УДК 512.714

Л. П. Бедратюк (Хмельниц. нац. ун-т)

ЯДРА ДИФЕРЕНЦІЮВАНЬ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ КІЛЕЦЬ ТА ЕЛЕМЕНТИ КАЗИМІРА

We propose an algorithm for the calculation of elements of a kernel of arbitrary derivation of a polynomial ring that is based on an analog of the well-known Casimir element of the finite-dimensional Lie algebra. By using the obtained algorithm, the kernels of Weitzenböck derivation $d(x_i) = x_{i-1}$, $d(x_0) = 0$, $i = 0,\ldots, n$, are calculated in the cases where $n \le 6$.

Предлагается алгоритм вычисления элементов ядра произвольного дифференцирования кольца многочленов, который основан на аналоге известного элемента Казимира конечномерной алгебры Ли. С помощью полученного алгоритма ядра дифференцирования Вейтценбека $d(x_i) = x_{i-1}$, $d(x_0) = 0$, $i = 0,\ldots, n$, вычислены в случаях $n \le 6$.

1. Вступ. Нехай $\mathbb{K}[X] := \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ — кільце многочленів над полем $\mathbb{K}$ нульової характеристики. Диференціюванням кільця многочленів $\mathbb{K}[X]$ називається $\mathbb{K}$-лінійне відображення $D: \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, яке задовольняє правило Лейбніца. Для довільного набору многочленів $(f_0, f_1, \ldots, f_n) \in \mathbb{K}[X]^{n+1}$ існує єдине диференціювання D кільця $\mathbb{K}[X]$, для якого $D(x_i) = f_i$, $i = 0, \ldots$ $\ldots, n$, а саме,

$$D = f_0\partial_0 + \ldots + f_n\partial_n, \quad \partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Позначимо через $\mathbb{K}[X]^D$ кільце констант диференціювання D:

$$\mathbb{K}[X]^D = \{f \in \mathbb{K}[X];\, D(f) = 0\}.$$

Багато важливих математичних задач можуть бути трансформовані до питання знаходження кілець констант диференціювань. Відмітимо лише деякі з них — проблема якобіана, інваріанти та коваріанти бінарної форми, чотирнадцята проблема Гільберта, центр універсальної огортуючої алгебри Лі, поліноміальні розв'язки автономних систем диференціальних рівнянь (детальніше див. [1 – 3]). Проблему опису кільця $\mathbb{K}[X]^D$ для довільного диференціювання D не розв'язано навіть у випадку $n = 2$.

В роботі запропоновано загальний підхід до знаходження елементів ядра довільного диференціювання D кільця многочленів $\mathbb{K}[X]$, в якому використано відоме в теорії алгебр Лі поняття елемента Казиміра. Нагадаємо, що елементом Казиміра скінченновимірної алгебри Лі L називається елемент її центра $Z(L)$ універсальної огортуючої алгебри $U(L)$ вигляду $\sum_i u_i u_i^*$, де $\{u_i\}$ і $\{u_i^*\}$ — дуальні базиси реалізованих в $U(L)$ контрагредієнтних L-модулів відносно приєднаної дії алгебри L. Відображення симетризації задає ізоморфізм L-модулів $U(L)$ і $S(L)$, при якому центр $Z(L)$ переходить в алгебру інваріантів $S(L)^L$ симетричної алгебри $S(L)$. Алгебра $S(L)$ ізоморфна кільцю многочленів від базисних елементів алгебри L, яка діє на $S(L)$ приєднаними диференціюваннями $\mathrm{ad}(x)$, $x \in L$, до того ж $S(L)^L = \bigcap_{x\in L} S(L)^{\mathrm{ad}(x)}$. При симетризації дуальні базиси переходять в дуальні базиси, тому елемент Казиміра відображається в інваріант аналогічної структури. Отже, у більш загально-

© Л. П. БЕДРАТЮК, 2010

му випадку елементи ядра $\mathbb{K}[X]^D$ довільного диференціювання D кільця $\mathbb{K}[X]$ слід шукати у вигляді

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_k v_k, \quad u_i, \, v_i \in \mathbb{K}[X],$$

де многочлени u_i, v_i породжують контрагредієнтні D-інваріантні підпростори розмірності k в $\mathbb{K}[X]$.

У п. 2 для довільного диференціювання D введено поняття D-модуля в $\mathbb{K}[X]$, дуальних D-модулів і дано означення елемента Казиміра. Доведено, що будь-який елемент Казиміра диференціювання D належить ядру $\mathbb{K}[X]^D$. Показано, що для будь-якого лінійного диференціювання має місце обернене твердження: будь-який елемент ядра такого диференціювання буде елементом Казиміра.

У п. 3 вивчаються елементи Казиміра базисного диференціювання Вейтценбека d, тобто лінійного локально нільпотентного диференціювання, матрицею якого є одна жорданова клітка з нулями на головній діагоналі. Для цього диференціювання кожен d-модуль природно вкладається в $\mathfrak{sl}_2$-модуль. Тоді кожен елемент ядра диференціювання Вейтценбека d буде старшим вектором деякого незвідного $\mathfrak{sl}_2$-модуля в $\mathbb{K}[X]$. Розмірність цього $\mathfrak{sl}_2$-модуля та його старша вага є важливими числовими характеристиками елемента ядра.

У п. 4 довільному елементу z степеня $\deg(z)$ з ядра диференціювання d ставиться у відповідність деяка сім'я $\tau_i(z)$ елементів ядра. Оскільки степені $\tau_i(z)$ дорівнюють $\deg(z) + 1$, то, почавши з елемента ядра x_0 першого степеня, можна утворити всі елементи ядра вищих степенів. На основі цього процесу побудови елементів ядра, який є аналогом відомого Ω-процесу класичної теорії інваріантів (див. [4]), запропоновано алгоритм обчислення мінімальної системи породжуючих елементів кільця $\mathbb{K}[X]^d$.

Ядро диференціювання Вейтценбека активно вивчалося останнім часом у різних роботах. Скінченна породженість алгебри $\mathbb{K}[X]^d$ випливає з відомої теореми Вейтценбека [5], яка стверджує, що будь-яка лінійна дія адитивної групи $(\mathbb{K}, +)$ на алгебраїчному многовиді $\mathbb{A}^n$ має скінченнопороджене кільце інваріантів. Із використанням алгоритму ван ден Ессена у книзі [1] при допомозі системи комп'ютерної алгебри CoCoa знайдено мінімальні системи породжуючих алгебри $\mathbb{K}[X]^d$ для $n \leq 4$. У системі комп'ютерної алгебри SINGULAR у вигляді процедури invariantRing імплементовано алгоритм з роботи [6], за яким також знаходять мінімальну породжуючу систему ядра диференціювання Вейтценбека для $n \leq 4$. Проте для випадку $n > 4$ вказані алгоритми не є ефективними, оскільки високі степені породжуючих алгебри $\mathbb{K}[X]^d$ не дозволяють застосовувати техніку базисів Грьобнера, яка лежить в основі цих алгоритмів. Випадок $n = 5$ розглянуто в роботі [7].

У п. 5 з допомогою розробленого алгоритму обчислено мінімальні системи породжуючих ядра диференціювання Вейтценбека у випадку $n \leq 6$. Отримані мінімальні системи породжуючих збігаються з раніше отриманими результатами інших авторів, а обчислення для випадку $n = 6$ є новим результатом. Для випадків $n = 7, 8$ мінімальні системи породжуючих обчислено в роботах [8, 9].

2. Елементи Казиміра диференціювання. Для довільного диференціювання D алгебри $\mathbb{K}[X]$ наведемо загальний спосіб побудови елементів ядра $\mathbb{K}[X]^D$. Введемо необхідні поняття.

Означення 2.1. *Скінченновимірний векторний простір* $V \subset \mathbb{K}[X]$ *називається D-модулем, якщо* $D(V) \subseteq V$.

***Приклад* 2.1.** Припустимо, що D — локально нільпотентне диференціювання. Тоді векторний простір

$$C_s(D, x) := \left\langle x, D(x), D^2(x), \ldots, D^s(x) \right\rangle, \quad x \in \mathbb{K}[X],$$

є d-модулем.

***Приклад* 2.2.** Визначимо диференціювання d за правилом $d(x_i) = x_{i-1}$, $d(x_0) = 0, i \leq n$. Тоді для кожного i векторний простір $X_i := \mathbb{K}x_0 + \mathbb{K}x_1 + \ldots \ldots + \mathbb{K}x_i$ буде d-модулем. Диференціювання d називається диференціюванням Вейтценбека.

На довільному D-модулі V диференціювання D діє як лінійний оператор. Зафіксувавши деякий базис простору V, позначимо через D_V матрицю оператора D в цьому базисі. Зокрема, матрицею диференціювання d в d-модулі X_i є жорданова клітка $J_{i+1}(0)$.

Означення 2.2. *D-модуль V^* називається дуальним до D-модуля V, якщо в V і V^* існують такі базиси $\{v_i\}$, $\{v_i^*\}$, що матриці оператора D в цих базисах пов'язані співвідношенням*

$$D_{V^*} = \left(-D_V\right)^T.$$

Базиси $\{v_i\}$, $\{v_i^*\}$ також будемо називати взаємно дуальними базисами. Матриця диференціювання d в d-модулі X_k є жордановою кліткою $J_{k+1}(0)$, тому його матриця в дуальному просторі X_k^*, згідно з означенням дуального модуля, має вигляд $\left(-J_{k+1}(0)\right)^T$. Отже, оператор d так діє на елементах x_i^* дуального базису X_k^*: $d(x_i^*) = -x_{i+1}^*$, $d(x_k^*) = 0$.

Означення 2.3. *Два D-модулі V, W називаються ізоморфними, якщо існує ізоморфізм векторних просторів V, W, який переставний з дією оператора D.*

Теорема 2.1. *d-Модулі X_m^* та X_m ізоморфні для кожного $m \leq n$.*

Доведення. Задамо лінійне відображення $\varphi\colon X_m^* \to X_m$, яке на базисних векторах діє таким чином: $\varphi(x_i^*) = (-1)^i x_{m-i}$. Тоді $d\left(\varphi(x_i^*)\right) = d\left((-1)^i x_{m-i}\right) = (-1)^i x_{m-i-1}$ і

$$\varphi\left(d(x_i^*)\right) = \varphi(-x_{i+1}^*) = -(-1)^{i+1} x_{m-i-1} = (-1)^i x_{m-(i+1)} = d\left(\varphi(x_i^*)\right).$$

Отже, φ — ізоморфізм просторів X_m^* та X_m, який є переставним з диференціюванням d, тому $X_m^* \simeq X_m$, а базиси $\{x_i^*\}$ і $\left\{(-1)^i x_{m-i}\right\}$, $i = 0, \ldots, m$, є взаємно дуальними.

Теорему доведено.

Означення 2.4. *Нехай* $V = \{v_i\}$, $V^* = \{v_i^*\}$ — *два дуальних* D*-модулі в* $\mathbb{K}[X]$, *задані своїми взаємно дуальними базисами. Тоді елемент*

$$\Delta(V, V^*) := \sum_i v_i \cdot v_i^*$$

називається елементом Казиміра диференціювання D.

Оскільки v_i та v_i^* належать $\mathbb{K}[X]$, то добуток $v_i \cdot v_i^*$ визначено коректно.

На підставі теореми 2.1 отримуємо наступну серію елементів Казиміра другого степеня для диференціювання d:

$$\Delta(X_k, X_k^*) := \sum_{i=0}^{k} (-1)^i x_i \cdot x_{k-i}.$$

Легко перевірити, що $\Delta(X_k, X_k^*) \in \mathbb{K}[X]^d$.

***Приклад* 2.3.** Для $n = 4$ диференціювання d має два ненульових елементи Казиміра степеня 2:

$$\Delta(X_2, X_2^*) = 2x_0x_2 - x_1^2,$$

$$\Delta(X_4, X_4^*) = 2x_0x_4 - 2x_1x_3 + x_2^2.$$

Наступна теорема показує, що будь-який елемент Казиміра диференціювання D належить ядру $\mathbb{K}[X]^D$.

Теорема 2.2. *Нехай* U *і* U^* — *два дуальних* D*-модулі в* $\mathbb{K}[X]$. *Тоді* $\Delta(U, U^*) \in \mathbb{K}[X]^D$.

Доведення. Припустимо, що U, U^* задано своїми дуальними базисами $\{u_i\}$, $\{u_i^*\}$ і $D_U = \{\lambda_{i,j}\}$, $i, j = 0, \ldots, n$, $\lambda_{i,j} \in \mathbb{K}$. Тоді

$$D(u_i) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_{i,j} u_j, \; D(u_i^*) = \sum_{j=0}^{n} (-\lambda_{j,i} u_j).$$

Отже,

$$D\Big(\Delta(U, U^*)\Big) = D\left(\sum_{i=0}^{n} u_i u_i^*\right) = \sum_{i=0}^{n} \Big(D(u_i) u_i^* + u_i D(u_i^*)\Big) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} (\lambda_{i,j} u_j) u_i^* + u_i D(u_i^*)\right) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} (\lambda_{j,i} u_i) u_j^* + u_i D(u_i^*)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(u_i \left(\sum_{j=0}^{n} \lambda_{i,j} u_j^*\right) + D(u_i^*)\right) = 0.$$

Теорему доведено.

Можна також показати (див. [10]), що елемент Казиміра не залежить від вибору дуальних базисів у U і U^*, тому означення 2.4 є коректним.

Для лінійного диференціювання D, тобто такого диференціювання, для якого виконуються співвідношення

$$D(x_i) \;=\; \sum_{j=0}^{n} \lambda_{i,j} x_j,\ \lambda_{i,j} \in \mathbb{K}, \quad i = 0, \ldots, n,$$

справджується твердження, обернене до теореми 2.2.

Теорема 2.3. *Нехай D — лінійне диференціювання кільця $\mathbb{K}[X]$, тоді кожен елемент ядра $\mathbb{K}[X]^D$ є елементом Казиміра.*

Доведення. Відомо, що всі диференціювання кільця $\mathbb{K}[X]$ вигляду

$$f_0\partial_0 + f_1\partial_1 + \ldots + f_n\partial_n, \quad \partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad f_i \in \mathbb{K}[X],$$

утворюють алгебру Лі відносно операції комутування диференціювань. Комутатор двох диференціювань визначається формулою

$$\left[\sum_{i=0}^{n} f_i\partial_i,\ \sum_{i=0}^{n} g_i\partial_i\right] \;=\; \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} f_j\partial_j(g_i) - \sum_{j=0}^{n} g_j\partial_j(f_i)\right)\partial_i, \quad f_i,\, g_i \in \mathbb{K}[X].$$

Легко перевірити, враховуючи $D = D(x_0)\,\partial_0 + D(x_1)\,\partial_1 + \ldots + D(x_n)\,\partial_n$, що для кожного $i \le n$ виконується

$$[D, \partial_i] \;=\; -\sum_{j=0}^{n} \lambda_{ji}\partial_j\,.$$

Нехай z — нетривіальний елемент з $\mathbb{K}[X]^D$. Тоді векторний простір

$$\partial_z \;:=\; \langle \partial_0(z), \ldots, \partial_n(z) \rangle$$

є D-модулем, дуальним до D-модуля $X_n = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$. Для доведення достатньо перевірити умову взаємної дуальності вибраних базисів. Враховуючи, що $D(z) = 0$, маємо

$$D(\partial_i(z)) \;=\; [D, \partial_i](z) + \partial_i(D(z)) \;=\; -\sum_{j=0}^{n} \lambda_{ji}\partial_j(z),$$

тобто матриці $D_{\partial(z)}$, D_{X_n} диференціювання D у просторах $\partial(z)$ і X_n пов'язані між собою співвідношенням $\left(-D_{\partial(z)}\right)^T = D_{X_n}$, що і потрібно було показати.

Оскільки диференціювання D є лінійним, то $\deg(D(f)) = \deg(f)$ для $f \notin \mathbb{K}[X]^D$. Тому без втрати загальності можна обмежитися лише однорідними многочленами. Модулі X_n і $\partial(z)$ дуальні, отже, можна утворити їхній елемент Казиміра. Застосувавши теорему Ейлера про однорідні функції, отримаємо

$$\Delta(X_n, \partial_z) \;=\; x_0\partial_0(z) + x_1\partial_1(z) + \ldots + x_n\partial_n(z) \;=\; \deg(z)\, z\,.$$

Звідси безпосередньо випливає, що $z = \dfrac{1}{\deg(z)}\,\Delta(X_n, \partial_z)$, тобто z є елементом Казиміра диференціювання D.

Теорему доведено.

3. Елементи Казиміра диференціювання Вейтценбека. Далі будемо розглядати лише диференціювання Вейтценбека d: $d(x_i) = x_{i-1}$, $d(x_0) = 0$, $i = 0, \ldots, n$. Оскільки d — лінійне диференціювання, то з теорем 2.1, 2.3 випливає, що задача знаходження елементів ядра $\mathbb{K}[X]^d$ еквівалентна задачі знаходження реалізацій d-модулів X_k в $\mathbb{K}[X]$. Під реалізацією X_k розуміється будь-який d-модуль в $\mathbb{K}[X]$, який ізоморфний до d-модуля X_k. Нижче наведено обґрунтування способу побудови таких реалізацій.

Теорема 3.1. *Будь-який d-модуль $V \cong X_n$ можна вкласти в sl_2-модуль, де sl_2 — проста тривимірна алгебра Лі над полем $\mathbb{K}$.*

Доведення. Введемо на $V_n = \langle v_0, \ldots, v_n \rangle$, $d(v_i) = v_{i-1}$, $d(v_0) = 0$, два додаткових оператори $\hat{d}$ і e:

$$\hat{d}(v_i) = (i+1)(n-i)\,v_{i+1}, \qquad e(v_i) = (n-2i)\,v_i.$$

Безпосередня перевірка показує, що для всіх i

$$\begin{aligned}
\left[d, \hat{d}\right](v_i) &= e(v_i), \\
\left[d, e\right](v_i) &= -2\,d(v_i), \\
\left[\hat{d}, e\right](v_i) &= 2\,\hat{d}(v_i).
\end{aligned}$$

Ці комутаційні співвідношення збігаються з відомими комутаційними співвідношеннями між базисними елементами алгебри Лі $\mathfrak{s}l_2$. Отже, простір V_n разом з трійкою операторів d, $\hat{d}$, e є $\mathfrak{s}l_2$-модулем.

Диференціювання $\hat{d}$ та e визначають дві важливі числові функції на d-модулі $\mathbb{K}[X]$ — порядок та вагу многочлена.

Означення 3.1. *Порядком* ord (z) *многочлена* $z \in \mathbb{K}[X]$ *назвемо таке найменше натуральне число* s, *що* $\hat{d}^s(z) \neq 0$, *але* $\hat{d}^{s+1}(z) = 0$.

Використавши формулу Лейбніца, отримаємо, що $\operatorname{ord}(ab) = \operatorname{ord}(a) + \operatorname{ord}(b)$ для всіх $a, b \in \mathbb{K}[X]$.

Приклад **3.1.** Нехай $\operatorname{ord}(x_0) = n$. Для $n = 4$ маємо $\operatorname{ord}\left(\Delta(X_2, X_2^*)\right) = 4$ і $\operatorname{ord}\left(\Delta(X_4, X_4^*)\right) = 0$.

Неважко перевірити, що для диференціювання e кожен моном $x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ є власним вектором із власним значенням

$$n \sum_{i=0}^{n} \alpha_i - 2(0 \cdot \alpha_0 + 1 \cdot \alpha_1 + \ldots + n \cdot \alpha_n),$$

яке називається вагою цього монома. Однорідний многочлен z називається ізобарним, якщо всі його мономи мають однакову вагу. З роботи [1, с. 71] випливає, що $\mathbb{K}[X]^d$ породжується однорідними ізобарними многочленами.

Означення 3.2. *Вагою* $\omega(z)$ *ізобарного многочлена* z *називається вага його довільного монома.*

Легко перевірити, що для двох довільних ізобарних многочленів a і b виконується рівність $\omega(ab) = \omega(a) + \omega(b)$.

***Приклад* 3.2.** Легко бачити, що $\omega(x_i) = n - 2i$.

Наступна теорема показує, що кожен однорідний ізобарний многочлен з ядра $\mathbb{K}[X]^d$ визначає деяку сім'ю d-модулів.

Теорема 3.2. *Для довільного однорідного ізобарного многочлена* $z \in \mathbb{K}[X]^d$ *векторний простір*

$$V_m(z) := \langle v_0(z), v_1(z), \ldots, v_m(z) \rangle, \quad v_i(z) = \frac{(\omega(z) - i)!}{i!\,\omega(z)} \hat{d}^i(z),$$

$$v_0(z) := z, \quad m = 0, \ldots, s+1,$$

є d*-модулем, ізоморфним до* X_m. *Тут* $\omega(z)$ *і* s *— вага і порядок* z.

Доведення. Безпосередньою перевіркою можна переконатися в справедливості співвідношень

$$e\left(\hat{d}^i(z)\right) = (\omega(z) - 2i)\,\hat{d}^i(z),$$

$$d\left(\hat{d}^i(z)\right) = i(\omega(z) - i + 1)\,\hat{d}^{i-1}(z).$$

Підберемо тепер $\alpha_i(z) \in \mathbb{K}$ так, щоб векторний простір

$$V_m(z) = \langle v_0(z), v_1(z), \ldots, v_m(z) \rangle,$$

де $v_i(z) = \alpha_i(z)\,\hat{d}^i(z)$, став d-модулем. Для цього необхідно, щоб для всіх i виконувалась рівність $d(v_i(z)) = v_{i-1}(z)$. Оскільки

$$d(v_i(z)) = d\left(\alpha_i(z)\,\hat{d}^i(z)\right) = \alpha_i(z)\,i(\omega(z) - i)\,\hat{d}^{i-1}(z),$$

то для $\alpha_i(z)$ отримуємо рекурентне співвідношення

$$i(\omega(z) - i)\,\alpha_i(z) = \alpha_{i-1}(z), \qquad \alpha_0(z) = 1,$$

розв'язуючи яке, знаходимо

$$\alpha_i(z) = \frac{(\omega(z) - i)!}{i!\,\omega(z)!}.$$

Теорему доведено.

Наслідок. *Для довільного однорідного ізобарного многочлена* $z \in \mathbb{K}[X]^d$ *його вага і порядок рівні між собою.*

Доведення. Оскільки $\hat{d}^{\,\mathrm{ord}(z)+1}(z) = 0$ і $\hat{d}^{\,\mathrm{ord}(z)}(z) \neq 0$, то з тотожності

$$0 = d\left(\hat{d}^{\,\mathrm{ord}(z)+1}(z)\right) = (\mathrm{ord}(z) + 1)(\omega(z) - \mathrm{ord}(z))\,\hat{d}^{\,\mathrm{ord}(z)}(z) = 0$$

випливає $w(z) = \mathrm{ord}(z)$, що й доводить наслідок.

Аналогічно можна показати, що $\omega(v_i(z)) = \mathrm{ord}(z) - 2i$.

***Приклад* 3.3.** Покладемо $n = 4$, $z = \Delta\left(X_2, X_2^*\right) = 2x_0x_2 - x_1^2$. Тоді

$$v_0(z) = z = 2x_0x_2 - x_1^2, \qquad \omega(v_0(z)) = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 4,$$

$$v_1(z) = \frac{(4-1)!}{1!\,4!}\,\hat{d}(z) = -x_1x_2 + 3x_3x_0, \qquad \omega(v_1(z)) = 2,$$

$$v_2(z) = \frac{(4-2)!}{2!\,4!}\,\hat{d}^2(z) = x_1x_3 - x_2^2 + 2\,x_0x_4, \qquad \omega(v_2(z)) = 0,$$

$$v_3(z) = \frac{(4-3)!}{3!\,4!}\,\hat{d}^3(z) = 2\,x_1x_4 - x_2x_3, \qquad \omega(v_3(z)) = -2,$$

$$v_4(z) = \frac{(4-4)!}{4!\,4!}\,\hat{d}(z) = 2\,x_2x_4 - \frac{3}{2}\,x_3^2, \qquad \omega(v_4(z)) = -4.$$

Оскільки $d(v_i(z)) = v_{i-1}(z)$, $d(v_0(z)) = 0$, то d-модуль

$$V_4(z) = \langle v_0(z), v_1(z), v_2(z), v_3(z), v_4(z)\rangle$$

ізоморфний до X_4.

Отже, знаючи елементи ядра диференціювання d, можна будувати нетривіальні реалізації d-модулів в $\mathbb{K}[X]^d$. З іншого боку, знаючи реалізації d-модулів і використовуючи теореми 2.1, 2.3, можна конструювати елементи ядра диференціювання d. Ця обставина, як буде показано нижче, дозволить розробити ефективний ітераційний алгоритм знаходження ядра $\mathbb{K}[X]^d$.

4. Відображення τ_i. Результати попереднього пункту дають можливість коректно визначити сім'ю відображень $\tau_i\colon \mathbb{K}[X]^d \to \mathbb{K}[X]^d$. Довільному однорідному ізобарному елементу ядра z поставимо у відповідність елемент Казиміра

$$\tau_i(z) := \Delta\left(X_i^*, V_i(z)\right) = x_0v_i(z) - x_1v_{i-1}(z) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^i x_iv_0(z), \quad 0 \le i \le \min\left(\operatorname{ord}(z), n\right),$$

$$v_i(z) = \frac{(\omega(z) - i)!}{i!\,\omega(z)!}\,\hat{d}^i(z), \quad v_0(z) := z.$$

Звідси легко отримуємо $\tau_i(Cz) = C\tau_i(z)$ для $C \in \mathbb{K}$. Оскільки кожен многочлен із $\mathbb{K}[X]^d$ є сумою однорідних ізобарних многочленів, то відображення τ_i, насправді, є лінійним відображенням на $\mathbb{K}[X]^d$.

***Приклад* 4.1.** Нехай $z = 2\,x_0x_2 - x_1^2$. Тоді (див. приклад 3.3)

$$\tau_0(z) = x_0z,$$

$$\tau_1(z) = x_0v_1(z) - x_1z = -3\,x_0x_1x_2 + 3\,x_3x_0^2 + x_1^3,$$

$$\tau_2(z) = x_0v_2(z) - x_1v_1(z) + x_2z = -x_0(-2\,x_4x_0 + 2\,x_1x_3 - x_2^2),$$

$$\tau_3(z) = x_0v_3(z) - x_1v_2(z) + x_2v_1(z) - x_3z = 0,$$

$$\tau_4(z) = x_0v_4(z) - x_1v_3(z) + x_2v_2(z) - x_3v_1(z) + x_4z =$$

$$= 6\,x_0x_2x_4 - \frac{9}{2}\,x_0x_3^2 - 3\,x_1^2x_4 + 3\,x_1x_2x_3 - x_2^3.$$

Зауважимо, що $\partial_4(\tau_4(z)) = 3z \in \mathbb{K}[X]^d$. Також зрозуміло, що $\tau_i(z)$ є однорідним ізобарним многочленом.

Лема 4.1. *Нехай z — однорідний ізобарний многочлен з ядра диференціювання d. Тоді*:

1) $\operatorname{ord}(\tau_i(z)) = n + \operatorname{ord}(z) - 2i$, *якщо* $\tau_i(z) \neq 0$;

2) $\operatorname{ord}(\partial_i(z)) = \operatorname{ord}(z) + i$, *якщо* $\partial_i(z) \neq 0$.

Доведення. 1. Вага елемента

$$\tau_i(z) = x_0 \upsilon_i(z) + \ldots + (-1)^k x_k \upsilon_{i-k}(z) + \ldots + (-1)^i x_k \upsilon_i(z),$$

за означенням, дорівнює вазі будь-якого доданка цієї суми. Але

$$\omega\big(x_k \upsilon_{i-k}(z)\big) = \omega(x_i) + \omega(z) = n - 2k + \operatorname{ord}(z) - 2(i-k) =$$

$$= n + \operatorname{ord}(z) - 2i,$$

що і потрібно було довести.

2. Доведення проведемо для випадку $i = n$. Припустимо, що z містить моном $x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha_n \neq 0$. Тоді його вага $\omega(z)$ дорівнює $n\left(\sum_i \alpha_i\right) - 2(\alpha_1 + {}$ $+ 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n)$. Частинна похідна $\partial_n(z)$ містить моном $x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n - 1}$ і його вага

$$n\left(\sum_i \alpha_i - 1\right) - 2\big(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n(\alpha_n - 1)\big) =$$

$$= n\left(\sum_i \alpha_i\right) - 2\big(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n\big) + n.$$

Отже, $\operatorname{ord}(\partial_n(z)) = \operatorname{ord}(z) + n$.

Інші випадки розглядаються аналогічно.

Лему доведено.

Для довільного підкільця $T \subseteq \mathbb{K}[X]^d$ позначимо через $\tau(T)$ підкільце, яке породжене елементами $\tau_i(z)$, $z \in T$, $i \leq \min(n, \operatorname{ord}(z))$. Ядро $\mathbb{K}[X]^d$ є градуйованим кільцем

$$\mathbb{K}[X]^d = \left(\mathbb{K}[X]^d\right)_0 + \left(\mathbb{K}[X]^d\right)_1 + \ldots + \left(\mathbb{K}[X]^d\right)_i + \ldots,$$

де $\left(\mathbb{K}[X]^d\right)_i$ — векторний підпростір, породжений однорідними елементами ядра степеня i, зокрема $\left(\mathbb{K}[X]^d\right)_0 = \mathbb{K}$, $\left(\mathbb{K}[X]^d\right)_1 = \mathbb{K}x_0$.

Виявляється, відображення τ сюр'єктивно відображає компоненту $\left(\mathbb{K}[X]^d\right)_i$ в компоненту $\left(\mathbb{K}[X]^d\right)_{i+1}$. Має місце наступна теорема.

Теорема 4.1. *Справджується рівність*

$$\tau\Big(\left(\mathbb{K}[X]^d\right)_i\Big) = \left(\mathbb{K}[X]^d\right)_{i+1}.$$

Доведення. Оскільки, очевидно, $\tau\Big(\left(\mathbb{K}[X]^d\right)_i\Big) \subseteq \left(\mathbb{K}[X]^d\right)_{i+1}$, то достатньо показати, що довільний елемент $z \in \mathbb{K}[X]^d$ можна подати у вигляді

$$z = \tau_n(\bar{c}_n) + \tau_{n-1}(\bar{c}_{n-1}) + \ldots + \tau_1(\bar{c}_1)$$

для деяких $\bar{c}_n \in \mathbb{K}[X]^d$, $\deg(\bar{c}_n) = \deg(z) - 1$. Можна вважати, що z є однорідним ізобарним многочленом. Розглянемо послідовність многочленів

$$c(0) = \partial_n(z), \qquad c(i) = \partial_{n-i}(z) + \sum_{k=1}^{i} (-1)^{k+1} c_k(i-k), \quad i = 0, \ldots, n,$$

де

$$c_k(i) = \frac{(\omega(c(i)) - k)!}{k!\,\omega(c(i))!}\, \hat{d}^k(c(i)), \quad c_0(i) = c(i),$$

є базисними векторами d-модулів $V_k(c(i))$ (див. теорему 3.2).

Оскільки оператори ∂_n і d комутують між собою, то

$$d(c(0)) = d(\partial_n(z)) = \partial_n(d(z)) = 0.$$

Далі, маємо $c(1) = \partial_{n-1}(z) + c_1(0)$. Враховуючи, що $d(\partial_{n-1}(z)) = -\partial_n(z)$ і $d(c_1(0)) = c_0(0) = c(0)$, отримуємо

$$d(c(1)) = -\partial_n(z) + c(0) = -c(0) + c(0) = 0.$$

Спочатку покажемо, що $d(c(i+1)) = 0$ для $i \le n-1$. Запишемо елемент $c(i + 1)$ у вигляді

$$c(i+1) = \partial_{n-(i+1)}(z) + \sum_{k=1}^{i+1} (-1)^{k+1} c_k(i+1-k) =$$

$$= \partial_{n-(i+1)}(z) + c_1(i) + \sum_{k=2}^{i+1} (-1)^{k+1} c_k(i+1-k).$$

Враховуючи, що $d(c_k(i)) = c_{k-1}(i)$ і $d(\partial_{n-(i+1)}(z)) = -\partial_{n-i}(z)$, маємо

$$d(c(i+1)) = d(\partial_{n-(i+1)}(z)) + d\left(\sum_{k=2}^{i+1} (-1)^{k+1} c_k(i+1-k)\right) + d(c_1(i)) =$$

$$= -\partial_{n-i}(z) + \sum_{k=2}^{i+1} (-1)^{k+1} c_{k-1}(i+1-k) + c(i) =$$

$$= -\left(\partial_{n-i}(z) + \sum_{k=1}^{i} (-1)^{k+1} c_k(i-k)\right) + c(i) = -c(i) + c(i) = 0.$$

Перейдемо до доведення теореми індукцією за степенем z. Для елемента ядра x_0 першого степеня, очевидно, маємо $x_0 = \tau_1(1)$. Припустимо, що твердження справджується для всіх многочленів ядра, степені яких менші за степінь z. Оскільки $\partial_n(z) = c(0)$ і $\operatorname{ord}(\partial_n(z)) = \operatorname{ord}(z) + n \ge n$, то існує елемент Казиміра $\tau_n(c(0))$:

$$\tau_n(c(0)) = x_n c(0) - x_{n-1} c_1(0) + \ldots + (-1)^n x_0 c_n(0).$$

Тоді, враховуючи, що $\deg(z)\, z = x_n \partial_n(z) + x_{n-1}\partial_{n-1}(z) + \ldots + x_0 \partial_0(z)$, отримуємо

$$\deg(z)\,z - \tau_n\big(c(0)\big) = x_{n-1}\big(\partial_n(z) + c_1(0)\big) + x_{n-2}\big(\partial_{n-2}(z) - c_2(0)\big) + \ldots$$

$$\ldots + x_0\Big(\partial_0(z) - (-1)^n c_n(0)\Big).$$

Отже, ми виключили змінну x_n із правої частини останнього виразу, причому його ліва частина, очевидно, належить ядру. Тепер спробуємо виключити із правої частини змінну x_{n-1} так, щоб у правій частині був елемент ядра.

Коефіцієнт біля x_{n-1} дорівнює $\partial_n(z) + c_1(0) = c(1) \in \mathbb{K}[X]^d$, тому можна побудувати відповідний елемент Казиміра, у якого коефіцієнт біля x_{n-1} також дорівнює $c(1)$:

$$\tau_{n-1}\big(c(1)\big) = x_{n-1}c_0(1) - x_{n-2}c_1(1) + \ldots + (-1)^{n-1}x_0 c_{n-1}(1).$$

Віднявши від лівої і правої частини $\tau_{n-1}\big(c(1)\big)$, ми виключимо x_{n-1} із правої частини:

$$\deg(z)\,z - \Big(\tau_n\big(c(0)\big) + \tau_{n-1}\big(c(1)\big)\Big) = x_{n-2}\Big(\partial_{n-2}(z) - c_2(0) + c_1(1)\Big) + \ldots$$

$$\ldots + x_i\Big(\partial_i(z) - (-1)^i c_i(0) - (-1)^{i-1}c_{i-1}(1)\Big) + \ldots$$

$$\ldots + x_0\Big(\partial_0(z) - (-1)^n c_n(0) - (-1)^{n-1}c_{n-1}(1)\Big) =$$

$$= x_{n-2}\big(c(2)\big) + \ldots + x_0\Big(\partial_0(z) - (-1)^n c_n(0) - (-1)^{n-1}c_{n-1}(1)\Big).$$

Продовжуючи цей процес, на n-му кроці одержуємо

$$\deg(z)\,z - \Big(\tau_n\big(c(0)\big) + \tau_{n-1}\big(c(1)\big) + \ldots + \tau_1\big(c(n-1)\big)\Big) =$$

$$= x_0\Big(\partial_0(z) + c_1(n) - c_2(n-1) + \ldots + (-1)^{n+1}c_n(0)\Big) = x_0\,c(n).$$

Оскільки $\deg\big(c(n)\big) = \deg(z) - 1$, то за припущенням індукції многочлен $c(n)$ можна подати у вигляді

$$c(n) = \tau_n(c'_n) + \tau_{n-1}(c'_{n-1}) + \ldots + \tau_1(c'_1)$$

для деяких $c'_i \in \mathbb{K}[X]^d$. Але

$$x_0\,c(n) = \sum_i x_0\tau_i(c'_i) = \sum_i \tau_i(x_0 c'_i),$$

тому

$$\deg(z)\,z = \tau_n\Big(c(0) + \tau_{n-1}\big(c(1)\big) + \ldots + \tau_1\big(c(n-1)\big) + x_0\,c(n)\Big) =$$

$$= \tau_n\big(c(0) + x_0 c'_n\big) + \tau_{n-1}\Big(c(1) + x_0 c'_{n-1}\Big) + \ldots + \tau_1\big(c(n-1) + x_0 c'_1\big).$$

Звідси знаходимо

$$z = \frac{1}{\deg(z)}\Big(\tau_n\big(c(0) + x_0 c'_n\big) + \tau_{n-1}\Big(c(1) + x_0 c'_{n-1}\Big) + \ldots + \tau_1\big(c(n-1) + x_0 c'_1\big)\Big).$$

Теорему доведено.

На основі цієї теореми можна розробити ефективний алгоритм обчислення ядра диференціювання Вейтценбека, який буде розглянуто в наступному пункті.

5. Алгоритм обчислення ядра $\mathbb{K}[X]^d$. Ядро $\mathbb{K}[X]^d$ є скінченнопородженим кільцем, тому природно виникає задача виділення його мінімальної породжуючої системи елементів. Як було показано вище, використовуючи відображення τ, можна легко генерувати елементи ядра довільного степеня. Тому потрібно мати зручний критерій того, чи знайдені елементи ядра породжують все ядро, чи ще не породжують, і потрібно продовжувати шукати нові елементи ядра.

Має місце наступна теорема.

Теорема 5.1. *Нехай T — підкільце в $\mathbb{K}[X]^d$, яке містить x_0 і для якого $\tau(T) \subseteq T$. Тоді $\mathbb{K}[X]^d = T$.*

Доведення. Достатньо показати, що $\mathbb{K}[X]^d \subseteq T$. За умовою $x_0 \in T$. Припустимо, що теорема справджується для всіх многочленів степеня s. Нехай z має степінь $s+1$. Тоді за теоремою 4.1 елемент z можна зобразити у вигляді суми многочленів вигляду $\tau_i(z_i')$, де z_i' — елементи степеня s. Тому за припущенням індукції $z \in T$, а отже, і $\mathbb{K}[X]^d \subseteq T$.

Теорему доведено.

Відображення τ_i дозволяють організувати ітераційний процес обчислення ядра $\mathbb{K}[X]^d$. Для довільного підкільця B ядра через $\overline{B}$ позначимо кільце $B \bigcup \tau(B)$. Для кожного цілого $m \geq 0$ індуктивно визначимо послідовність підкілець:

$$B_0 = \mathbb{K}[X]_0,$$

$$B_m = \overline{B_{m-1}}.$$

Отримуємо зростаючий ряд кілець

$$B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \ldots .$$

Із попередньої теореми, а також із скінченної породженості ядра диференціювання Вейтценбека випливає справедливість наступного твердження.

Теорема 5.2. *Існує k таке, що $B_k = B_{k+1} = \mathbb{K}[X]^d$.*

Для реалізації алгоритму потрібно вміти ефективно обчислювати алгебру $\tau(B_i)$, знаючи породжуючу множину многочленів для B_i. Введемо деякі необхідні поняття.

Означення 5.1. *Довільний елемент $z \in \mathbb{K}[X]^d$, який можна виразити як многочлен від елементів B_i меншого або рівного степенів, називається звідним відносно B_i. В протилежному випадку z називається незвідним елементом.*

Означення 5.2. *Скінченна множина елементів $\mathbb{K}[X]^d$ така, що кожен елемент ядра є звідним відносно цієї системи, називається повною незвідною системою.*

Означення 5.3. *Повна незвідна система елементів ядра називається мінімальною, якщо після вилучення з неї хоча б одного елемента вона перестає бути повною.*

Зрозуміло, що повна мінімальна система незвідних елементів збігається з деякою мінімальною породжуючою системою кільця $\mathbb{K}[X]^d$.

Деякі випадки, коли можна встановити, чи даний елемент ядра є звідним, розглянуто в наступній теоремі.

Теорема 5.3. *Нехай* $u,\ v \in \mathbb{K}[X]^d$ *є незвідними відносно* B_i. *Тоді*:

1) *якщо* $\operatorname{ord}(u) = 0$, *то елемент* u v *є звідним відносно* B_{i+1};

2) *елемент* $\tau_i(uv)$ *звідний відносно* B_{i+1} *для всіх* $i \le \min(\operatorname{ord}(u), \operatorname{ord}(v))$;

3) *елемент ядра* $\tau_i(u_1 u_2 \ldots u_{i+1})$, $u_k \in B_i$, *завжди звідний відносно* B_{i+1}.

Доведення. 1. Випливає з того, що коли $\operatorname{ord}(u) = 0$, то $\tau_i(uv) = u\,\tau_i(v)$.

2. Покажемо, що при $i \le \min(\operatorname{ord}(u), \operatorname{ord}(v))$ має місце рівність

$$\tau_i(uv) = u\,\tau_i(v) + \sum_{k=1}^{i-1} \tau_{i-k}(c'_k)$$

для деяких $c'_k \in \mathbb{K}[X]^d$. Справді, поклавши $\alpha_i(z) := \dfrac{(\omega(z) - i)!}{i!\,\omega(z)!}$ для довільного однорідного ізобарного елемента z, отримаємо

$$\tau_i(uv) - u\,\tau_i(v) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \alpha_{i-k}(uv)\, x_{i-k} \hat{d}^k(uv) -$$

$$- u\left(\sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \alpha_{i-k}(v)\, x_{i-k} \hat{d}^k(v)\right) =$$

$$= x_i\, uv + \sum_{k=1}^{i} (-1)^{i-k} \alpha_{i-k}(uv)\, x_{i-k} \hat{d}^k(uv) -$$

$$- u\left(x_i v + \sum_{k=1}^{i} (-1)^{i-k} \alpha_{i-k}(v)\, x_{i-k} \hat{d}^k(v)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{i} (-1)^{i-k} x_{i-k} \left(\alpha_{i-k}(uv)\, \hat{d}^k(uv) - \alpha_{i-k}(v)\, u\, \hat{d}^k(v)\right).$$

Права частина рівності належить ядру як різниця двох елементів ядра, тому, використавши теорему 4.1, отримаємо потрібний результат.

3. Якщо серед многочленів $u_1, u_2, \ldots, u_{i+1}$ є многочлени нульового порядку, то многочлен $\tau_i(u_1 u_2 \ldots u_{i+1})$ звідний згідно з першим твердженням теореми; якщо ж всі вони мають ненульові порядки, то порядок $u_1 u_2 \ldots u_{i+1}$ більший або дорівнює i, тому $\tau_i(u_1 u_2 \ldots u_{i+1})$ звідний за твердженням 2 теореми.

Теорему доведено.

Для знаходження породжуючих многочленів алгебри B_{m+1} потрібно виділити серед многочленів з $\tau(B_m)$ ті, які є незвідними і не належать до B_m.

Означення 5.4. *Многочлен з алгебри* $\tau(B_m)$ *називається допустимим для алгебри* B_m, *якщо він незвідний і не належить до* B_m.

Нехай $B_m = \mathbb{K}[f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s]$, де $g_1, \ldots, g_s$ — допустимі многочлени для B_{m-1}. З теореми 5.3 випливає наступне твердження.

Теорема 5.4. *Многочлен* $\tau_i\left(f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_r^{\alpha_r} g_1^{\beta_1} \ldots g_s^{\beta_s}\right)$ *не може бути допустимим для* B_m, *якщо*:

1) $\sum_k \alpha_k + \sum_k \beta_k > i$;

2) $\sum_k \beta_k = 0$;

3) *деякі з* f_i, g_k *мають нульовий порядок, але при цьому* $\alpha_i \neq 0$, $\beta_k \neq 0$;

4) $f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} f_r^{\alpha_r} g_1^{\beta_1} g_s^{\beta_s}$ *можна подати у вигляді добутку двох многочленів, один з яких має порядок більший за* i.

З викладеного вище випливає такий алгоритм обчислення алгебри $\mathbb{K}[X]^d$. Позначимо через $\{B\}$ породжуючу множину алгебри B.

1. $\{B_0\} = \{x_0\}$.

2. Припустимо, що породжуючі елементи алгебри B_i вже обчислено і

$$\{B_i\} = \{f_1, \ldots, f_r\} \cup \{g_1, \ldots, g_s\},$$

де $\{g_1, \ldots, g_s\}$ — всі допустимі многочлени для B_i.

3. Розглянемо скінченну множину

$$B_i^{(m)} := \left\{\tau_k\left(f_q^{\alpha} g_p^{\beta}\right), \alpha + \beta = m, p \leq s, k \leq n, m \leq n\right\}.$$

4. Використовуючи теореми 5.3, 5.4, будуємо множину H тих многочленів з $B_i^{(m)}$, $m \leq n$, які є допустимими.

5. Якщо $H = \varnothing$, то $\mathbb{K}[X]^d = B_i$. Інакше $B_{i+1} = \{f_1, \ldots, f_r\} \cup \{g_1, \ldots \ldots, g_s\} \cup H$.

6. Обчислення $\mathbb{K}[X]^d$ для $n < 7$. Змінимо позначення з x_0 на t.

Теорема 6.1. $B_1 = \mathbb{K}\left[t, \tau_2(t), \tau_4(t), \ldots, \tau_{2[n/2]}(t)\right]$, $n > 2$.

Доведення. Зрозуміло, що допустимими многочленами для B_1 можуть були лише такі многочлени $\tau_i(t)$, $i \leq n$. При непарних i всі $\tau_i(t)$, як неважко переконатися, дорівнюють нулю. Для доведення того, що $\tau_2(t)$, $\tau_4(t), \ldots \ldots, \tau_{2[n/2]}(t)$ разом з t є мінімальною породжуючою множиною, потрібно показати, що між цими многочленами і t^2 немає лінійних співвідношень. Припустимо, що існує нетривіальна лінійна комбінація

$$\alpha_2 \tau_2(t) + \alpha_4 \tau_4(t) + \ldots + \alpha_{2[n/2]} \tau_{2[n/2]}(t) + \beta t^2 = 0.$$

Врахувавши те, що $\tau_i(t) = 2 t x_i + A_i$, де многочлен A_i не залежить від t, отримаємо

$$\alpha_2 \tau_2(t) + \alpha_4 \tau_4(t) + \ldots + \alpha_{2[n/2]} \tau_{2[n/2]}(t) + \beta t^2 =$$
$$= 2t(\alpha_2 x_2 + \alpha_4 x_4 + \ldots + \alpha_{2[n/2]} x_{2[n/2]} + \beta t) +$$
$$+ \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_{2[n/2]} A_{2[n/2]}.$$

Рівність нулю можлива лише при нульовому наборі коефіцієнтів, отже, система породжуючих многочленів є лінійно незалежною і тому вказана система породжуючих є мінімальною.

Теорему доведено.

Теорема 6.1 підтверджує результат роботи [11] про те, що розмірність простору квадратичних інваріантів автоморфізму $\exp(td)$ дорівнює $[n/2]$.

Всі обчислення проводились в Maple.

***n* = 0, 1.**

Випадки $n = 0, 1$ характеризуються тим, що для них, очевидно, $\tau(B_0) = 0$. Тому $B_1 = B_0$, тобто $\mathbb{K}[X]^d = \mathbb{K}[t]$.

***n* = 2.**

$B_1 = \mathbb{K}[t, dv]$, де $dv := \tau_2(t) = tx_2 - 2x_1^2$. Оскільки $\operatorname{ord}(dv) = 0$, то в B_1 немає допустимих елементів. Тому $B_2 = B_1$ і $\mathbb{K}[X]^d = \mathbb{K}[t, dv]$.

***n* = 3.**

$B_1 = \mathbb{K}[t, dv]$, де $dv = \tau_2(t)$. Оскільки $\operatorname{ord}(dv) = 2$, то допустимими елементами для B_1 можуть бути лише $\tau_1(dv)$, $\tau_2(dv)$ і $\tau_3(dv^2)$. Але $\tau_3(dv^2) = 0$ і $\tau_2(dv) = 0$, тому залишається один елемент $tr := \tau_1(dv)$. Елемент dv не належить до B_1, оскільки жодна лінійна комбінація елементів третього степеня в $B_1 - t^3$ і tdv не дає в результаті tr, тому це допустимий елемент і $B_2 = \mathbb{K}[t, dv, tr]$.

Допустимим елементом для B_2 може бути лише елемент $ch = \tau_3(tr)$. Оскільки $\operatorname{ord}(ch) = 0$, а в B_2 не міститься елементів нульового порядку, то ch не належить до B_2. Звідси отримуємо, що $B_3 = \mathbb{K}[t, dv, tr, ch]$. Оскільки $\operatorname{ord}(ch) = 0$, а B_3 не має допустимих елементів, то $B_4 = B_3$, отже, $\mathbb{K}[X]^d = \mathbb{K}[t, dv, tr, ch]$, де

$$dv = -2tx_2 + x_1^2,$$

$$tr = -3tx_1x_2 + 3t^2x_3 + x_1^3,$$

$$ch = -18tx_1x_2x_3 + 8tx_2^3 + 9x_3^2t^2 + 6x_1^3x_3 - 3x_1^3x_2^2.$$

***n* = 4.**

$B_1 = \mathbb{K}[t, dv_1, dv_2]$, де

$$dv_1 = \tau_2(t), \qquad \operatorname{ord}(dv_1) = 4,$$

$$dv_2 = \tau_4(t), \qquad \operatorname{ord}(dv_2) = 0.$$

Допустимими елементами для B_1 можуть бути лише $\tau_i(dv_1)$, $i = 1, \ldots, 4$. Безпосередня перевірка показує, що $\tau_2(dv_1) = t\,dv_2$ і $\tau_3(dv_1) = 0$. Покладемо

$$tr_1 = \tau_1(dv_1), \qquad \operatorname{ord}(tr_1) = 6,$$

$$tr_2 = \tau_4(dv_1), \qquad \operatorname{ord}(tr_2) = 0.$$

Степені елементів t^3, td_1, td_2 дорівнюють 3, а порядки — відповідно 8, 8, 4, і тому tr_1, tr_2 не належать до B_1, отже, $B_2 = \mathbb{K}[t, dv_1, dv_2, tr_1, tr_2]$. Оскільки $\operatorname{ord}(dv_2) = \operatorname{ord}(tr_2) = 0$, то допустимими можуть бути лише елементи $\tau_i(tr_1)$, $i = 1, \ldots, 4$. Але $\tau_2(tr_1) = 0$, $\tau_2(tr_4) = 0$, а

$$\tau_1(tr_1) = dv_2\,t^2 + dv_1^2,$$

$$\tau_3(tr_2) = dv_1\,dv_2 - t\cdot tr_2.$$

Тому $\tau(B_2) \subseteq B_2$, $B_3 = B_2$ і $\mathbb{K}[X]^d = \mathbb{K}\big[t, dv_1, dv_2, tr_1, tr_2\big]$,

$$dv_1 = -2\,tx_2 + x_1^2,$$

$$dv_2 = -2\,tx_4 + 2\,x_1x_3 - x_2^2,$$

$$tr_1 = -3\,tx_1x_2 + 3\,x_3t^2 + x_1^3,$$

$$tr_2 = 12\,x_2tx_4 - 9\,x_3^2t - 6\,x_1^2x_4 + 6\,x_1x_2x_3 - 2\,x_2^3.$$

***n* = 5.**

З теореми 6.1 маємо, що $B_1 = \mathbb{K}\big[t, dv_1, dv_2\big]$, де

$$dv_1 := \tau_2(t), \qquad \operatorname{ord}(dv_1) = 6,$$

$$dv_2 := \tau_4(t), \qquad \operatorname{ord}(dv_2) = 2.$$

Допустимими елементами для B_1 можуть бути лише такі 10 елементів:

$$B_1^{(1)} = \big\{\tau_i(dv_1),\ i = 1, \ldots, 5;\ \tau_i(dv_2),\ i = 1, 2\big\},$$

$$B_1^{(2)} = \big\{\tau_i(dv_2^2),\ i = 3, 4\big\},$$

$$B_1^{(3)} = \big\{\tau_5(dv_2^3)\big\}.$$

Безпосередня перевірка показує, що

$$\tau_2(dv_1) = -\frac{6}{5}\,t\,dv_2, \qquad \tau_5(dv_1) = 0,$$

$$\tau(dv_2) = 5\,\tau_3(dv_1), \qquad \tau_2(dv_2) = -\frac{5}{4}\,\tau_4(dv_1).$$

Позначимо

$$tr_1 := \tau_4(dv_1), \quad \operatorname{ord}(tr_1) = 3, \quad tr_2 := \tau_3(dv_1), \quad \operatorname{ord}(tr_2) = 5,$$

$$tr_3 := \tau_1(dv_1), \quad \operatorname{ord}(tr_3) = 9, \quad p_1 := \tau_4(dv_2^2), \quad \operatorname{ord}(p_1) = 1,$$

$$p_2 := \tau_3(dv_2^2), \quad \operatorname{ord}(p_2) = 3, \quad si_1 := \tau_5(dv_2^3), \quad \operatorname{ord}(si_1) = 1.$$

Отже,

$$B_2 = \mathbb{K}\big[t, dv_1, dv_2, tr_{1-3}, p_{1-2}, si_1\big].$$

Легко показати, що ця система є мінімальною системою породжуючих для B_2.

Знаходимо допустимі елементи для B_2:

$$B_2^{(1)} = \big\{\tau_3(tr_1), \tau_5(tr_2), \tau_4(tr_3), \tau_5(tr_3)\big\},$$

$$B_2^{(2)} = \big\{\tau_4(dv_2\,tr_1), \tau_5(dv_2\,p_2), \tau_4(tr_1^2)\big\},$$

$$B_2^{(3)} = \left\{\tau_5(dv_2^2\, p_1),\, \tau_5(dv_2^2\, tr_1),\, \tau_5(dv_2^2\, si_1),\, \tau_5(tr_1\, p_1\, si_1),\, \tau_5(p_1\, p_2\, si_1)\right\},$$

$$B_2^{(4)} = \{\varnothing\}.$$

Безпосередня перевірка показує, що наступні елементи дорівнюють нулю: $\tau_2(tr_1)$, $\tau_5(dv_2\, tr_1)$, $\tau_5(tr_1^2)$, $\tau_5(dv_2^2\, p_1)$, $\tau_5(tr_1\, p_1\, si_1)$.

Позначимо

$$c_1 := \tau_5(tr_2), \quad \mathrm{ord}\,(c_1) = 0, \quad c_2 := \tau_4(tr_3), \quad \mathrm{ord}\,(c_2) = 4,$$

$$c_3 := \tau_5(tr_3), \quad \mathrm{ord}\,(c_3) = 6, \quad s_1 := \tau_4(dv_2\, tr_1), \quad \mathrm{ord}\,(s_1) = 2,$$

$$v_1 := \tau_5(dv_2\, p_2), \quad \mathrm{ord}\,(v_1) = 0, \quad v_2 := \tau_5(dv_2^2\, tr_1), \quad \mathrm{ord}\,(v_2) = 2,$$

$$dv := \tau_5(dv_2^2\, si_1), \quad \mathrm{ord}\,(dv) = 0, \quad vis := \tau_5(p_1 p_2 si_1), \quad \mathrm{ord}\,(vis) = 0.$$

Отже,

$$B_3 = \mathbb{K}\left[t,\, dv_1,\, dv_2,\, tr_1,\, tr_2,\, tr_3,\, c_1,\, c_2,\, c_3,\, p_1,\, p_2,\, s_1,\, si_1,\, v_1,\, v_2,\, dv,\, vis\right].$$

Наступні елементи є допустимими для B_3:

$$p_3 := \tau_2(c_3), \quad \mathrm{ord}\,(p_3) = 7, \quad s_2 := \tau_1(p_1), \quad \mathrm{ord}\,(s_2) = 4,$$

$$si_2 := \tau_1(s_1), \quad \mathrm{ord}\,(si_2) = 5, \quad dev := \tau_2(v_2), \quad \mathrm{ord}\,(dev) = 3,$$

$$od := \tau_5(s_1 dv_2^2), \quad \mathrm{ord}\,(od) = 1, \quad trn := \tau_5(v_2 dv_2^2), \quad \mathrm{ord}\,(trn) = 1.$$

Можна показати, використовуючи розроблену техніку, що

$$B_4 = \mathbb{K}\left[t,\, d_{1-2},\, tr_{1-3},\, c_{1-3},\, p_{1-3},\, s_{1-2},\, si_{1-2},\, v_{1-2},\, dev,\, od,\, dv,\, trn,\, vis\right],$$

$\tau(B_4) \subset B_4$ і вказана система 23 многочленів є мінімальною системою породжуючих для $\mathbb{K}[X]^d$ для $n = 5$.

$n = 6$.

Як і для випадку $n = 5$, послідовно отримаємо $B_1 = \mathbb{K}[t,\, dv_1,\, dv_2,\, dv_3]$, де

$$dv_1 := \tau_6(t), \quad \mathrm{ord}\,(dv_1) = 0, \quad dv_2 := \tau_4(t), \quad \mathrm{ord}\,(dv_2) = 4,$$

$$dv_3 := \tau_2(t), \quad \mathrm{ord}\,(dv_3) = 8;$$

$B_2 = \mathbb{K}\left[t,\, dv_{1-3},\, tr_{1-4},\, p_{1-2}\right]$, де

$$tr_1 := \tau_6(dv_3), \quad \mathrm{ord}\,(tr_1) = 2, \quad tr_2 := \tau_4(dv_3), \quad \mathrm{ord}\,(tr_2) = 6,$$

$$tr_3 := \tau_4(dv_3), \quad \mathrm{ord}\,(tr_3) = 8,$$

$$tr_4 := \tau_1(dv_3), \quad \mathrm{ord}\,(tr_4) = 12, \quad p_1 := \tau_6(dv_2^2), \quad \mathrm{ord}\,(p_1) = 2,$$

$$p_2 := \tau_5(dv_2^2), \quad \mathrm{ord}\,(p_2) = 4;$$

$$B_3 = \mathbb{K}\left[t,\, dv_{1-3},\, tr_{1-4},\, c_{1-4},\, p_{1-2},\, s_{1-3},\, si_{1-2},\, vi,\, dev,\, de_{1-2},\, dvan\right],$$

де

$$c_1 := \tau_6(tr_2), \quad \mathrm{ord}\,(c_1) = 0, \quad c_2 := \tau_5(tr_3), \quad \mathrm{ord}\,(c_2) = 4,$$

$$c_3 := \tau_6(tr_4), \quad \mathrm{ord}\,(c_3) = 6, \quad c_4 := \tau_4(tr_4), \quad \mathrm{ord}\,(c_4) = 10,$$

$$s_1 := \tau_6(dv_2 tr_1), \quad \operatorname{ord}(s_1) = 0, \quad s_2 := \tau_3(dv_2\, tr_1), \quad \operatorname{ord}(s_2) = 6,$$

$$s_3 := \tau_1(p_1), \quad \operatorname{ord}(s_3) = 6, \quad si_1 := \tau_4(tr_1^2), \quad \operatorname{ord}(si_1) = 2,$$

$$si_2 := \tau_3(tr_1^2), \quad \operatorname{ord}(si_2) = 4, \quad vi := \tau_6(dv_2 p_2), \quad \operatorname{ord}(vi) = 2,$$

$$dev := \tau_4(tr_1\, p_2), \quad \operatorname{ord}(dev) = 4, \quad de_1 := \tau_6(tr_1^3), \quad \operatorname{ord}(de_1) = 0,$$

$$de_2 := \tau_5(tr_1^3), \quad \operatorname{ord}(de_2) = 2, \quad dvan := \tau_5(tr_1^2 p_1), \quad \operatorname{ord}(dvan) = 2.$$

Допустимими многочленами для B_3 будуть лише 2 многочлени:

$$p_3 := \tau_4(c_4), \quad \operatorname{ord}(p_3) = 8,$$

$$pt := \tau_6(si_1\, si_2), \quad \operatorname{ord}(pt) = 0.$$

Многочлен pt має степінь 15, складається із 1370 доданків і є незвідним. Отже,

$$B_4 = \mathbb{K}\Big[\, t,\, dv_{1-3},\, tr_{1-4},\, c_{1-4},\, p_{1-3},\, s_{1-3},\, si_{1-2},\, vi,\, dev,\, de_{1-2},\, dvan,\, pt \,\Big].$$

Описаними методами можна перевірити, що $\tau(B_4) \subseteq B_4$, і тому вказані 26 многочленів є мінімальною системою породжуючих елементів для алгебри $\mathbb{K}[X]^d$ при $n = 6$.

1. *Nowicki A.* Polynomial derivation and their ring of constants. – Torun: UMK, 1994. – 170 p.
2. *van den Essen A.* Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture // Progr. Math. – 2000. – **190**. – 329 p.
3. *Freudenburg G.* Algebraic theory of locally nilpotent derivations // Encycl. Math. Sci. – 2006. – **136**. – 260 p.
4. *Hilbert D.* Theory of algebraic invariants. – Cambridge Univ. Press, 1993. – 191 p.
5. *Weitzenböck R.* Über die Invarianten von linearen Gruppen // Acta math. – 1932. – **58**. – P. 231 – 293.
6. *Greuel G.-M., Pfister G.* Geometric quotients of unipotent group actions // Proc. London Math. Soc. – 1993. – **67**, № 1. – P. 75 – 105.
7. *Cerezo A.* Tables des invariants algébriqueset rationnels d'une matrice nilpotente de petite dimension // Prépubl. Math. Univ. Nice. – 1987. – **146**.
8. *Bedratyuk L.* A complete minimal system of covariants for the binary form of degree 7 // J. Symbol Comput. – 2009. – **44**, № 2. – P. 211 – 220.
9. *Бедратюк Л. П., Бедратюк С. Л.* Повна система коваріантів бінарної форми восьмого порядку // Мат. вісн. НТШ. – 2008. – **5**. – С. 11 – 22.
10. *Бедратюк Л. П.* Елементи Казиміра диференціювань кільця многочленів // Мат. студ. – 2007. – **27**. – С. 115 – 119.
11. *Bavula V. V., Lenagan T. H.* Quadratic and cubic invariants of unipotent affine automorphisms // J. Algebra. – 2008. – **320**, № 12. – P. 4132 – 4155.

Одержано 04.04.05,
після доопрацювання — 04.01.09