УДК 517.948

С. М. Загороднюк (Харьков. нац. ун-т)

О СИЛЬНОЙ МАТРИЧНОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ ГАМБУРГЕРА

We obtain necessary and sufficient conditions for the sovability of the strong matrix Hamburger moment problem. We decribe all solutions of the moment problem by using fundamental results of A. V. Shtraus on generalized resolvents of symmetric operators.

Отримано необхідні та достатні умови того, що сильна матрична проблема моментів Гамбургера має розв'язок. Описано всі розв'язки проблеми моментів. При цьому використано фундаментальні результати А. В. Штрауса про узагальнені резольвенти симетричних операторів.

1. Введение. Целью данной работы является получение условий разрешимости сильной матричной проблемы моментов Гамбургера и описание ее решений. Напомним, что сильная матричная проблема моментов Гамбургера состоит в нахождении непрерывной слева неубывающей матрицы-функции $M(x) = (m_{k,l}(x))_{k,l=0}^{N-1}$ на $\mathbb{R}$, $M(-\infty) = 0$, такой, что

$$\int_{\mathbb{R}} x^n dM(x) = S_n, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — заданная последовательность эрмитовых комплексных $(N \times N)$-матриц (моментов), $N \in \mathbb{N}$.

Сильная (скалярная) проблема моментов Гамбургера впервые появилась в начале восьмидесятых годов прошлого века в связи с изучением непрерывных дробей в работах W. B. Jones, O. Njåstad, W. J. Thron [1, 2]. В частности, были установлены условия разрешимости этой задачи [2]. В 1996 году в работе [3] были описаны решения скалярной сильной проблемы моментов Гамбургера при некотором условии регулярности (см. также обзор [4]).

Сильная матричная проблема моментов Гамбургера впервые возникла в 2006 году в работе К. К. Симонова [5]. Рассмотрим следующие блочные матрицы, составленные из моментов:

$$\Gamma_n = (S_{i+j})_{i,j=-n}^{n} = \begin{pmatrix} S_{-2n} & \dots & S_{-n} & \dots & S_0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ S_{-n} & \dots & S_0 & \dots & S_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ S_0 & \dots & S_n & \dots & S_{2n} \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2}$$

При условии строгой положительности матриц Γ_n К. К. Симонов рассматривает и изучает матричные многочлены Лорана. В пространстве этих многочленов оператор умножения на независимую переменную порождает симметрический оператор. При условии вполне неопределенности (индекс дефекта оператора равен (N, N)) К. К. Симоновым установлена параметризация решений сильной матричной проблемы моментов Гамбургера. Также в работе [5] установлены (при позитивности матриц Γ_n) необходимые и достаточные условия единственности решения сильной матричной проблемы моментов Гамбургера.

В данной работе мы установим, что условия

$$\Gamma_n \geq 0, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{3}$$

являются необходимыми и достаточными условиями разрешимости проблемы моментов (1). В случае, когда эти условия выполнены, можно ввести некоторый оператор сдвига в абстрактном гильбертовом пространстве. Этот оператор симметричен, обратим и его самосопряженные расширения порождают все решения проблемы моментов. Такой подход, позволяющий рассматривать одновременно и вырожденные случаи задачи, был приведен в [6] для случая классической проблемы моментов Гамбургера. Для описания всех решений воспользуемся фундаментальными результатами А. В. Штрауса об обобщенных резольвентах симметрических операторов [7].

Введем необходимые обозначения. Как обычно, через $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ обозначаем множества вещественных, комплексных, натуральных, целых и неотрицательных целых чисел соответственно. Пространство n-мерных комплексных векторов $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ обозначим через $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Если $a \in \mathbb{C}^n$, то a^* обозначает комплексно сопряженный вектор. Посредством $\mathbb{P}_L$ обозначаем пространство комплексных многочленов Лорана, т. е. функций вида $\sum_{k=a}^{b} \alpha_k x^k$, $a,\ b \in \mathbb{Z}$: $a \le b$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$. Через $\mathbb{P}_{L,d}$ обозначаем пространство комплексных многочленов Лорана вида $\sum_{k=-d}^{d} \alpha_k x^k$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$. Пусть $M(x)$ является непрерывной слева неубывающей матрицей-функцией $M(x) = (m_{k,l}(x))_{k,l=0}^{N-1}$ на $\mathbb{R}$, $M(-\infty) = 0$, и $\tau_M(x) := \sum_{k=0}^{N-1} m_{k,k}(x)$; $\Psi(x) = (dm_{k,l}(x)/d\tau_M)_{k,l=0}^{N-1}$. Через $L^2(M)$ обозначаем множество (классов эквивалентности) векторнозначных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$, таких, что (см., например, [8])

$$\|f\|^2_{L^2(M)} := \int_{\mathbb{R}} f(x)\Psi(x)f^*(x)d\tau_M(x) < \infty.$$

Пространство $L^2(M)$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(f,g)_{L^2(M)} := \int_{\mathbb{R}} f(x)\Psi(x)g^*(x)d\tau_M(x), \qquad f,\ g \in L^2(M).$$

Если H — гильбертово пространство, то $(\cdot,\cdot)_H$ и $\|\cdot\|_H$ означают скалярное произведение и норму в H соответственно. Индексы могут опускаться в очевидных случаях.

Для линейного оператора A в H обозначаем через $D(A)$ его область определения, через $R(A)$ его область значений, через $\operatorname{Ker} A$ его ядро и через A^* сопряженный оператор, если он существует. Если A обратим, то A^{-1} обозначает обратный оператор. $\overline{A}$ означает замыкание оператора, если оператор допускает замыкание. Если A ограничен, то $\|A\|$ обозначает его норму. Для произвольного набора элементов $\{x_n\}_{n\in A}$ из H обозначаем через $\operatorname{Lin}\{x_n\}_{n\in A}$ и $\operatorname{span}\{x_n\}_{n\in A}$ линейную оболочку и замкнутую линейную оболочку (в метрике H) соответственно (A — произвольное множество индексов). Для множества $M \subseteq H$ обозначаем через $\overline{M}$ замыкание множества M по норме H. E_H обозначает единичный оператор в H, т. е. $E_H x = x$, $x \in H$. Если H_1 —

подпространство в H, то $P_{H_1} = P_{H_1}^H$ является оператором ортогонального проектирования на H_1 в H.

2. Разрешимость и описание решений. Рассмотрим сильную матричную проблему моментов Гамбургера (1). Условия (3) являются необходимыми условиями разрешимости задачи (1). Действительно, предположим, что задача имеет решение $M(x)$. Возьмем произвольную функцию вида $a(x) = (a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{N-1}(x))$, где

$$a_j(x) = \sum_{k=-n}^{n} A_{j,k} x^k, \qquad A_{j,k} \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Эта функция принадлежит $L^2(M)$ и

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} a(x) dM(x) a^*(x) = \sum_{k,l=-n}^{n} \int_{\mathbb{R}} (A_{0,k}, A_{1,k}, \ldots, A_{N-1,k}) x^{k+l} dM(x) \,*$$

$$* \,(A_{0,l}, A_{1,l}, \ldots, A_{N-1,l})^* = \sum_{k,l=-n}^{n} (A_{0,k}, A_{1,k}, \ldots, A_{N-1,k}) S_{k+l} \,*$$

$$* \,(A_{0,l}, A_{1,l}, \ldots, A_{N-1,l})^* = A \Gamma_n A^*,$$

где

$$A = (A_{0,-n}, A_{1,-n}, \ldots, A_{N-1,-n}, A_{0,-n+1}, A_{1,-n+1}, \ldots$$

$$\ldots, A_{N-1,-n+1}, \ldots, A_{0,n}, A_{1,n}, \ldots, A_{N-1,n});$$

здесь мы воспользовались правилами умножения блочных матриц.

Будем предполагать далее, что условия (3) являются выполненными. Пусть $S_i = (s_{i;k,l})_{k,l=0}^{N-1}$, $s_{i;k,l} \in \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим бесконечную блочную матрицу

$$\Gamma = (S_{i+j})_{i,j=-\infty}^{\infty} = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \ldots & S_{-2n} & \ldots & S_{-n} & \ldots & S_0 & \ldots \\ \ldots & \vdots & & \vdots & & & \ldots \\ \ldots & S_{-n} & \ldots & \boxed{S_0} & \ldots & S_n & \ldots \\ \ldots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ldots \\ \ldots & S_0 & \ldots & S_n & \ldots & S_{2n} & \ldots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где выделенный элемент соответствует $i = j = 0$. Взяв в качестве нулевой строки и нулевого столбца ту строку и тот столбец, в которых находится левый верхний элемент выделенной матрицы $\boxed{S_0}$, проведем нумерацию в возрастающем порядке строк и столбцов Γ. Элемент (комплексное число), стоящий в k-й строке и l-м столбце, обозначим через $\gamma_{k,l}$, $-\infty < k$, $l < +\infty$. При этом будут выполнены равенства

$$\gamma_{rN+j,tN+n} = s_{r+t;j,n}, \qquad r, \ t \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq j, \ n \leq N-1. \tag{5}$$

Таким образом, блочную матрицу Γ можно также рассматривать как скалярную бесконечную матрицу $\Gamma = (\gamma_{k,l})_{k,l=-\infty}^{\infty}$. Условие (3) равносильно тому, что

$$(\gamma_{k,l})_{k,l=-r}^{r} \geq 0, \qquad r \in \mathbb{Z}_+. \tag{6}$$

Справедлива следующая теорема (см., например, [9, с. 361 – 363]).

Теорема 1. *Пусть задана некоторая бесконечная комплексная матрица* $\Gamma = (\gamma_{k,l})_{k,l=-\infty}^{\infty}$, $\gamma_{k,l} \in \mathbb{C}$. *Если выполнено соотношение* (6), *то найдутся гильбертово пространство* H *и набор элементов* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *в* H *такие, что*

$$(x_n, x_m)_H = \gamma_{n,m}, \qquad n, m \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

При этом $\operatorname{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = H$.

Доказательство. Рассмотрим пространство V бесконечных комплексных последовательностей

$$(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\ldots, u_{-1}, \boxed{u_0}, u_1, \ldots\right), \qquad u_n \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим элементы x_j этого пространства, у которых j-я компонента равна единице, а остальные равны нулю $(j \in \mathbb{Z})$. Заметим, что элементы $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ линейно независимы и $V = \operatorname{Lin}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Определим функционал

$$[x, y] = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \gamma_{n,m} a_n \overline{b_m} \tag{8}$$

для $x, y \in V$,

$$x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x_n, \qquad y = \sum_{m\in\mathbb{Z}} b_m x_m, \qquad a_n, b_m \in \mathbb{C}.$$

Пространство V с функционалом $[\cdot,\cdot]$ является квазигильбертовым. Проводя факторизацию и пополняя его [10], получаем гильбертово пространство H и набор элементов $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (мы сохранили для класса эквивалентности, порожденного элементом x_n, обозначение x_n) в H такие, что выполнено (7). Если $\operatorname{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \neq H$, то требуемым пространством будет $\operatorname{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Теорема доказана.

Из равенств (5) следует, что

$$\gamma_{a\pm N,b} = \gamma_{a,b\pm N}, \qquad a, b \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Действительно, для произвольных $a = rN + j$, $b = tN + n$, $0 \leq j, n \leq N-1$, $r, t \in \mathbb{Z}$, справедливо

$$\gamma_{a\pm N,b} = \gamma_{(r\pm1)N+j,tN+n} = s_{r+t\pm1;j,n} = \gamma_{rN+j,(t\pm1)N+n} = \gamma_{a,b\pm N}.$$

Обозначим $L := \operatorname{Lin}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Выберем произвольный элемент $x \in L$. Поскольку элементы $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ не обязательно линейно независимы, элементы линейной оболочки L можно представлять различными способами в виде линейной комбинации элементов x_n. Пусть

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k x_k \tag{10}$$

и

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k x_k , \tag{11}$$

где $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$ — два произвольных представления элемента x. Здесь лишь конечное число коэффициентов α_k, β_k отличны от нуля. Это предполагается и в дальнейшем при выборе элементов из линейных оболочек. Используя (7), (9), можем записать

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k x_{k\pm N}, x_l \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (x_{k\pm N}, x_l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \gamma_{k\pm N, l} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \gamma_{k, l\pm N} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (x_k, x_{l\pm N}) =$$

$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k x_k, x_{l\pm N} \right) = (x, x_{l\pm N}), \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

Аналогичным образом заключаем, что

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k x_{k\pm N}, x_l \right) = (x, x_{l\pm N}), \qquad l \in \mathbb{Z},$$

и, значит,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_{k\pm N}, x_l \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x_{k\pm N}, x_l \right), \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку $\bar{L} = H$, получаем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k x_{k\pm N} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k x_{k\pm N} . \tag{12}$$

Положим

$$Ax = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_{k+N} , \qquad Bx = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_{k-N} , \tag{13}$$

$$x \in L, \qquad x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k x_k , \qquad \alpha_k \in \mathbb{C}. \tag{14}$$

Соотношения (10) – (12) показывают, что значения операторов A и B на векторе x из L не зависят от выбора представления этого вектора. Значит, операторы A и B корректно заданы. В частности, справедливы равенства

$$Ax_k = x_{k+N}, \qquad Bx_k = x_{k-N}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Оператор A является обратимым и $A^{-1} = B$. Выберем произвольные элементы $x, y \in L$, $x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k x_k$, $y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n x_n$, и запишем

$$(Ax, y) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k x_{k+N}, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n x_n \right) = \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \alpha_k \overline{\gamma_n} (x_{k+N}, x_n) =$$

$$= \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \alpha_k \overline{\gamma_n} (x_k, x_{n+N}) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k x_k, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n x_{n+N} \right) = (x, Ay).$$

Таким образом, оператор A является симметрическим. Аналогичным образом проверяется симметричность B.

Пусть $\tilde{A} \supseteq A$ — произвольное самосопряженное расширение оператора A в гильбертовом пространстве $\tilde{H} \supseteq H$. При этом можно считать, что $\operatorname{Ker} \tilde{A} = \{0\}$. В противном случае, поскольку $\operatorname{Ker} \tilde{A} \perp R(\tilde{A})$, $R(\tilde{A}) \supseteq L$, заключаем, что $\operatorname{Ker} \tilde{A} \perp H$. Поэтому оператор $\tilde{A}$, суженный на $\tilde{H} \ominus \operatorname{Ker} \tilde{A}$, также будет самосопряженным расширением оператора A с нулевым ядром.

Пусть $\{\tilde{E}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ — непрерывное слева ортогональное разложение единицы оператора $\tilde{A}$. Выберем произвольное число $a \in \mathbb{Z}$,

$$a = rN + j, \qquad r \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le j \le N-1.$$

Используя определение оператора A, по индукции легко проверить, что

$$x_a = x_{rN+j} = A^r x_j. \tag{15}$$

На основании (5), (7) и (15) записываем

$$s_{r+t;j,n} = \gamma_{rN+j;tN+n} = (x_{rN+j}, x_{tN+n})_H = (A^r x_j, A^t x_n)_H = (\tilde{A}^r x_j, \tilde{A}^t x_n)_{\tilde{H}},$$

где $r, t \in \mathbb{Z}$, $0 \le j$, $n \le N-1$. Здесь мы воспользовались тем, что $AL \subseteq L$ и, значит, $\tilde{A}^r \supseteq A^r$, $r \in \mathbb{Z}$.

Известно, что для рациональных функций, нули знаменателя которых не лежат в точечном спектре оператора, непосредственное задание этих функций от оператора согласовано с заданием функций от оператора спектральным интегралом (см. [11, с. 141]). Значит, можно утверждать, что

$$\tilde{A}^r x_j = \int_{\mathbb{R}} \lambda^r d\tilde{E}_\lambda x_j, \qquad r \in \mathbb{Z}.$$

(Здесь мы воспользовались тем, что $\lambda = 0$ не является собственным числом оператора $\tilde{A}$.) Значит,

$$s_{r+t;j,n} = \left(\int_{\mathbb{R}} \lambda^r d\tilde{E}_\lambda x_j, \int_{\mathbb{R}} \lambda^t d\tilde{E}_\lambda x_n \right)_{\tilde{H}} = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{r+t} d(\tilde{E}_\lambda x_j, x_n)_{\tilde{H}},$$

где последнее соотношение следует из [12, с. 222].

Следовательно, получаем равенство

$$s_{r+t;j,n} = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{r+t} d\left(P_H^{\tilde{H}} \tilde{E}_\lambda x_j, x_n \right)_H.$$

Записывая последнее соотношение в матричном виде, приходим к равенству

$$S_{r+t} = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{r+t} d\tilde{M}(\lambda), \qquad r, t \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$

где $\tilde{M}(\lambda) := \left(\left(P_H^{\tilde{H}} \tilde{E}_\lambda x_j,\, x_n \right)_H \right)_{j,n=0}^{N-1}$. Полагая в соотношении (16) $t = 0$, получаем, что матрица-функция $\tilde{M}(\lambda)$ является некоторым решением проблемы моментов (1) (из свойств ортогонального разложения единицы легко следует, что $\tilde{M}(\lambda)$ является непрерывной слева неубывающей матрицей-функцией и $\tilde{M}(-\infty) = 0$).

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть задана сильная матричная проблема моментов Гамбургера* (1) *с некоторым набором моментов* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. *Проблема моментов имеет решение в том и только в том случае, когда выполнены условия* (3).

Продолжим теперь изучение проблемы моментов (1), как и ранее, предполагая условия (3) выполненными.

Пусть $\hat{A}$ — произвольное самосопряженное расширение построенного выше оператора A в некотором гильбертовом пространстве $\widehat{H}$. Обозначим через $R_z(\widehat{A})$ резольвенту $\widehat{A}$, а через $\{\widehat{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ его ортогональное непрерывное слева разложение единицы. Напомним, что операторнозначная функция $\mathbf{R}_z = P_H^{\widehat{H}} R_z(\widehat{A})$ называется обобщенной резольвентой A, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Функция $\mathbf{E}_\lambda = P_H^{\widehat{H}} \widehat{E}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, является спектральной функцией симметрического оператора A. Между обобщенными резольвентами и спектральными функциями существует взаимно однозначное соответствие согласно соотношению [9]

$$(\mathbf{R}_z f,\, g)_H = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z}\, d(\mathbf{E}_\lambda f,\, g)_H, \qquad f, g \in H, \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{17}$$

Формула (16) показывает, что произвольная спектральная функция оператора A порождает решение проблемы моментов (1) (спектральная функция порождается некоторым самосопряженным расширением, которое можно считать обратимым). Покажем, что все решения проблемы моментов порождаются спектральными функциями подобным образом.

Пусть $\widehat{M}(x) = (\widehat{m}_{k,l}(x))_{k,l=0}^{N-1}$ является произвольным решением проблемы моментов (1). Рассмотрим пространство $L^2(\widehat{M})$, и пусть Q — оператор умножения на независимую переменную в $L^2(\widehat{M})$. Оператор Q является самосопряженным и его ортогональное разложение единицы имеет вид (см. [8])

$$E_b - E_a = E([a,b)) : h(x) \to \chi_{[a,b)}(x) h(x), \tag{18}$$

где $\chi_{[a,b)}(x)$ — характеристическая функция интервала $[a,b)$, $-\infty \le a < b \le +\infty$. Положим $\vec{e}_k = (e_{k,0}, e_{k,1}, \ldots, e_{k,N-1})$, $e_{k,j} = \delta_{k,j}$, $0 \le j \le N-1$, для $k = 0, 1, \ldots, N-1$,

Множество (классов эквивалентности) функций $f \in L^2(\widehat{M})$ таких, что (соответствующий класс включает) $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$, $f \in \mathbb{P}_L$, обозначаем через $\mathbb{P}_L^2(\widehat{M})$ и называем множеством векторных многочленов Лорана в $L^2(\widehat{M})$. Полагаем $L_L^2(\widehat{M}) = \overline{\mathbb{P}_L^2(\widehat{M})}$.

Для произвольного векторного многочлена Лорана $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$, $f_j \in \mathbb{P}_L$, существует единственное представление вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_{k,j} x^j \vec{e}_k, \tag{19}$$

где лишь конечное число коэффициентов $\alpha_{k,j}$ отлично от нуля. Это будет предполагаться и в дальнейшем в подобных случаях. Пусть произвольный другой векторный многочлен Лорана g имеет вид

$$g(x) = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \beta_{l,r} x^r \vec{e}_l. \tag{20}$$

Тогда можно записать

$$(f, g)_{L^2(\widehat{M})} = \sum_{k,l=0}^{N-1} \sum_{j,r=-\infty}^{\infty} \alpha_{k,j} \overline{\beta_{l,r}} \int_{\mathbb{R}} x^{j+r} \vec{e}_k d\widehat{M}(x) \vec{e}_l^{\,*} =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{N-1} \sum_{j,r=-\infty}^{\infty} \alpha_{k,j} \overline{\beta_{l,r}} \int_{\mathbb{R}} x^{j+r} d\widehat{m}_{k,l}(x) = \sum_{k,l=0}^{N-1} \sum_{j,r=-\infty}^{\infty} \alpha_{k,j} \overline{\beta_{l,r}} s_{j+r;k,l}. \tag{21}$$

С другой стороны,

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k,j} x_{jN+k}, \ \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{N-1} \beta_{l,r} x_{rN+l} \right)_H = \sum_{k,l=0}^{N-1} \sum_{j,r=-\infty}^{\infty} \alpha_{k,j} \overline{\beta_{l,r}} \, *$$

$$* \ (x_{jN+k}, x_{rN+l})_H = \sum_{k,l=0}^{N-1} \sum_{j,r=-\infty}^{\infty} \alpha_{k,j} \overline{\beta_{l,r}} \gamma_{jN+k; rN+l} =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{N-1} \sum_{j,r=-\infty}^{\infty} \alpha_{k,j} \overline{\beta_{l,r}} s_{j+r;k,l}. \tag{22}$$

Из соотношений (21), (22) следует, что

$$(f, g)_{L^2(\widehat{M})} = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k,j} x_{jN+k}, \ \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{N-1} \beta_{l,r} x_{rN+l} \right)_H. \tag{23}$$

Положим

$$Vf = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k,j} x_{jN+k}$$

для $f(x) \in \mathbb{P}_L^2(\widehat{M})$ (и соответствующий класс эквивалентности включает), $f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_{k,j} x^j \vec{e}_k$. Если f, g являются векторными многочленами Лорана с представлениями (19), (20) и при этом $\| f - g \|_{L^2(\widehat{M})} = 0$, то из соотношения (23) следует, что

$$\| Vf - Vg \|_H^2 = (V(f-g), V(f-g))_H =$$

$$= (f-g, f-g)_{L^2(\widehat{M})} = \| f - g \|_{L^2(\widehat{M})}^2 = 0.$$

Таким образом, V является корректно заданным оператором из $\mathbb{P}^2(\widehat{M})$ в H.

Соотношение (23) показывает, что V является изометрическим отображением $\mathbb{P}^2_L(\widehat{M})$ на L. Распространим по непрерывности V до изометрического отображения $L^2_L(\widehat{M})$ на H. В частности, заметим, что

$$Vx^j\vec{e}_k = x_{jN+k}, \qquad j \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le k \le N-1.$$

Пусть $L^2_1(\widehat{M}) := L^2(\widehat{M}) \ominus L^2_L(\widehat{M})$ и $U := V \oplus E_{L^2_1(\widehat{M})}$. Оператор U является изометрическим отображением $L^2(\widehat{M})$ на $H \oplus L^2_1(\widehat{M}) =: \widehat{H}$. Положим

$$\widehat{A} := UQU^{-1}.$$

Оператор $\widehat{A}$ является самосопряженным оператором в $\widehat{H}$. Пусть $\{\widehat{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ — его непрерывное слева ортогональное разложение единицы. Заметим, что

$$UQU^{-1}x_{jN+k} = VQV^{-1}x_{jN+k} = VQx^j\vec{e}_k = Vx^{j+1}\vec{e}_k = x_{(j+1)N+k} =$$

$$= x_{jN+k+N} = Ax_{jN+k}, \qquad j \in \mathbb{Z}, \qquad 0 \le k \le N-1.$$

В силу линейности справедливо

$$UQU^{-1}x = Ax, \qquad x \in L = D(A),$$

и, значит, $\widehat{A} \supseteq A$. Выберем произвольный элемент $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ и запишем

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z}\, d\left(\widehat{E}_\lambda x_k, x_j\right)_{\hat{H}} = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z}\, d\widehat{E}_\lambda x_k, x_j\right)_{\hat{H}} =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z}\, dU^{-1}\widehat{E}_\lambda U\vec{e}_k, U^{-1}x_j\right)_{L^2(\widehat{M})} = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z}\, dE_\lambda\vec{e}_k, \vec{e}_j\right)_{L^2(\widehat{M})} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z}\, d(E_\lambda\vec{e}_k, \vec{e}_j)_{L^2(\widehat{M})}, \qquad 0 \le k,\ j \le N-1.$$

Используя (18), записываем

$$(E_\lambda\vec{e}_k, \vec{e}_j)_{L^2(\widehat{M})} = \widehat{m}_{k,j}(\lambda),$$

и, значит,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z}\, d\left(P^{\widehat{H}}_H \widehat{E}_\lambda x_k, x_j\right)_H = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z}\, d\widehat{m}_{k,j}(\lambda), \qquad 0 \le k,\ j \le N-1.$$

Используя формулу обращения Стилтьеса – Перрона (см., например, [13]), заключаем, что

$$\widehat{m}_{k,j}(\lambda) = \left(P^{\widehat{H}}_H \widehat{E}_\lambda x_k, x_j\right)_H.$$

Покажем теперь, что индекс дефекта A равен (m,n), $0 \le m$, $n \le N$. Выберем произвольный элемент $u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k x_k \in L$, $c_k \in \mathbb{C}$, и число $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Пусть $c_k = 0$ при $k \le R_-$ и при $k \ge R_+$, где $R_- \le -2$, $R_+ \ge N+1$. Полагаем по определению $d_k = 0$ при $k \le R_-$ и при $k \ge R_+ - N$. Полагаем далее

$$d_k = \frac{1}{z}\big(d_k - N - c_k\big), \quad k = R_- + 1, \ldots, -1,$$

$$d_{k-N} = zd_k + c_k, \quad k = R_+ - 1,\, R_+ - 2, \ldots, N.$$

Пусть $v := \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k x_k \in L$. Тогда непосредственно получаем

$$(A - zE_H)v - u = \sum_{k=0}^{N-1} (d_{k-N} - zd_k - c_k)x_k,$$

$$u = u_z + \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k x_k, \quad u \in L, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}, \quad u_z \in H_z, \tag{24}$$

где $H_z := \overline{(A - zE_H)L} = (\bar{A} - zE_H)D(\bar{A})$. В частности, из равенства (24) следует, что

$$u = \tilde{u}_z + \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k y_k,$$

где $\tilde{u}_z = u_z + \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k P_{H_z} x_k$, $y_k = x_k - P_{H_z} x_k$. Из последнего равенства следует, что $H = H_z \oplus \operatorname{span}\{y_k\}_{k=0}^{N-1}$. Следовательно, дефектные числа A не превышают N.

Теорема 3. *Пусть задана сильная матричная проблема моментов Гамбургера* (1) *и выполнено условие* (3). *Пусть оператор A построен для проблемы моментов, как в* (13). *Все решения проблемы моментов имеют вид*

$$M(\lambda) = (m_{k,j}(\lambda))_{k,j=0}^{N-1}, \quad m_{k,j}(\lambda) = (\mathbf{E}_\lambda x_k, x_j)_H,$$

где $\mathbf{E}_\lambda$ является непрерывной слева спектральной функцией оператора A. При этом соответствие между всеми непрерывными слева спектральными функциями оператора A и всеми решениями проблемы моментов взаимно однозначно.

Доказательство. Все утверждения теоремы, кроме последнего, были доказаны выше. Покажем, что различные непрерывные слева спектральные функции оператора A порождают различные решения проблемы моментов (1). Предположим, что две различные непрерывные слева спектральные функции порождают одно и то же решение проблемы моментов. Это значит, что есть два самосопряженных оператора $A_j \supseteq A$ в гильбертовых пространствах $H_j \supseteq H$ такие, что

$$P_H^{H_1} E_{1,\lambda} \ne P_H^{H_2} E_{2,\lambda},$$

$$(P_H^{H_1} E_{1,\lambda} x_k, x_j)_H = (P_H^{H_2} E_{2,\lambda} x_k, x_j)_H, \quad 0 \le k, j \le N - 1, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

где $\{E_{n,\lambda}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ — ортогональные непрерывные слева разложения единицы операторов A_n, $n = 1, 2$. Положим $L_N := \operatorname{Lin}\{x_k\}_{k=0}^{N-1}$. Используя линейность, записываем

$$(P_H^{H_1} E_{1,\lambda} x,\, y)_H \;=\; (P_H^{H_2} E_{2,\lambda} x,\, y)_H\,, \qquad x,\, y \in L_N\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

Обозначим через $R_{n,\lambda}$ резольвенту A_n и положим $\mathbf{R}_{n,\lambda} := P_H^{H_n} R_{n,\lambda}$, $n = 1, 2$. Из (25), (21) следует, что

$$(\mathbf{R}_{1,\lambda} x,\, y)_H \;=\; (\mathbf{R}_{2,\lambda} x,\, y)_H\,, \qquad x,\, y \in L_N\,, \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{26}$$

Выберем произвольное число $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ и рассмотрим пространство H_z, определенное выше. Поскольку

$$R_{j,z}(A - zE_H)x \;=\; (A_j - zE_{H_j})^{-1}(A_j - zE_{H_j})x \;=\; x, \qquad x \in L \;=\; D(A),$$

то

$$R_{1,z} u \;=\; R_{2,z} u \,\in H, \qquad u \in H_z, \tag{27}$$

$$\mathbf{R}_{1,z} u \;=\; \mathbf{R}_{2,z} u, \qquad u \in H_z, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{28}$$

Мы можем записать

$$(\mathbf{R}_{n,z} x,\, u)_H \;=\; (\mathbf{R}_{n,z} x,\, u)_{H_n} \;=\; (x,\, R_{n,\bar{z}} u)_{H_n} \;=\; (x,\, \mathbf{R}_{n,\bar{z}} u)_H\,,$$

где $x \in L_N$, $u \in H_{\bar{z}}$, $n = 1, 2$, и, значит,

$$(\mathbf{R}_{1,z} x,\, u)_H \;=\; (\mathbf{R}_{2,z} x,\, u)_H\,, \qquad x \in L_N\,, \quad u \in H_{\bar{z}}. \tag{29}$$

Согласно (24) произвольный элемент $y \in L$ можно представить в виде $y = y_{\bar{z}} + y'$, $y_{\bar{z}} \in H_{\bar{z}}$, $y' \in L_N$. Используя (26) и (29), получаем

$$(\mathbf{R}_{1,z} x,\, u)_H \;=\; (\mathbf{R}_{1,z} x,\, y_{\bar{z}} + y')_H \;=\; (\mathbf{R}_{2,z} x,\, y_{\bar{z}} + y')_H \;=\; (\mathbf{R}_{2,z} x,\, y)_H\,,$$

где $x \in L_N$, $y \in L$. Поскольку $\bar{L} = H$, имеем

$$\mathbf{R}_{1,z} x \;=\; \mathbf{R}_{2,z} x\,, \qquad x \in L_N\,, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{30}$$

Для произвольного $x \in L$, $x = x_z + x'$, $x_z \in H_z$, $x' \in L_N$, используя соотношения (28), (30), записываем

$$\mathbf{R}_{1,z} x \;=\; \mathbf{R}_{1,z}(x_z + x') \;=\; \mathbf{R}_{2,z}(x_z + x') \;=\; \mathbf{R}_{2,z} x\,, \qquad x \in L, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R},$$

и

$$\mathbf{R}_{1,z} x \;=\; \mathbf{R}_{2,z} x\,, \qquad x \in H, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Согласно (17) это означает, что соответствующие спектральные функции совпадают. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Напомним некоторые определения из [7], необходимые нам в дальнейшем. Пусть B — замкнутый симметрический оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(B)$, $\overline{D(B)} = H$. Обозначим $\Delta_B(\lambda) = (B - \lambda E_H)D(B)$ и $N_\lambda = N_\lambda(B) = H \ominus \Delta_B(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Рассмотрим произвольный ограниченный линейный оператор C, отображающий N_i в N_{-i}. Для

$$g \;=\; f + C\psi - \psi, \qquad f \in D(B), \quad \psi \in N_i\,,$$

полагаем

$$B_C g \;=\; Bf + iC\psi + i\psi.$$

Поскольку пересечение $D(A)$, N_i и N_{-i} состоит лишь из нулевого элемента, это определение корректно. Оператор B_C называют *квазисамосопряженным расширением оператора* B, *определяемым оператором* C. Используя фундаментальный результат А. В. Штрауса [7] (теорема 7) и теорему 3, приходим к следующему описанию решений проблемы моментов.

Теорема 4. *Пусть задана сильная матричная проблема моментов Гамбургера* (1) *и выполнено условие* (3). *Пусть оператор* A *построен для проблемы моментов, как в* (13). *Все решения проблемы моментов имеют вид*

$$M(x) = (m_{k,j}(x))_{k,j=0}^{N-1},$$

где $m_{k,j}$ *удовлетворяют соотношению*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-\lambda} dm_{k,j}(x) = ((A_{F(\lambda)} - \lambda E_H)^{-1} x_k, x_j)_H, \qquad \lambda \in \mathbb{C}_+, \tag{31}$$

$F(\lambda)$ *является аналитической в* $\mathbb{C}_+$ *операторнозначной функцией, значениями которой являются сжатия, отображающие* $N_i(\bar{A})$ *в* $N_{-i}(\bar{A})$ $\left(\|F(\lambda)\| \le 1\right)$, *а* $A_{F(\lambda)}$ — *квазисамосопряженным расширением* $\bar{A}$, *определяемым* $F(\lambda)$.

С другой стороны, произвольной операторнозначной функции $F(\lambda)$ *с упомянутыми свойствами соответствует, согласно* (31), *некоторое решение сильной матричной проблемы моментов Гамбургера. При этом соответствие между всеми такими операторнозначными функциями и решениями проблемы моментов, устанавливаемое соотношением* (31), *взаимно однозначно.*

1. *Jones W. B., Njåstad O., Thron W. J.* Continued fractions and strong Hamburger moment problems // Proc. London Math. Soc.. – 1983. – **(3) 47**, № 2. – P. 363 – 384.
2. *Jones W. B., Thron W. J. Njåstad O.* Orthogonal Laurent polynomials and the strong Hamburger moment problem // J. Math. Anal. and Appl. – 1984. – **98**, № 2. – P. 528 – 554.
3. *Njåstad O.* Solutions of the strong Hamburger moment problem // Ibid. – 1996. – **197**. – P. 227 – 248.
4. *Jones W. B., Njåstad O.* Orthogonal Laurent polynomials and strong moment theory: a survey // J. Comput. Appl. Math. – 1999. – **105**, № 1-2. – P. 51 – 91.
5. *Simonov K. K.* Strong matrix moment problem of Hamburger // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2006. – **12**, № 2. – P. 183 – 196.
6. *Zagorodnyuk S. M.* Positive definite kernels satisfying difference equations // Ibid. – 2010. – **16**, № 1. – P. 83 – 100.
7. *Штраус А. В.* Обобщенные резольвенты симметрических операторов // Изв. АН СССР. – 1954. – **18**. – С. 51 – 86.
8. *Маламуд М. М., Маламуд С. М.* Операторные меры в гильбертовом пространстве // Алгебра и анализ. – 2003. – **15**, № 3. – С. 1 – 52.
9. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 484 с.
10. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
11. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1980. – 265 с.
12. *Stone M. H.* Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. – Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1932. – Vol. 15. – 622 p.
13. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. – М.: Физматгиз, 1961. – 312 с.

Получено 07.10.09