx_{ni_1}^{\alpha_1} \ldots x_{n,i_1+\ldots+i_j}^{\alpha_j}.$$

Так как

$$Mx_{ni_1}^{\alpha_1} \ldots x_{n,i_1+\ldots+i_j}^{\alpha_j} = p_{n1} p_{11}^{(i_1,i_1+i_2} \ldots p_{11}^{(i_1+\ldots+i_{j-1},i_1+\ldots+i_j)},$$

$$p_{11}^{(i,i+j)} = \Pi_{i+1,i+j} + P_{i+1,i+j},$$

где

$$P_{i+1,i+j} = \sum_{t=1}^{j} p_{01}^{(i+t)} \Pi_{i+t+1,i+j},\quad P_{21} = 0,$$

то

$$MS_{nk}^m = \sum_{j=1}^{m} \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_j)\in N_j^{(m)}} \frac{m!}{\alpha_1! \ldots \alpha_j!} \sum_{(i_1,\ldots,i_j)\subset\mathfrak{M}_j^{(k)}} (p_{n1}\Pi_{2i_1} + P_{2i_1}) \times$$

$$\times \prod_{s=1}^{j-1} ((v)_{i_{s+1}} + (p)_{i_{s+1}}), \tag{8}$$

где $(p)_{i_{s+1}} = P_{i_1+\ldots+i_s+1,i_1+\ldots+i_{s+1}}$, $(v)_{i_{s+1}} = \Pi_{i_1+\ldots+i_s+1,i_1+\ldots+i_{s+1}}$. Перемножив двучлены в правой части (8), получим равенство

$$MS_{nk}^m = \sum_{t=1}^{m} \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_t)\in N_t^{(m)}} \frac{m!}{\alpha_1! \ldots \alpha_t!} \left\{ p_{n1} \left[\sum_{(i_1,\ldots,i_t)\in\mathfrak{M}_t^{(k)}} (v^{(t)})_{i_t} + \right.\right.$$

$$+\sum_{l=1}^{t-1}\sum_{\{1\leqslant\gamma_0<\dots<\gamma_l=t\}}\sum_{(i_1,\dots,i_t)\in\mathfrak{M}_t^{(k)}}(v^{(\gamma_0)})_{i_{\gamma_0}}\prod_{r=1}^{l}(pv^{(\beta_r)})_{i_{\gamma_r}}\Bigg]+$$

$$+\sum_{(i_1,\dots,i_t)\in\mathfrak{M}_t^{(k)}}P_{2i_1}(v^{(t-1)})_{i_t}+\sum_{l=1}^{t-1}\sum_{\{1\leqslant\gamma_0<\dots<\gamma_l=t\}}\sum_{(i_1,\dots,i_t)\in\mathfrak{M}_t^{(k)}}P_{2i_1}(v^{(\gamma_0-1)})_{i_{\gamma_0}}\times$$

$$\times\prod_{r=1}^{l}(pv^{(\beta_r)})_{i_{\gamma_r}}\Bigg|,$$

где $\beta_r=\gamma_r-\gamma_{r-1}$, $\gamma_0=\beta_0$, $(v^{(\gamma)})_{i_t-h}=\Pi_{i_1+\dots+i_{t-\gamma}-h+2,i_1+\dots+i_t-h}$, $t\geqslant\gamma$, $(pv^{(\gamma_r)})_{i_{\gamma_r}}=(p)_{i_{\gamma_{r-1}+1}}(v^{(\beta_r)})_{i_{\gamma_r}}$. Так как

$$\sum_{(i_1,\dots,i_t)\in\mathfrak{M}_t^{(k)}}(v^{(t)})_{i_t}=T_1^{(t)},$$

$$\sum_{(i_1,\dots,i_t)\in\mathfrak{M}_t^{(k)}}P_{2i_1}(v^{(t-1)})_{i_t}=\sum_{l=1}^{k-t}p_{01}^{(l+1)}T_{l+1}^{(t)},$$

$$\sum_{(i_1,\dots,i_{\gamma_l})\in\mathfrak{M}_{\gamma_l}^{(k)}}(v^{(\gamma_0)})_{i_{\gamma_0}}\prod_{r=1}^{l}(pv^{(\beta_r)})_{i_{\gamma_r}}=\sum_{(i_0,\dots,i_{l-1})\in\mathfrak{M}_l^{(k-\gamma_l+l)}}T_{1i_0}^{(\beta_0)}\prod_{r=1}^{l}p_{01}^{(\nu_r)}T_{\nu_r,i_r}^{(\beta_r)},$$

$$\sum_{(i_1,\dots,i_{\gamma_l})\in\mathfrak{M}_{\gamma_l}^{(k)}}P_{2i_1}(v^{(\gamma_0-1)})_{i_{\gamma_0}}\prod_{r=1}^{l}(pv^{(\beta_r)})_{i_{\gamma_r}}=\sum_{(i_0,\dots,i_l)\in\mathfrak{M}_{l+1}^{(k-\gamma_l+l)}}\prod_{r=0}^{l}p_{01}^{(\eta_1)}T_{\eta_r,i_{r+1}}^{(\beta_r)},$$

где $\gamma_t=\beta_0+\dots+\beta_t$, $t=0,1,\dots,l$, $\nu_r=\sum_{s=0}^{r-1}(i_t+\beta_t)-r+1$, $\nu_0=1$, $\eta_t=$ $=\nu_t+i_t$, $T_{\nu_l,i_l}^{(\beta_l)}=T_{\nu_l}^{(\beta_l)}$, $T_{\eta_l,i_{l+1}}^{(\beta_l)}=T_{\eta_l}^{(\beta_l)}$, то

$$\frac{MS_{nk}^m}{\sigma_{nk}^m}=\sum_{t=1}^{m}\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_t)\in N_t^{(m)}}\frac{m!}{\alpha_1!\dots\alpha_t!}\sum_{l=0}^{t-1}\sum_{(\beta_0,\dots,\beta_l)\in B_{t,l+1}}(p_{n1}h_{\beta_0,\dots,\beta_l;n}^{(m)}+H_{\beta_0,\dots,\beta_l;n}^{(m)}),\tag{9}$$

где

$$B_{t,l+1}=\left\{(\beta_0,\dots,\beta_l):\begin{array}{l}\beta_0+\dots+\beta_l=t\\0\leqslant\beta_0\leqslant\beta_1\leqslant\dots\leqslant\beta_l\end{array}\right\},$$

$$h_{\beta_0,\dots,\beta_l;n}^{(m)}=\frac{1}{\sigma_{nk}^m}\sum_{(\beta_0',\dots,\beta_l')\in P_{\beta_0,\dots,\beta_l}}\sum_{(i_0,\dots,i_l)\in\mathfrak{M}_{l+1}^{(k-t+l)}}T_{1i_0}^{(\beta_0')}\prod_{r=1}^{l}p_{01}^{(\nu_r)}T_{\nu_r,i_r}^{(\beta_r')},$$

$$h_{\beta_0;n}^{(m)}=\frac{1}{\sigma_{nk}^m}T_1^{(\beta_0)},\qquad l\geqslant1,\quad H_{\beta_0;n}^{(m)}\frac{1}{\sigma_{nk}^m}\sum_{i_0=1}^{k-\beta_0}p_{01}^{(i_0+1)}T_{i_0+1}^{(\beta_0)}$$

$$H_{\beta_0,\dots,\beta_l;n}^{(m)}=\frac{1}{\sigma_{nk}^m}\sum_{(\beta_0',\dots,\beta_l')\in P_{\beta_0,\dots,\beta_l}}\sum_{(i_0,\dots,i_l)\in\mathfrak{M}_{l+1}^{(k-t+l)}}\prod_{r=0}^{l}p_{01}^{(\eta_r)}T_{\eta_r,i_{r+1}}^{(\beta_r')},$$

а множество $P_{\beta_0,\dots,\beta_l}$ — совокупность всевозможных различных перестановок из натуральных чисел $\beta_0,\dots,\beta_l$.

Положим $\overline{T}^{(\beta)}_{i,j} = T^{(\beta)}_{i} - T^{(\beta)}_{i,j}$. Тогда $h^{(m)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n}$, $H^{(m)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n}$ представляются следующим образом: $h^{(m)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} = Q^{(1)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} + R^{(1)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n}$, $H^{(m)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} = Q^{(2)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} + R^{(2)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n}$, где

$$Q^{(1)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} = \frac{1}{\sigma^m_{nk}} \sum_{(\beta'_0,\ldots,\beta'_l)\in P_{\beta_0,\ldots,\beta_l}} \sum_{(i_0,\ldots,i_l)\in\mathfrak{M}^{(k-t+l)}_{l+1}} T_1^{(\beta'_0)} \prod_{r=0}^{l} p_{01}^{(\nu_r)} T_{\nu_r}^{(\beta'_r)},$$

$$Q^{(2)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} = \frac{1}{\sigma^m_{nk}} \sum_{(\beta'_0,\ldots,\beta'_l)\in P_{\beta_0,\ldots,\beta_l}} \sum_{(i_0,\ldots,i_l)\in\mathfrak{M}^{(k-t+l)}_{l+1}} \prod_{r=0}^{l} p_{01}^{(\eta_r)} T_{\eta_r}^{(\beta'_r)}.$$

а суммы $R^{(1)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n}$, $R^{(2)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n}$ состоят из слагаемых, каждое из которых — произведение множителей $p_{01}^{(h_r)} T_{h_r}^{(\beta'_r)}$, $\overline{T}^{(\beta'_r)}_{h_r,i_{r+1}} p_{01}^{(h_r+1)}$, $p_{01}^{(h_r)} \overline{T}^{(\beta_r)}_{h_r,i_{r+1}} p_{01}^{(h_r+1)}$, $h_r = \nu_r, \eta_r$, при этом любое такое произведение содержит по крайней мере один из множителей $\overline{T}^{(\beta'_r)}_{h_r,i_{r+1}} p_{01}^{(h_r+1)}$, или $p_{01}^{(h_r)} \overline{T}^{(\beta'_r)}_{h_r,i_{r+1}} p_{01}^{(h_r+1)}$. Эта структурная особенность слагаемых сумм $R^{(1)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n}$, $R^{(2)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n}$ позволяет оценить их следующим образом:

$$R^{(1)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} = O(\varepsilon_{nk}), \qquad R^{(2)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} = O(\varepsilon_{nk}), \tag{10}$$

где $\varepsilon_{nk} = \max_{2\leqslant i\leqslant k} p_{01}^{(i)}$. Очевидно, в силу (6)

$$\lim_{n\to\infty} Q^{(1)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} = 0. \tag{11}$$

Исследуя сумму $Q^{(2)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n}$, выделим среди совокупности чисел $\beta_0, \ldots, \beta_l$ одинаковые. С этой целью положим $\beta_0 = \beta_1 = \ldots = \beta_{n_1-1} = \overline{\beta}_1$, $\beta_{h_1+\ldots+h_s} = \beta_{h_1+\ldots+h_s+1} = \ldots = \beta_{h_1+\ldots+h_{s+1}-1} = \overline{\beta}_{s+1}$, $h_s \geqslant 1$, $s = 1, \ldots, r$; $h_1 + \ldots + h_{r+1} = l + 1$. Нетрудно проверить справедливость равенства

$$Q^{(2)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} = \frac{1}{h_1!\ldots h_{r+1}!\sigma^{m-l}_{nk}} \prod_{s=1}^{r+1} (L_{nk}^{(\overline{\beta}_s)})^{h_s} + O(\varepsilon_{nk}), \tag{12}$$

где $h_1\overline{\beta}_1 + \ldots + h_{r+1}\overline{\beta}_{r+1} = t$, $L_{nk}^{(\overline{\beta}_s)} = \frac{1}{\sigma_{nk}^{\overline{\beta}_s}} \sum_{i=1}^{k-\overline{\beta}_s} p_{01}^{(i+1)} T_{i+1}^{(\overline{\beta}_s)}$, при этом

$$\lim_{n\to\infty} Q^{(2)}_{\beta_0,\ldots,\beta_l;n} = 0, \tag{13}$$

когда $1 \leqslant t \leqslant m-1$. Поэтому согласно выражениям (9) — (13)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{MS^m_{nk}}{\sigma^m_{nk}} = m! \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{\overline{B}_{r,m}} \frac{1}{h_1!\ldots h_{r+1}!} \prod_{s=1}^{r+1} (\lim_{n\to\infty} L_{nk}^{(\overline{\beta}_s)})^{h_s}, \tag{14}$$

где

$$B_{r,m} = \left\{ \begin{matrix} (\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_{r+1}) & h_1\overline{\beta}_1 + \ldots + h_{r+1}\overline{\beta}_{r+1} = m \\ & : 0 < \overline{\beta}_1 < \ldots < \overline{\beta}_{r+1} \leqslant m \\ (h_1, \ldots, h_{r+1}) & h_i > 0,\ i = 1, \ldots, r+1 \end{matrix} \right\}$$

Так как по предположению $\lim_{n\to\infty} L_{nk}^{(\overline{\beta}_s)} = a/\overline{\beta}_s$, то можно показать, что правая часть (14) равна $a(a+1)\ldots(a+m-1)$, а к сумме S_{nk} применима предельная теорема моментов Г-распределения с параметром $a > 0$.

Необходимость. Пусть $p=0$. Если $m=1$, то из равенства (2) имеем

$$\lim_{n\to\infty} L_{nk}^{(1)} = a. \tag{15}$$

Предположим, что, кроме (15), выполняются еще равенства

$$\lim_{n\to\infty} L_{nk}^{(\beta)} = a/\beta, \quad \beta = 2, 3, \ldots, m-1. \tag{16}$$

Так как (14) остается в силе и при доказательстве необходимости условий теоремы, то из этого соотношения находим $m! \lim\limits_{n\to\infty} L_{nk}^{(m)} = a(a+1)\ldots$ $\ldots(a+m-1) - \lim\limits_{n\to\infty} H_{nk}^{(m)}$, где

$$\lim_{n\to\infty} H_{nk}^{(m)} = m!\left[\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{\bar{B}_{r,m}} \frac{1}{h_1!\ldots h_{r+1}!}\prod_{s=1}^{r+1}\left(\frac{a}{\bar{\beta}_s}\right)^{h_s} + \sum_{\substack{h_1\bar{\beta}_1=m\\ h_1\neq 1}} \frac{1}{h_1}\left(\frac{a}{\bar{\beta}_1}\right)^{h_1}\right] =$$

$$= a(a+1)\ldots(a+m-1) - (m-1)!\,a.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} L_{nk}^{(m)} = a/m$.

Теорема доказана.

Для иллюстрации теоремы приведем пример. Пусть $p_{01}^{(i)} = b/i$, $p_{10}^{(i)} = a/i^{\alpha}$, $k=n$, где $0<\alpha<1$, $a>0$, $b>0$. Оценим $M_n = \max\limits_{1\leqslant h\leqslant n} T_h(n)$, где $T_h(n) = 1 + \sum\limits_{t=h+1}^{n}\prod\limits_{i=h+1}^{t}\left(1-\frac{a}{i^{\alpha}}-\frac{b}{i}\right)$, $T_n(n)=1$. Каково бы ни было натуральное число h,

$$T_h(n) \leqslant 1 + \sum_{t=h+1}^{n}\left(1-\frac{a}{n^{\alpha}}\right)^{t-h} = A_n,$$

где

$$A_n \sim n^{\alpha}/a. \tag{17}$$

С другой стороны, если $h = n^{\alpha}-1$, то

$$T_h(n) \geqslant 1 + \sum_{t=n^{\alpha}}^{n}\left(1-\frac{a}{n^{\alpha^2}}-\frac{b}{n^{\alpha}}\right)^{t-n^{\alpha}+1} \geqslant \left(1-\left(1-\frac{a+b}{n^{\alpha}}\right)^{n-n^{\alpha}+2}\right)\Big/$$

$$\Big/\left(\frac{a}{n^{\alpha^2}}+\frac{b}{n^{\alpha}}\right) = a_n,$$

где

$$a_n \sim n^{\alpha}/b. \tag{18}$$

Принимая во внимание определение нормирующей величины $\sigma_n = CM_n$ суммы $S_n = x_1+\ldots+x_n$ и учитывая (17) и (18), можно положить $\sigma_n = n^{\alpha}$. Применим теорему Штольца [1] к нахождению $h_m = \lim\limits_{n\to\infty}(T_1^{(m)}(n)/\sigma_n^m)$, $H_m = \lim\limits_{n\to\infty}(u_n^{(m)}/\sigma_n^m)$, где $T_h^{(m)}(n) = \sum\limits_{t=0}^{n-m-h+1}\Pi_{h+1,h+m-1+t}C_{m-1+t}^{m-1}$, $u_n^{(m)} = \sum\limits_{i=2}^{n-m+1}p_{01}^{(i)}T_i^{(m)}(n)$.

Так как

$$T_1^{(m)}(n) - T_1^{(m)}(n-1) = \Pi_{2,n}C_{n-1}^{m-1}, \quad u_n^{(m)} - u_{n-1}^{(m)} = \sum_{i=2}^{n-m+1} p_{01}^{(i)}\Pi_{i+1,n}C_{n-i}^{m-1} = P_n^{(m)},$$

$$n^{\alpha m} - (n-1)^{\alpha m} \sim \alpha m n^{\alpha m-1},$$

то согласно этой теореме

$$h_m = \frac{1}{\alpha m} \lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha m} \Pi_{2n} C_{n-1}^{m-1},$$

$$H_m = \frac{1}{\alpha m} \lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha m} P_n^{(m)}. \qquad (19)$$

Легко подсчитать, что

$$\Pi_{2n} \leqslant (1 - a/n^{\alpha})^{n-1} \sim \exp(-a(n-1)/n^{\alpha}).$$

Поэтому $h_m = 0$. Исследуем равенство

$$P_n^{(m)} - P_{n-1}^{(m)} \Pi_{nn} = \Pi_{nn} P_{n-1}^{(m-1)}, \qquad \Pi_{nn} P_{n-1}^{(0)} = p_{01}^{(n)}. \qquad (20)$$

Введем обозначения $\Omega_n^{(m)} = n^{1-m\alpha} P_n^{(m)}$, $a_{nm} = \left[1 - \Pi_{nn}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{1-m\alpha}\right] n^{\alpha}$, $b_{nm} = \Pi_{nn} P_{n-1}^{(m-1)} n^{1-\alpha(m-1)}$. В новых обозначениях равенство (20) можно записать в эквивалентном виде

$$n^{\alpha}(\Omega_n^{(m)} - \Omega_{n-1}^{(m)}) + a_{nm}\Omega_{n-1}^{(m)} = b_{nm}. \qquad (21)$$

Если $m = 1$, то $\lim_{n\to\infty} a_{n1} = a$, $\lim_{n\to\infty} b_{n1} = b$. Отсюда, в силу теоремы, доказанной в работе [2], следует, что $\lim_{n\to\infty} \Omega_n^{(1)} = b/a$, и, следовательно, в виду (19) $H_1 = b/a$.

Аналогично, опираясь на равенство (21), можно показать, что, каково бы ни было натуральное число m, $H_m = b/\alpha m a^m$.

Наконец, не ограничиваясь общностью решаемой задачи, можно предположить, что $\max_{2\leqslant i\leqslant k} p_{01}^{(i)} \to 0$, $n \to \infty$. Таким образом, все условия теоремы выполнены и поэтому $\lim_{n\to\infty} MS_n^m/\sigma_n^m = (b/\alpha a^m)(b/\alpha + 1) \dots (b/\alpha + m - 1)$, каково бы ни было натуральное число m.

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n/n^{\alpha} < x) = \frac{a^{b/\alpha}}{\Gamma(b/\alpha)} \int_0^x t^{\frac{b}{\alpha}-1} e^{-at} dt.$$

1. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т.— М.: Физматгиз, 1958.— Т. 1. 607 с.
2. *Watanabe M.* On a determinate system of non-independent. Trials.— Tonoku Math. J., 1919, **15**, р. 22—35.

Киев. ин-т
инженеров гражданской авиации

Поступила в редакцию
11.11.82