УДК 512.542

Н. Н. Воробьев*, **А. А. Царев** (Витебск. гос. ун-т им. П. М. Машерова, Беларусь)

О МОДУЛЯРНОСТИ РЕШЕТКИ τ-ЗАМКНУТЫХ n-КРАТНО ω-КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ

Let $n \geq 0$, ω be a nonempty set of prime numbers, and τ be a subgroup functor (in the sense of A. N. Skiba) such that, for any finite group G, all subgroups contained in $\tau(G)$, are subnormal in G. It is proved that the lattice of all τ-closed n-multiply ω-composition formations is algebraic and modular.

Нехай $n \geq 0$, ω — непорожня множина простих чисел і τ — підгруповий функтор (в сенсі А. М. Скиби) такий, що для будь-якої скінченної групи G всі підгрупи, що входять до $\tau(G)$, є субнормальними в G. Доведено, що ґратка всіх τ-замкнених n-кратно ω-композиційних формацій є алгебраїчною та модулярною.

Введение. В работе [1] установлено, что решетка всех (насыщенных) формаций модулярна. В дальнейшем этот результат получил развитие в различных направлениях. В монографии Л. А. Шеметкова и А. Н. Скибы [2] доказана модулярность решетки всех n-кратно насыщенных формаций, в работе А. Баллестера-Болинше и Л. А. Шеметкова [3] — модулярность решетки всех ω-насыщенных формаций. Модулярность решетки всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций установлена А. Н. Скибой [4]. В дальнейшем А. Н. Скибой и Л. А. Шеметковым [5, 6] доказана модулярность решеток n-кратно ω-насыщенных формаций и n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций соответственно. Позднее И. П. Шабалиной [7] установлена модулярность решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций, а М. В. Задорожнюк [8] — модулярность решетки всех τ-замкнутых ω-композиционных формаций. Модулярность решетки всех тотально насыщенных формаций, а также решетки всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций доказана В. Г. Сафоновым [9, 10]. В настоящей работе с помощью функторного подхода развиваются методы теории модулярных решеток частично композиционных формаций: доказано, что решетка всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций алгебраична и модулярна (теорема 3.1). Кроме того, установлена индуктивность указанной решетки (теорема 2.1). Заметим, что специальными случаями теоремы 3.1 являются все приведенные выше результаты о модулярных решетках формаций (см. следствия 3.1 – 3.4).

Мы будем использовать стандартную терминологию, принятую в [2, 4 – 6, 11, 12]. Все рассматриваемые в работе группы конечны.

1. Предварительные сведения. Напомним, что формацией называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

В дальнейшем ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел и $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Символом $\pi(G)$ обозначено множество всех различных простых делителей порядка группы G, $\pi(\mathfrak{X})$ — объединение множеств $\pi(G)$ для всех групп G из $\mathfrak{X}$, $[K]H$ — полупрямое произведение группы K с некоторой ее группой операторов H, $A \wr B$ — регулярное сплетение группы A с группой B. Для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$ через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначено пересечение всех таких нормальных подгрупп N, что $G/N \in \mathfrak{F}$, а через $G_{\mathfrak{F}}$ — произ-

* Поддержан Белорусским республиканским фондом фудаментальных исследований (грант Ф08М-118).

ведение всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G. В частности, $O_p(G) = G_{\mathfrak{N}_p}$ и $F_p(G) = G_{\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p}$. Символы $\mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_{p'}$ и $\mathfrak{G}_{cp}$ обозначают соответственно класс всех p-групп, класс всех групп, класс всех p'-групп и класс всех таких групп, у которых все главные p-факторы центральны.

Любая функция вида

$$f\colon \omega \bigcup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$$

называется ω-композиционным спутником [6]. Как и в [11], через $C^p(G)$ обозначено пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, композиционные факторы которых имеют простой порядок p ($C^p(G) = G$, если в G нет главных факторов с таким свойством). Символом $R_\omega(G)$ обозначена наибольшая нормальная разрешимая ω-подгруппа группы G; $\mathrm{Com}(G)$ — класс всех простых абелевых групп A таких, что $A \cong H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы G. Согласно [6], произвольному ω-композиционному спутнику f сопоставляют класс групп

$$CF_\omega(f) = \left(G \,\middle|\, G/R_\omega(G) \in f(\omega') \quad \text{и} \right.$$

$$\left. G/C^p(G) \in f(p) \quad \text{для всех} \quad p \in \omega \bigcap \pi(\mathrm{Com}(G)) \right).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторого ω-композиционного спутника f, то говорят, что она ω-композиционна, а f — ω-композиционный спутник этой формации [6]. Если при этом все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то спутник f называется *внутренним.*

Согласно концепции кратной локализации, предложенной А. Н. Скибой (см. [13, 6]), любая формация считается 0-кратно ω-композиционной, а при $n > 0$ формация $\mathfrak{F}$ называется n-кратно ω-композиционной, если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где все непустые значения функции f являются $(n-1)$-кратно ω-композиционными формациями.

Пусть Θ — полная решетка формаций. Тогда символом $\Theta\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех тех формаций из Θ, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$. В частности, пишут $\Theta\mathrm{form}\,G$ в случае, когда $\mathfrak{X} = \{G\}$. Любая формация такого вида называется однопорожденной формацией, принадлежащей Θ. Знак Θ опускается, если Θ — совокупность всех формаций. Напомним, что спутник f называется Θ-*значным*, если все его значения принадлежат Θ. Следуя [6], символом Θ^{ω_c} будем обозначать полную решетку формаций, имеющих Θ-значный ω-композиционный спутник.

Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ полагают (см. [6])

$$\mathfrak{X}(C^p) = \begin{cases} \mathrm{form}\left(G/C^p(G) \,\middle|\, G \in \mathfrak{X} \right), & \text{если} \quad p \in \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})), \\ \varnothing, & \text{если} \quad p \notin \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})). \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{F} = CF_\omega(F)$, где $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(C^p)$ для всех $p \in \omega$. Тогда спутник F называется *каноническим* ω-*композиционным спутником* [6].

Напомним несколько известных утверждений, которые потребуются для доказательства основного результата.

Лемма 1.1 ([6], лемма 8). *Пусть* Θ *— такая полная решетка формаций, что* $\Theta^{\omega_c} \subseteq \Theta$, *и для любой формации* $\mathfrak{H} \in \Theta$ *формация* $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \in \Theta$ *при любом* $p \in \omega$. *Тогда если* $\mathfrak{F} = CF_\omega(F) \in \Theta^{\omega_c}$, *то спутник* F Θ*-значен.*

Лемма 1.2 ([6], лемма 4). *Если* $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ *и* $G/O_p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$ *для некоторого* $p \in \omega$, *то* $G \in \mathfrak{F}$.

Лемма 1.3 ([6], замечание 1). *Любая* ω*-композиционная формация имеет канонический* ω*-композиционный спутник.*

В произвольной группе G выберем систему подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ — подгрупповой функтор (в смысле А. Н. Скибы [4]), если выполняются следующие условия: 1) $G \in \tau(G)$; 2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \mapsto B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$, $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$. Если $\tau(G) = \{G\}$, то функтор τ называется тривиальным. Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой [4], если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы G из $\mathfrak{F}$. Мы будем рассматривать лишь такие подгрупповые функторы τ, что для любой группы G все подгруппы, входящие в $\tau(G)$, субнормальны в G.

Относительно включения $\subseteq$ совокупность всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций $c^\tau_{\omega_n}$ является полной решеткой. Символами $c^\tau_{\omega_0}$ и c^ω_n будем обозначать соответственно решетку всех τ-замкнутых формаций и решетку всех n-кратно ω-композиционных формаций. Заметим, что если τ — тривиальный подгрупповой функтор, то $c^\tau_{\omega_n} = c^\omega_n$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — набор всех ω-композиционных $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значных спутников формации $\mathfrak{F}$. В силу леммы 2 [6] $f = \bigcap_{i \in I} f_i$ — ω-композиционный $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, называемый *минимальным.*

Следующее утверждение дает способ построения минимального $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значного спутника формации $\mathfrak{F} = c^\tau_{\omega_n} \operatorname{form} \mathfrak{X}$.

Лемма 1.4 ([6], лемма 5). *Пусть* $\mathfrak{F} = c^\tau_{\omega_n} \operatorname{form} \mathfrak{X}$ *и* $\pi = \omega \cap \pi(\operatorname{Com}(\mathfrak{X}))$. *Тогда минимальный* ω*-композиционный* $c^\tau_{\omega_{n-1}}$*-значный спутник* f *формации* $\mathfrak{F}$ *таков, что*:

1) $f(\omega') = c^\tau_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}\, (G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = c^\tau_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}\, (G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $p \in \pi$;

3) $f(p) = \varnothing$ *для всех* $p \in \omega \setminus \pi$;

4) *если* $\mathfrak{F} = CF_\omega(h)$ *и спутник* h $c^\tau_{\omega_{n-1}}$*-значен, то для всех* $p \in \pi$ *имеет место*

$$f(p) = c^\tau_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}\, (A \mid A \in h(p) \cap \mathfrak{F},\ O_p(A) = 1)$$

и

$$f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \operatorname{form}\left(A \mid A \in h(\omega') \cap \mathfrak{F},\ R_{\omega}(A) = 1\right).$$

Лемма 1.5 ([4], следствие 1.2.24). *Для любой совокупности τ-замкнутых формаций $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ имеет место*

$$\tau\operatorname{form}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{M}_i\right) = \operatorname{form}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{M}_i\right).$$

Лемма 1.6 ([12], теорема 2.2). *Для любого класса $\mathfrak{X}$ имеет место равенство*

$$\operatorname{form} \mathfrak{X} = QR_0 \mathfrak{X}.$$

Полагают $f \le h$ [6], если $f(a) \subseteq h(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Лемма 1.7 ([6], лемма 6). *Пусть f_1 и f_2 — минимальные ω-композиционные $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значные спутники формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $f_1 \le f_2$.*

Лемма 1.8 ([6], лемма 10). *Формация $\mathfrak{F}$ n-кратно ω-композиционна тогда и только тогда, когда она обладает таким спутником f, все значения $f(a)$ которого $(n-1)$-кратно ω-композиционны для всех $a \in \omega$.*

Лемма 1.9 ([6], лемма 2). *Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = CF_{\omega}(f_i)$. Тогда $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$, где $f = \bigcap_{i \in I} f_i$.*

2. Индуктивность решетки $c^{\tau}_{\omega_n}$. Напомним определение индуктивной решетки формаций. Пусть Θ — полная решетка формаций. Для произвольной совокупности формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ из Θ полагают

$$\vee_{\Theta}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \Theta\operatorname{form}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right).$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность Θ-значных спутников. Тогда через $\vee_{\Theta}(f_i \mid i \in I)$ обозначают такой спутник f, что

$$f(a) = \Theta\operatorname{form}\left(\bigcup_{i \in I} f_i(a)\right)$$

для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Следуя [4], полную решетку формаций Θ будем называть *индуктивной,* если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i \in \Theta^{\omega_c}$ и для любого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних Θ-значных ω-композиционных спутников f_i, где f_i — ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, имеет место

$$\vee_{\Theta^{\omega_c}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = CF_{\omega}(\vee_{\Theta}(f_i \mid i \in I)).$$

В данном пункте мы докажем свойство индуктивности решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций, которое лежит в основе доказательства модулярности указанной решетки.

Лемма 2.1. *Пусть* $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(F)$ — τ-*замкнутая* n-*кратно* ω-*композиционная формация,* $n \geq 1$. *Тогда спутник* F $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-*значен.*

Доказательство. Согласно лемме 1.1 достаточно лишь проверить, что для любого $p \in \mathbb{P}$ и для любой τ-замкнутой n-кратно ω-композиционной формации $\mathfrak{H}$ $(n \geq 0)$ формация $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой n-кратно ω-композиционной.

Заметим, что поскольку для любого $p \in \mathbb{P}$ формация $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ τ-замкнута, где $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая формация, то в случае $n = 0$ утверждение справедливо.

Пусть $n > 0$ и при $n - 1$ утверждение леммы справедливо. Покажем сначала, что формация $\mathfrak{M}$ n-кратно ω-композиционна. Пусть $\mathfrak{H} = CF_{\omega}(h)$, где h — внутренний $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник. Формация $\mathfrak{N}_p$ имеет такой внутренний ω-композиционный спутник f, что $f(p) = (1)$, $f(\omega') = (1)$ и $f(q) = \varnothing$ для всех $q \in \omega \setminus \{p\}$. Нетрудно показать, что формация $\mathfrak{M}$ имеет такой спутник m, что $m(p) = \mathfrak{H}$, $m(\omega') = \mathfrak{M}$ и $m(q) = \varnothing$ для всех $q \in \omega \setminus \{p\}$ (см. [6], теорема 6). Но согласно предположению $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ — $(n-1)$-кратно ω-композиционная формация. Значит, $\mathfrak{M}$ — n-кратно ω-композиционная формация.

Докажем теперь, что формация $\mathfrak{M}$ τ-замкнута. Предположим противное. Тогда найдутся такие группа $G \in \mathfrak{M}$ и подгруппа $H \in \tau(G)$, что $H \notin \mathfrak{M}$. Поскольку $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{M}$, то $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_p$ и $G/G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$. Поскольку формация $\mathfrak{H}$ по предположению τ-замкнута, то для любой группы $\bar{H} \in \tau(G/G^{\mathfrak{H}})$ имеет место $\bar{H} \in \mathfrak{H}$. Но $HG^{\mathfrak{H}}/G^{\mathfrak{H}} \in \tau(G/G^{\mathfrak{H}})$. Следовательно,

$$HG^{\mathfrak{H}}/G^{\mathfrak{H}} \cong H/H \cap G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}.$$

Вместе с тем $H \cap G^{\mathfrak{H}} \lhd H$ и $H \cap G^{\mathfrak{H}}$ — p-группа. Поэтому $H \cap G^{\mathfrak{H}} \subseteq O_p(H)$. Значит, $H^{\mathfrak{H}} \subseteq O_p(H)$, т. е. $H^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_p$. Отсюда $H \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{M}$. Противоречие. Следовательно, формация $\mathfrak{M}$ τ-замкнута.

Пусть F — канонический c^{ω}_{n-1}-значный ω-композиционный спутник τ-замкнутой n-кратно ω-композиционной формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что формация $F(a)$ является τ-замкнутой. Если $a = \{\omega'\}$, то формация $F(\omega') = \mathfrak{F}$ τ-замкнута согласно допущению.

Допустим, что $a = p \in \omega$. Рассмотрим группу $G \in F(p)$ и $H \in \tau(G)$. Пусть P — неединичная группа и $D = P \wr G = [K]G$, где K — база регулярного сплетения D. Тогда $HK \in \tau(D)$. Действительно, пусть $\varphi : D \to D/K$ — канонический эпиморфизм группы D на D/K. Тогда $HK/K = H^{\varphi}$. Поэтому $HK/K \in \tau(D/K)$. А так как $HK = (HK/K)^{\varphi^{-1}}$ — полный прообраз подгрупп HK/K при эпиморфизме φ, то $HK \in \tau(D)$.

Поскольку спутник F является внутренним и $G \cong D/K \cong D/O_p(D) \in F(p)$, по лемме 1.2 $D \in \mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута, то $HK \in \mathfrak{F}$.

Пусть $M = HK$. Тогда $M / C^p(M) \in F(p)$, где $p \in \pi(\mathrm{Com}(M))$. Поскольку K — нормальная p-подгруппа группы M, то $K \cap O_{p'}(M) = 1$. Значит, $O_{p'}(M) \subseteq$ $\subseteq C_M(K)$. По свойству регулярных сплетений $C_G(K) \subseteq K$. Следовательно, $O_{p'}(M) = 1$. Значит, $O_p(M) = F_p(M) = C^p(M)$.

Так как

$$O_p(M) = O_p(M) \cap M = O_p(M) \cap KH = K(O_p(M) \cap H)$$

и $O_p(M) \cap H \subseteq O_p(H)$, то

$$O_p(M) = K(O_p(M) \cap H) \subseteq KO_p(H) \subseteq O_p(M).$$

Значит, $KO_p(H) = O_p(M)$. Тогда

$$M / C^p(M) = KH / O_p(M) = KH / KO_p(H) \cong H / O_p(H)(K \cap H) =$$

$$= H / O_p(H) \in F(p) = \mathfrak{N}_p F(p),$$

т. е. $H \in \mathfrak{N}_p(\mathfrak{N}_p F(p)) = (\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_p) F(p) = \mathfrak{N}_p F(p) = F(p)$. Следовательно, формация $F(p)$ τ-замкнута.

Лемма доказана.

В случае, когда $\Theta = c^{\tau}_{\omega_n}$, символ $\vee_{c^{\tau}_{\omega_n}}$ будем обозначать как $\vee^{\tau}_{\omega_n}$.

Описание спутника решеточного объединения двух τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций представляет следующая лемма.

Лемма 2.2. *Пусть* $\mathfrak{F}_i = CF_{\omega}(f_i)$, *где* f_i *— внутренний* $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$*-значный* ω*-композиционный спутник формации* $\mathfrak{F}_i$, *причем* $f_i(\omega') = \mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. *Тогда если* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_2$, *то* $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$, *где* $f = f_1 \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} f_2$.

Доказательство. Пусть h_i — минимальный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_i = CF_{\omega}(f_i)$, $i = 1, 2$. Пусть $p \in \omega$. В силу лемм 2.1 и 1.3 выполняется включение

$$h_i(p) \subseteq f_i(p) \subseteq \mathfrak{N}_p h_i(p) = F_i(p) \in c^{\tau}_{\omega_{n-1}},$$

где F_i — канонический $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$.

Пусть $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(F)$, где F — канонический $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, и h — минимальный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. По лемме 1.4

$$h(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \mathrm{form}\ ((\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)(C^p)) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \mathrm{form}\ (\mathfrak{F}_1(C^p) \cup \mathfrak{F}_2(C^p)) =$$

$$= c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \mathrm{form}\ (h_1(p) \cup h_2(p)) \subseteq f(p) \subseteq \mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \mathrm{form}\ (h_1(p) \cup h_2(p)) \subseteq$$

$$\subseteq \mathfrak{N}_p h(p) = F(p).$$

Таким образом, $h(p) \subseteq f(p) \subseteq F(p)$ для всех $p \in \omega$. Очевидно, $h(\omega') \subseteq \subseteq f(\omega') \subseteq F(\omega')$. Значит, $h(a) \subseteq f(a) \subseteq F(a)$ для всех $a \in \omega \bigcup \{\omega'\}$. Итак, $h \leq f \leq F$ и поэтому $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$.

Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Решетка всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций индуктивна.*

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций и f_i — некоторый внутренний $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_i$. Индукцией по i докажем, что справедливо равенство

$$\vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = CF_\omega(\vee^{\tau}_{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)).$$

Если $i = 2$, то теорема верна в силу леммы 2.2.

Пусть $i > 2$ и для $i = r - 1$ утверждение теоремы выполняется. Тогда справедливо равенство

$$\mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_{r-1} = CF_\omega(f_1 \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} f_{r-1}).$$

Но по лемме 2.2

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_r = c^{\tau}_{\omega_n}\text{form}\,((\mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_{r-1}) \bigcup \mathfrak{F}_r) = CF_\omega(f),$$

где

$$f(a) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\text{form}\,((f_1(a) \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} f_{r-1}(a)) \bigcup f_r(a)) =$$

$$= f_1(a) \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} f_r(a) = (f_1 \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} f_r)(a)$$

при любом $a \in \omega \bigcup \{\omega'\}$. Поэтому $f = f_1 \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} f_r$. Вследствие произвольности выбора r теорема доказана.

3. Основной результат. Для доказательства основного результата нам потребуются два вспомогательных утверждения, устанавливающие τ-замкнутость формации, имеющей внутренний $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник, а также тот факт, что решетка $c^{\tau}_{\omega_n}$ является полной подрешеткой решетки c^{ω}_n.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно ω-композиционная формация. Если $\mathfrak{F}$ имеет внутренний $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник, то $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая формация.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно ω-композиционная формация с внутренним $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значным ω-композиционным спутником f. Покажем, что $\mathfrak{F}$ τ-замкнута.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $H \in \tau(G)$. Поскольку для любого $a \in \omega \bigcup \{\omega'\}$ формация $f(a)$ τ-замкнута, то

$$H/R_\omega(H) = H/(R_\omega(G) \bigcap H) \cong HR_\omega(G)/R_\omega(G) \in \tau(G/R_\omega(G)).$$

Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G/R_\omega(G) \in f(\omega')$. Следовательно, $H/R_\omega(H) \in f(\omega')$.

Пусть теперь $p \in \omega \bigcap \pi(\mathrm{Com}(H))$. Тогда $C^p(G) = G_{\mathfrak{G}_{cp}}$. Вследствие ограничения на подгрупповой функтор τ $H \triangleleft\triangleleft G$. Тогда $H_{\mathfrak{G}_{cp}} = G_{\mathfrak{G}_{cp}} \bigcap H$. Следовательно,

$$H/H_{\mathfrak{G}_{cp}} = H/(G_{\mathfrak{G}_{cp}} \bigcap H) \cong HG_{\mathfrak{G}_{cp}}/G_{\mathfrak{G}_{cp}} \in \tau(G/G_{\mathfrak{G}_{cp}}) = \tau(G/C^p(G)).$$

Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G/C^p(G) \in f(p)$. Значит, $H/C^p(H) = H/H_{\mathfrak{G}_{cp}} \in f(p)$. Итак, $H/R_\omega(H) \in f(\omega')$ и для любого $p \in \omega \bigcap \pi(\mathrm{Com}(H))$ имеет место $H/C^p(H) \in f(p)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$, т.е. формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута.

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Решетка* $c^\tau_{\omega_n}$ *является полной подрешеткой решетки* c^ω_n.

Доказательство проведем индукцией по n. Согласно лемме 1.5 имеем

$$c^\tau_{\omega_0}\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i\right) = \tau\,\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i\right) = \mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i\right) = c^\omega_0\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i\right).$$

Следовательно, при $n = 0$ лемма справедлива.

Пусть $n > 0$ и при $n-1$ утверждение верно. Пусть $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций и m_i — минимальный $c^\tau_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{M}_i$. Возьмем в теореме 2.1 в качестве τ тривиальный подгрупповой функтор. Тогда

$$\vee^\omega_n(\mathfrak{M}_i \mid i \in I) = CF_\omega(\vee^\omega_{n-1}(m_i \mid i \in I)).$$

Но в силу предположения при любом $p \in \omega \bigcap \pi\Big(\mathrm{Com}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i\Big)\Big)$ формации

$$\vee^\omega_{n-1}(m_i \mid i \in I)(p) \quad \text{и} \quad (\vee^\omega_{n-1}(m_i \mid i \in I))(\omega')$$

τ-замкнуты. Следовательно, по лемме 3.1 формация $\vee^\omega_n(\mathfrak{M}_i \mid i \in I)$ является τ-замкнутой.

Лемма доказана.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 3.1. *Решетка всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций алгебраична и модулярна.*

Доказательство. Сначала покажем, что решетка $c^\tau_{\omega_n}$ алгебраична. Заметим, что любая τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация есть объединение своих однопорожденных τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных подформаций в решетке $c^{\tau}_{\omega_n}$. Индукцией по n покажем, что каждая однопорожденная τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация $\mathfrak{F}$ является компактным элементом в решетке $c^{\tau}_{\omega_n}$. Пусть

$$\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega_n} \text{ form } G \subseteq \mathfrak{M} = c^{\tau}_{\omega_n} \text{ form } \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right),$$

где $\mathfrak{F}_i$ — τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация. Пусть $n = 0$. Тогда в силу лемм 1.5 и 1.6

$$G \in c^{\tau}_{\omega_0} \text{ form } \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) = \text{form } \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) = \mathrm{QR}_0 \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Следовательно, $G \cong T / N$ для некоторой группы $T \in \mathrm{R}_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i)$. Значит, найдутся такие индексы $i_1, \ldots, i_k \in I$, что $T \in \mathrm{R}_0(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{F}_{i_k})$. Поэтому $G \in \text{form } (\mathfrak{F}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{F}_{i_k})$. Следовательно, в силу леммы 1.5

$$\mathfrak{F} \subseteq \text{form } \left(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{F}_{i_k} \right) = \tau \text{form } \left(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathfrak{F}_{i_k} \right).$$

Пусть теперь $n > 0$ и однопорожденные формации из $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$ являются компактными элементами в решетке $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$. Пусть f_i — минимальный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, f — минимальный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$ и m — минимальный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{M}$. По лемме 1.4

$$f(a) = \begin{cases} c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \text{ form } (G / C^a(G)), & \text{если } \ a \in \pi, \\ \varnothing, & \text{если } \ a \in \omega \setminus \pi, \\ c^{\tau}_{\omega_{n-1}} \text{ form } (G / R_{\omega}(G)), & \text{если } \ a = \{\omega'\}, \end{cases}$$

где $\pi = \omega \cap \pi(\mathrm{Com}\,(G))$.

Согласно лемме 1.7 $f \le m$. В силу теоремы 2.1 имеет место равенство $m = \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} (f_i \mid i \in I)$. Значит, для каждого $p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}\,(G))$ найдутся такие индексы $i_1, \ldots, i_r \in I$, что

$$G / C^p(G) \in f_{i_1}(p) \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} f_{i_r}(p).$$

Так как $\pi(\mathrm{Com}(G))$ — конечное множество, найдутся такие индексы $j_1, \ldots, j_s \in I$, что $G \in \mathfrak{F}_{j_1} \vee^{\tau}_{\omega_n} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_{j_s}$. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_{j_1} \vee^{\tau}_{\omega_n} \ldots \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_{j_s}$. Итак, решетка $c^{\tau}_{\omega_n}$ алгебраична, и ее компактными элементами являются однопорожденные τ-замкнутые n-кратно ω-композиционные формации.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Индукцией по n покажем, что для любых τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ таких, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$, выполняется тождество

$$\mathfrak{H} \cap (\mathfrak{X} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}) = \mathfrak{X} \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}).$$

Вследствие модулярности решетки всех формаций (см. [1]) при $n = 0$ утверждение теоремы справедливо для тривиального подгруппового функтора τ. Значит, решетка $c^{\omega}_0 = c_0$ модулярна. Согласно лемме 3.2 решетка $c^{\tau}_{\omega_0}$ является подрешеткой в c^{ω}_0. Следовательно, решетка $c^{\tau}_{\omega_0}$ модулярна.

Пусть $n > 0$ и второе утверждение теоремы верно при $n-1$. Пусть $\mathfrak{F}_i = CF_{\omega}(F_i)$, $i = 1, 2, 3,$ — τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация и $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$. Покажем, что

$$\mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{F}_2 \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_3) = \mathfrak{F}_2 \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3).$$

Пусть f_i — такой ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, что $f_i(\omega') = \mathfrak{F}_i = F_i(\omega')$ и $f_i(p) = c^{\tau}_{\omega_{n-1}}\mathrm{form}(\mathfrak{F}_i(C^p))$ при всех $p \in \omega$. В силу леммы 1.8 имеет место равенство $\mathfrak{F}_i = CF_{\omega}(f_i)$. Пусть $r_1 = f_2 \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} f_3$. По теореме 2.1

$$\mathfrak{F}_2 \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_3 = CF_{\omega}(f_2 \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} f_3) = CF_{\omega}(r_1).$$

По лемме 1.9 $h_1 = f_2 \cap r_1$ — внутренний ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{F}_2 \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_3)$.

Понятно, что $f_2(a) \subseteq f_1(a)$ при всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Значит, согласно предположению при всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$

$$f_1(a) \cap \left(f_2(a) \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} f_3(a) \right) = f_2(a) \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} \left(f_1(a) \cap f_3(a) \right).$$

Следовательно, $h_1 = f_2 \vee^{\tau}_{\omega_{n-1}} (f_1 \cap f_3)$. Но $f_1 \cap f_3$ — внутренний ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3$. Значит, согласно теореме 2.1 $\mathfrak{F}_2 \vee^{\tau}_{\omega_n} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3) = CF_{\omega}(h_1)$. Таким образом, при любых целых неотрицательных n решетка $c^{\tau}_{\omega_n}$ модулярна.

Теорема доказана.

В случае $n = 1$ получаем такое следствие.

***Следствие* 3.1** [8]. *Решетка всех τ-замкнутых ω-композиционных формаций алгебраична и модулярна.*

Если τ — тривиальный подгрупповой функтор, то, учитывая следствие 1 и замечание 3 из [6], получаем следующее утверждение.

***Следствие* 3.2** [6]. *Решетка всех n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций алгебраична и модулярна.*

В случае $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ справедливо такое утверждение.

***Следствие* 3.3.** *Решетка всех n-кратно композиционных формаций алгебраична и модулярна.*

При $n = 1$ и $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ справедливо такое следствие.

***Следствие* 3.4.** *Решетка всех композиционных формаций алгебраична и модулярна.*

1. *Скиба А. Н.* О локальных формациях длины 5 // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1986. – С. 135 – 149.
2. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. – М.: Наука, 1989. – 254 с.
3. *Ballester-Bolinches A., Shemetkov L. A.* On lattices of p-local formations of finite groups // Math. Nachr. – 1997. – **186**. – S. 57 – 65.
4. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. – Минск: Беларус. навука, 1997. – 240 с.
5. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. труды. – 1999. – **2**, № 2. – С. 114 – 147.
6. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 6. – С. 783 – 797.
7. *Шабалина И. П.* О решетке τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций конечных групп // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2003. – № 1. – С. 28 – 30.
8. *Задорожнюк М. В.* Об элементах высоты 3 решетки τ-значных ω-композиционных формаций // Вестн. Гродненск. ун-та. – 2008. – № 2. – С. 16 – 21.
9. *Safonov V. G.* On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite groups // Communs Algebra. – 2007. – **35**, № 11. – P. 3495 – 3502.
10. *Сафонов В. Г.* О модулярности решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций конечных групп // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 6. – С. 852 – 858.
11. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
12. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
13. *Скиба А. Н.* Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины // Вопросы алгебры. – 1987. – Вып. 3. – С. 21 – 23.

Получено 12.09.09