УДК 519.21

М. В. Лебідь (Білефельд. ун-т, Німеччина),
Г. М. Торбін (Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Київ; Ін-т математики НАН України, Київ)

СИНГУЛЯРНІСТЬ ТА ТОНКІ ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО КЛАСУ НЕСКІНЧЕННИХ ЗГОРТОК БЕРНУЛЛІ З СУТТЄВИМИ ПЕРЕКРИТТЯМИ. II

We discuss the Lebesgue structure and fine fractal properties of infinite Bernoulli convolutions, i.e., the distributions of random variables $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$, where $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ is a convergent positive series and ξ_k are independent (generally speaking, nonidentically distributed) Bernoulli random variables. Our main aim is to investigate the class of Bernoulli convolutions with essential overlaps generated by a series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, such that, for any $k \in \mathbb{N}$, there exists $s_k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ for which $a_k = a_{k+1} = \ldots = a_{k+s_k} \geq r_{k+s_k}$ and, in addition, $s_k > 0$ for infinitely many indices k. In this case, almost all (both in a sense of Lebesgue measure and in a sense of fractal dimension) points from the spectrum have continuum many representations of the form $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k a_k$, with $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$.

It is proved that μ_ξ has either a pure discrete distribution or a pure singulary continuous distribution. We also establish sufficient conditions for the faithfulness of the family of cylindrical intervals on the spectrum S_{μ_ξ} generated by the distributions of the random variables ξ. In the case of singularity, we also deduce the explicit formula for the Hausdorff dimension of the corresponding probability measure [i.e., the Hausdorff – Besicovitch dimension of the minimal supports of the measure μ_ξ (in a sense of dimension)].

Изучается лебеговская структура и тонкие фрактальные свойства бесконечных сверток Бернулли, т. е. распределений случайных величин вида $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$, где $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — сходящийся знакоположительный ряд, а ξ_k — независимые (вообще говоря, разнораспределенные) бернуллиевские случайные величины. Основное внимание в исследовании уделено наименее исследованному классу — сверткам Бернулли с существенными перекрытиями, порожденными рядом $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ таким, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $s_k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, что $a_k = a_{k+1} = \ldots = a_{k+s_k} \geq r_{k+s_k}$, причем $s_k > 0$ выполняется для неограниченного количества индексов k. В этом случае почти все (как в смысле меры Лебега, так и в смысле фрактальной размерности) точки спектра имеют континуальное количество различных представлений в виде $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k a_k$, где $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$.

Доказано, что вероятностная мера μ_ξ имеет или чисто дискретное, или чисто сингулярно непрерывное распределение. Установлены достаточные условия доверительности на спектре семейства цилиндрических отрезков, порожденные распределением случайной величины ξ. В случае сингулярности найдена явная формула для вычисления размерности Хаусдорфа соответствующей вероятностной меры, т. е. размерности Хаусдорфа – Безиковича минимальных (в смысле размерности) носителей меры μ_ξ.

1. Вступ. Нехай μ_ξ — ймовірнісний розподіл випадкової величини (в. в.)

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k, \tag{1}$$

де $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — знакододатний збіжний ряд, а ξ_k — незалежні в. в., які набувають значень 0 та 1 з імовірностями p_{0k} та $p_{1k} = 1 - p_{0k}$ відповідно. Розподіл μ_ξ називається *нескінченною згорткою Бернуллі.* В роботі [2] показано, що при вивченні лебегівської структури та дослідженні фрактальних властивостей міри μ_ξ можна вважати (без порушення загальності міркувань), що матриця $\|p_{ik}\|$ не містить нулів (тобто $p_{0k} \in (0,1)$ $\forall k \in \mathbb{N}$) та послідовність $\{a_k\}$ є монотонною (тобто $a_k \geq a_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$) з $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$.

Необхідні і достатні умови абсолютної неперервності в. в. ξ і досі невідомі навіть для найпростішого симетричного випадку випадкових степеневих рядів, для яких $a_k = \lambda^k$ і $p_{0k} = \frac{1}{2}$. Ймовірнісна міра μ_λ, що відповідає в. в. ξ_λ, відома як „нескінченна симетрична згортка

Бернуллі”. Міри такого типу вивчаються вже більше 80 років як з чисто ймовірнісної точки зору, так і з метою застосувань у гармонічному аналізі, фрактальному аналізі та теорії динамічних систем (див., наприклад, [3 – 9]).

У роботах [2, 10 – 13] повністю досліджено топологічні властивості спектра S_μ (найменшого замкненого носія міри μ). Фрактальні властивості (розмірність Гаусдорфа спектра S_μ і розмірність міри μ) у випадку, коли $a_k \geq r_k$ $\left(r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n\right)$, для всіх достатньо великих k отримано у роботах [2, 12], де також описано мінімальні у сенсі розмірності Гаусдорфа – Безиковича носії міри з додатковими структурними властивостями.

Випадок, коли нерівність $a_k < r_k$ виконується для нескінченної кількості індексів k, є суттєво складнішим (у цьому випадку ми маємо справу з так званими „суттєвими перекриттями” (див. означення на початку пункту 2)).

У даній статті досліджується тип розподілу в. в. ξ (пункт 2) та фрактальні властивості (пункт 3) у випадку, коли на $\{a_k\}$ накладено таку умову:

$(*)$ *для будь-якого* $k \in \mathbb{N}$ *існує такий номер* $s_k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, *що* $a_k = a_{k+1} = \ldots = a_{k+s_k} \geq \geq r_{k+s_k}$, *причому* $s_k > 0$ *виконується для нескінченної кількості індексів* k.

Для спрощення формул та формулювання теорем введемо позначення, які будуть використовуватися при подальшому викладі. Нехай $\{k_n\}$ — зростаюча послідовність таких додатних чисел, що $i \in \{k_n\}$ тоді і тільки тоді, коли $s_i = 0$. Крім того, нехай $l_n := k_n - k_{n-1}$, $k_0 = 0$.

У цій статті продовжено дослідження, розпочаті у роботі [1], де досліджувався:

1) випадок „однакової розподіленості”, тобто $p_{0k} = p_0$ та $p_{1k} = 1 - p_0$ при дослідженні лебегівської структури розподілу;

2) випадок обмеженості послідовності $\{l_n\}$ (тобто $\sup(l_n) < +\infty$) при дослідженні фрактальних властивостей.

У випадку обмеженості послідовності $\{l_n\}$ відповідна сім’я покриттів $\widetilde{\mathcal{A}}$ є довірчою на спектрі (див. пункт 3), що значно спрощує дослідження фрактальних властивостей міри. При виконанні умови $\sup(l_n) = +\infty$ сім’я покриттів $\widetilde{\mathcal{A}}$ не є, взагалі кажучи, довірчою (див. [14]). Останній факт і обумовлює основні труднощі при вивченні тонких фрактальних властивостей міри μ_ξ, методам дослідження яких і присвячено останній пункт статті.

2. Лебегівська структура випадкової величини ξ. Нехай A — скінченна або нескінченна підмножина множини натуральних чисел $\mathbb{N}$. Число $x = x(A) = \sum_{k \in A} a_k$ називається неповною сумою ряду.

Якщо спектр S_ξ в. в. ξ містить принаймні одну точку u, для якої рівність $u = x(A_i)$ виконується для нескінченної послідовності попарно різних множин A_i, то розподіл ξ називається *узагальненою згорткою Бернуллі з суттєвими перекриттями* [15, 16]. У випадку, коли на $\{a_k\}$ накладено умову $(*)$, в [1] показано, що майже всі (в сенсі розмірності Гаусдорфа – Безиковича) точки спектра в. в. ξ мають континуальну кількість різних розкладів.

Розглянемо $\widetilde{Q}_\xi$-зображення чисел відрізка $[0, 1]$ (означення та огляд основних властивостей $\widetilde{Q}$-зображення див. у [1, 17]), пов’язане з в. в. ξ. Для цього визначимо послідовність $\{m_n\}$ рівністю

$$m_n = \begin{cases} l_n + 1, & \text{якщо} \quad a_{k_n} = r_{k_n}, \\ 2l_n + 1, & \text{якщо} \quad a_{k_n} > r_{k_n}. \end{cases}$$

Нехай $n \in \mathbb{N}$, тоді для $m_n = l_n + 1$ виберемо $q_{in} = \dfrac{1}{l_n + 1}$, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, m_n - 1\} = B_n$, та у випадку $m_n = 2l_n + 1$ покладемо $q_{in} = \dfrac{r_{k_n}}{r_{k_{n-1}}}$, $i \in \{0, 2, 4, \ldots, m_n - 1\} = B_n$, і $q_{in} = \dfrac{a_{k_n} - r_{k_n}}{r_{k_{n-1}}}$, $i \in \{1, 3, 5, \ldots, m_n - 2\}$.

Введемо допоміжні позначення. Нехай для будь-якого $n \in \mathbb{N}$

$$R_{l_n} := \{0,1\}^{l_n}, \quad \delta := (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{l_n}) \in R_{l_n}, \quad |\delta| := \sum_{k=1}^{l_n} \delta_k,$$

$\{\tilde{\xi}_n\}$ — послідовність незалежних в. в., що набувають значень $0, 1, \ldots, m_n - 1$ з імовірностями $\tilde{p}_{0n}, \tilde{p}_{1n}, \ldots, \tilde{p}_{m_n-1,n}$, де

$$\tilde{p}_{in} = \sum_{\delta \in R_{l_n}, |\delta| = i} \left(\prod_{k=1}^{l_n} p_{\delta_k, k+k_{n-1}} \right)$$

при $a_{k_n} = r_{k_n}$ та

$$\tilde{p}_{in} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\delta \in R_{l_n}, |\delta| = \frac{i}{2}} \left(\prod_{k=1}^{l_n} p_{\delta_k, k+k_{n-1}} \right), & \text{якщо} \quad i \text{ — парне}, \\ 0, & \text{якщо} \quad i \text{ — непарне}, \end{cases}$$

при $a_{k_n} > r_{k_n}$. Стохастичною „матрицею” $\|q_{in}\|$ та послідовністю $\{\tilde{\xi}_n\}$ незалежних в. в. визначається в. в. $\tilde{\xi}$ з незалежними $\widetilde{Q}_\xi$-символами $\tilde{\xi}_n : \tilde{\xi} = \beta_{\tilde{\xi}_1 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_{\tilde{\xi}_n n} \prod_{i=1}^{n-1} q_{\tilde{\xi}_i i}$, де $\beta_{xn} = \sum_{j=0}^{x-1} q_{jn}$.

Випадкові величини ξ і $\tilde{\xi}$ однаково розподілені (див. [1]). Тому дослідження структури в. в. ξ зводиться до дослідження в. в. $\tilde{\xi}$. Для отримання основного результату доведемо кілька допоміжних лем, які мають і самостійний інтерес.

Лема 1. *Нехай $R_n = \{0,1\}^n$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ та $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) \in R_n$, $|\delta| = \sum_{k=1}^{n} \delta_k$. Тоді існує така функція $\varphi(n)$, що*

$$\sqrt{\frac{1}{n+1}} \sum_{i=0}^{n} \sqrt{\sum_{\delta \in R_n, |\delta| = i} \left(\prod_{k=1}^{n} p_{\delta_k, k} \right)} \leq \varphi(n) \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{2}$$

де $p_{0k} \in [0,1]$, $p_{1k} = 1 - p_{0k}$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$.

Доведення. Нехай $\{\zeta_j\}_{j \in 1,\ldots,n}$ — послідовність незалежних в. в., які набувають значень 0 та 1 з імовірностями p_{0j} та p_{1j} відповідно ($p_{0j} + p_{1j} = 1 \ \forall j \in \mathbb{N}$) і $S_n := \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n$. Тоді $\sum_{\delta \in R_n, |\delta| = i} \left(\prod_{k=1}^{n} p_{\delta_k, k} \right) = \mathrm{P}\{S_n = i\} = \tilde{p}_{in}$. Отже, умова (2) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\sqrt{\frac{1}{n+1}} \sum_{i=0}^{n} \sqrt{\tilde{p}_{in}} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Використовуючи нерівність Чебишова, отримуємо

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{S_n - MS_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right\} = \mathrm{P}\{|S_n - MS_n| \geq \varepsilon n\} \leq \frac{D\left(\dfrac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{D(S_n)}{n^2\varepsilon^2},$$

де $M(\xi)$ — математичне сподівання в. в. ξ, $D(\xi)$ — дисперсія в. в. ξ.

Зважаючи на незалежність в. в. $\{\zeta_j\}_{j\in 1,\ldots,n}$, маємо

$$D(S_n) = D\zeta_1 + D\zeta_2 + \ldots + D\zeta_n = p_{01}p_{11} + p_{02}p_{12} + \ldots + p_{0n}p_{1n} \leq \frac{n}{4}.$$

Отже,

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{S_n - MS_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}. \tag{3}$$

З нерівності Коші – Буняковського – Шварца та нерівності (3) одержуємо

$$\sum_{i:\,\left|\frac{i-MS_n}{n}\right|\geq\varepsilon}^{n} \sqrt{\tilde{p}_{in}} \leq \sqrt{n \sum_{i:\,\left|\frac{i-MS_n}{n}\right|\geq\varepsilon}^{n} \tilde{p}_{in}} \leq \sqrt{n\frac{1}{4n\varepsilon^2}} = \frac{1}{2\varepsilon}. \tag{4}$$

Тепер оцінимо суму $\sum\sqrt{\tilde{p}_{in}}$ для тих i, для яких $\left|\dfrac{i - MS_n}{n}\right| \leq \varepsilon$, тобто для

$$i \in [nMS_n - \varepsilon n,\ nMS_n + \varepsilon n].$$

Очевидно, існує не більше ніж $2n\varepsilon + 1$ натуральних чисел i таких, що $i:\ \left|\dfrac{i - MS_n}{n}\right| \leq \varepsilon$. Тому, використовуючи нерівність Коші – Буняковського – Шварца та $\sum_{i=0}^{n}\tilde{p}_{in} = 1$, отримуємо

$$\sum_{i:\,\left|\frac{i-MS_n}{n}\right|\leq\varepsilon}^{n} \sqrt{\tilde{p}_{in}} \leq \sqrt{(2n\varepsilon+1) \sum_{i:\,\left|\frac{i-MS_n}{n}\right|\leq\varepsilon}^{n} \tilde{p}_{in}} \leq \sqrt{2n\varepsilon+1}. \tag{5}$$

З (4) та (5) випливає, що $\sum_{i=0}^{n}\sqrt{\tilde{p}_{in}} \leq \dfrac{1}{2\varepsilon} + \sqrt{2n\varepsilon+1}$ $\forall\varepsilon > 0$. Отже, для будь-яких $\varepsilon > 0$ та $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt{\frac{1}{n+1}}\sum_{i=0}^{n}\sqrt{\tilde{p}_{in}} \leq \sqrt{\frac{1}{n+1}}\left(\frac{1}{2\varepsilon} + \sqrt{2n\varepsilon+1}\right).$$

Виберемо $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$, тоді $\sqrt{\dfrac{1}{n+1}}\dfrac{1}{2\varepsilon} \to 0$ $(n\to\infty)$ та $\sqrt{\dfrac{1}{n+1}}\sqrt{(2n\varepsilon+1)} \to 0$ $(n\to\infty)$. Поклавши $\varphi(n) = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\dfrac{\sqrt[4]{n}}{2} + \sqrt{2n^{3/4}+1}\right)$, отримаємо нерівність $\sqrt{\dfrac{1}{n+1}}\sum_{i=0}^{n}\sqrt{\tilde{p}_{in}} \leq$ $\leq \varphi(n)$.

Лему 1 доведено.

З леми 1 випливає такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $R_n = \{0,1\}^n$ *та* $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) \in R_n$, $|\delta| = \sum_{k=1}^{n} \delta_k \ \forall n \in \mathbb{N}$. *Тоді існує таке* n_0, *що для будь-якого* $n > n_0$

$$\sqrt{\frac{1}{n+1}} \sum_{i=0}^{n} \sqrt{\sum_{\delta \in R_n, |\delta|=i} \left(\prod_{k=1}^{n} p_{\delta_k,k} \right)} \leq \frac{1}{2},$$

де $p_{0k} \in [0,1], \ p_{1k} = 1 - p_{0k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Дослідимо вираз

$$\sqrt{\frac{1}{n+1}} \sum_{i=0}^{n} \sqrt{\sum_{\delta \in R_n, |\delta|=i} \left(\prod_{k=1}^{n} p_{\delta_k,k} \right)},$$

як функцію, що залежить від $(p_{01}, \ p_{02}, \ldots, p_{0n}) \in [0,1]^n$.

Лема 2. *Нехай* $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \{0,1\}^n$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) \in R_n$, $|\delta| = \sum_{k=1}^{n} \delta_k$ *та* $(p_{01}, \ p_{02}, \ldots, p_{0n}) \in [0,1]^n$, $(p_{11}, \ p_{12}, \ldots, p_{1n}) = (1-p_{01}, \ 1-p_{02}, \ldots, 1-p_{0n})$. *Тоді функція*

$$\upsilon(p_{01}, \ldots, p_{0n}) = \sqrt{\frac{1}{n+1}} \sum_{i=0}^{n} \sqrt{\sum_{\delta \in R_n, |\delta|=i} \left(\prod_{k=1}^{n} p_{\delta_k,k} \right)} \leq K_n < 1,$$

де K_n — *деяка стала, що залежить лише від* n.

Доведення. Введемо функцію $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{x_0} + \sqrt{x_1} + \ldots + \sqrt{x_n}$ на частині G гіперплощини $x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 1$, що розташована в $(n+1)$-вимірному кубі $[0,1]^{n+1}$. Оскільки $\overrightarrow{(\sqrt{x_0}, \sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{x_n})} \overrightarrow{(1, 1, \ldots, 1)} \leq \left| \overrightarrow{(\sqrt{x_0}, \sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{x_n})} \right| \left| \overrightarrow{(1, 1, \ldots, 1)} \right| = \sqrt{n+1}$, то неперервна на G функція $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ досягає свого найбільшого значення $\sqrt{n+1}$ при $x_0 = x_1 = \ldots = x_n = \dfrac{1}{n+1}$ і $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n) < \sqrt{n+1}$ для всіх інших точок з множини G.

Розглянемо функцію

$$\upsilon(p_{01}, \ldots, p_{0n}) = \sqrt{\frac{1}{n+1}} \sum_{i=0}^{n} \sqrt{\sum_{\delta \in R_n, |\delta|=i} \left(\prod_{k=1}^{n} p_{\delta_k,k} \right)},$$

де $(p_{01}, \ p_{02}, \ \ldots, \ p_{0n}) \in [0,1]^n$. Ця функція неперервна на $[0,1]^n$ та обмежена зверху:

$$\upsilon(p_{01}, \ldots, p_{0n}) \leq \max \left(\frac{\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)}{\sqrt{n+1}} \right) = 1,$$

причому рівність можлива лише у випадку, коли

$$\sum_{\delta \in R_n, |\delta|=i} \left(\prod_{k=1}^{n} p_{\delta_k,k} \right) = \frac{1}{n+1}, \quad i \in 0, 1, \ldots, n.$$

Оскільки $(p_{01}p_{02} \ldots p_{0n})(p_{11}p_{12} \ldots p_{1n}) \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$, то хоча б один із вказаних добутків не перевищує $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n < \dfrac{1}{n+1} \ \forall n \geq 2$. Отже,

$$\upsilon(p_{01},\ \ldots,\ p_{0n}) < 1 \quad \forall n \geq 2. \tag{6}$$

Оскільки $\upsilon(p_{01},\ldots,p_{0n})$ є визначеною й неперервною на компакті $[0,1]^n$, то на ньому вона досягає свого найбільшого значення K_n, а з (6) випливає, що

$$\upsilon(p_{01},\ldots,p_{0n}) = \sqrt{\frac{1}{n+1}}\sum_{i=0}^{n}\sqrt{\sum_{\delta\in R_n,|\delta|=i}\left(\prod_{k=1}^{n}p_{\delta_k,k}\right)} \leq K_n < 1 \quad \forall n \geq 2.$$

Лему 2 доведено.

Теорема 1. *Випадкова величина ξ має сингулярний тип розподілу.*

Доведення. Нехай $M = \prod_{n=1}^{\infty}\max_i\{\tilde{p}_{in}\}$. За теоремою Леві [18] в. в. $\tilde{\xi}$ має або чисто дискретний ($M > 0$), або чисто неперервний ($M = 0$) розподіл. У випадку неперервності розподіл є або чисто сингулярно неперервним, або чисто абсолютно неперервним. Оскільки ξ та $\tilde{\xi}$ мають однакові розподіли, з огляду на теорему П. Леві достатньо довести, що у випадку $M = 0$ в. в. $\tilde{\xi}$ має сингулярно неперервний розподіл.

В. в. $\tilde{\xi}$, будучи в. в. з незалежними $\widetilde{Q}_{\xi}$-символами, має абсолютно неперервний розподіл тоді і тільки тоді [17], коли $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{m_n-1}\sqrt{q_{in}\tilde{p}_{in}}\right) > 0$.

З побудови розподілу в. в. $\tilde{\xi}$ випливає, що

$$\sum_{i=0}^{m_n-1}\sqrt{q_{in}\tilde{p}_{in}} = \sqrt{\frac{r_{k_n}}{r_{k_{n-1}}}}\sum_{i=0}^{l_n}\sqrt{\sum_{\delta\in R_{l_n},|\delta|=i}\left(\prod_{k=1}^{l_n}p_{\delta_k,k+k_{n-1}}\right)}.$$

Оскільки $\sqrt{\dfrac{r_{k_n}}{r_{k_{n-1}}}} \leq \sqrt{\dfrac{1}{l_n+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то

$$\sum_{i=0}^{m_n-1}\sqrt{q_{in}\tilde{p}_{in}} \leq \sqrt{\frac{1}{l_n+1}}\sum_{i=0}^{l_n}\sqrt{\sum_{\delta\in R_{l_n},|\delta|=i}\left(\prod_{k=1}^{l_n}p_{\delta_k,k+k_{n-1}}\right)}.$$

Необхідною умовою збіжності добутку $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{m_n-1}\sqrt{q_{in}\tilde{p}_{in}}\right)$ є виконання умови

$$\sqrt{\frac{1}{l_n+1}}\sum_{i=0}^{l_n}\sqrt{\sum_{\delta\in R_{l_n},|\delta|=i}\left(\prod_{k=1}^{l_n}p_{\delta_k,k+k_{n-1}}\right)} \to 1 \quad (n\to\infty). \tag{7}$$

Виконання нерівності $a_k < r_k$ для нескінченної кількості індексів k рівносильно виконанню нерівності $l_n > 1$ для нескінченної кількості індексів n.

З наслідку 1 випливає існування такого n_0, що для будь-якого $n > n_0$

$$\sqrt{\frac{1}{n+1}}\sum_{i=0}^{n}\sqrt{\sum_{\delta\in R_n,|\delta|=i}\left(\prod_{k=1}^{n}p_{\delta_k,k}\right)} \leq \frac{1}{2}.$$

З леми 2 випливає, що існують такі $n_0 > 1$ та $K_0 = \max_{i\in\{2,\ldots,n_0\}}K_i$, що

$$\sqrt{\frac{1}{n+1}}\sum_{i=0}^{n}\sqrt{\sum_{\delta\in R_n,|\delta|=i}\left(\prod_{k=1}^{n}p_{\delta_k,k}\right)}\leq K_0<1,\quad n\in\{2,\ldots,n_0\}.$$

Тоді існує така абсолютна стала K, що для будь-якого $n>1$

$$\sqrt{\frac{1}{n+1}}\sum_{i=0}^{n}\sqrt{\sum_{\delta\in R_n,|\delta|=i}\left(\prod_{k=1}^{n}p_{\delta_k,k}\right)}\leq K=\max\left\{\frac{1}{2},K_0\right\}<1.$$

Отже,

$$\sqrt{\frac{1}{l_n+1}}\sum_{i=0}^{l_n}\sqrt{\sum_{\delta\in R_{l_n},|\delta|=i}\left(\prod_{k=1}^{l_n}p_{\delta_k,k+k_{n-1}}\right)}\nrightarrow 1\quad (n\to\infty).$$

Тому в. в. ξ не може мати абсолютно неперервного розподілу і її сингулярність випливає з чистоти розподілу в. в. $\tilde{\xi}$.

Теорему 1 доведено.

3. Розмірність Гаусдорфа розподілу $\boldsymbol{\xi}$. Нехай M — фіксована обмежена підмножина дійсної прямої. Нагадаємо, що сім'я Φ_M підмножин дійсної прямої називається *сім'єю локально тонких покриттів* множини M, якщо для довільного $\varepsilon>0$ існує не більш ніж зчисленне ε-покриття $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ множини M і $E_j\in\Phi_M\ \ \forall j\in\mathbb{N}$.

Нехай $\alpha>0$. Передмірою α-вимірної міри Гаусдорфа підмножини $E\subset M$ відносно заданої сім'ї Φ_M називається $H^{\alpha}_{\varepsilon}(E,\,\Phi_M):=\inf_{|E_j|\leq\varepsilon}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}|E_j|^{\alpha}\right\}$, де інфімум береться по всеможливих не більш ніж зчисленних ε-покриттях $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ множини E та $E_j\in\Phi_M\ \ \forall j\in\mathbb{N}$.

α-Вимірною мірою Гаусдорфа підмножини $E\subset M$ відносно заданої сім'ї Φ_M називається $H^{\alpha}(E,\,\Phi_M):=\lim_{\varepsilon\to 0}H^{\alpha}_{\varepsilon}(E,\,\Phi_M)$. Якщо $M=[0,1]$, Φ_M — сім'я всіх сегментів ($\langle a,b\rangle\ \forall a,b\in$ $\in[0,1]$ і $a<b$), то $H^{\alpha}(E,\Phi_M)$ є класичною α-вимірної мірою Гаусдорфа, яку будемо позначати $H^{\alpha}(E)$.

Невід'ємне число $\dim_H(E,\,\Phi_M):=\inf\{\alpha\colon H^{\alpha}(E,\Phi_M)=0\}$ називається розмірністю Гаусдорфа – Безиковича множини $E\subset M$ відносно сім'ї локально тонких покриттів Φ_M. Якщо $M=[0,1]$, Φ_M — сім'я всіх сегментів, то $\dim_H(E,\,\Phi_M)$ є класичною розмірністю Гаусдорфа – Безиковича множини, яку будемо позначати $\dim_H(E)$.

Сім'я Φ_M локально тонких покриттів називається *довірчою* на множини M для визначення розмірності Гаусдорфа – Безиковича, якщо

$$\dim_H(E,\Phi_M)=\dim_H(E)\quad\forall E\subseteq M.$$

3.1. Довірчість сім'ї покриттів на спектрі $\boldsymbol{S_\mu}$. *Циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1\ldots c_m$* називається відрізок

$$\Delta_{c_1\ldots c_m}=\left[\sum_{n=1}^{m}c_na_n,\ r_m+\sum_{n=1}^{m}c_na_n\right].$$

Нехай $\widetilde{\mathcal{A}}_n$ — сім'я циліндричних відрізків рангу k_n, тобто

$$\widetilde{\mathcal{A}}_n=\{E\colon E=\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_n}},\ \alpha_i\in\{0,1\},\ i=1,2,\ldots,k_n\}$$

та

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{A}}_n. \tag{8}$$

Наступна теорема має як самостійне значення, так і відіграє значну роль при визначенні тонких фрактальних властивостей імовірнісної міри μ_ξ.

Теорема 2. *Нехай Φ — локально тонка сім'я покриттів на $M \subset [0,1]$. Припустимо, що існують додатна стала C і функція $f(x)\colon R_+ \to R_+$ такі, що для довільного сегмента $I \subset [0,1]$ виконуються властивості*:

1) *існує не більш ніж $l(I)$ підмножин $\triangle_1(I),\ \triangle_2(I), \ldots, \triangle_{l(I)}(I) \in \Phi$ та $l(I) \leq f(|I|)$, $|\triangle_j(I)| \leq |I|$ для $j \in \{1, \ldots, l(I)\}$ і $I \cap M \subset \bigcup_{j=1}^{l(I)} \triangle_j(I)$;*

2) *для довільного $\delta \in (0,1]$ існує таке $\varepsilon_1(\delta) > 0$, що $f(|I|)\,|I|^{\delta} \leq C$ для $|I| \leq \varepsilon_1(\delta)$.*
Тоді сім'я Φ є довірчою на $M \subset [0,1]$.

Доведення. Зрозуміло, що $\dim_H(E) \leq \dim_H(E,\Phi)\ \forall E \subset M \subset [0,1]$. Доведемо тепер, що $\dim_H(E) \geq \dim_H(E,\Phi)$.

Нехай $\alpha \in (0,1]$ та $\delta \in (0,\alpha)$, $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ — деяке довільне ε-покриття множини E сегментами з відрізка $[0,1]$, де $\varepsilon \leq \varepsilon_1(\delta)$ (див. умову). За припущенням теореми існує не більш ніж $f(|I_j|)$ підмножин $\triangle_1(I_j),\ \triangle_2(I_j),\ \ldots, \triangle_{l(I_j)}(I_j) \in \Phi$ та $|\triangle_i(I_j)| \leq |I_j|$ для $i \in \{1, \ldots, l(I_j)\}$, $I_j \cap E \subset \bigcup_{i=1}^{l(I_j)} \triangle_i(I_j)$.

Отже, $|\triangle_i(I_j)|^{\alpha} \leq |I_j|^{\alpha}$ для $i \in \{1, \ldots, l(I_j)\}$ і

$$\sum_{i=1}^{l(I_j)} |\triangle_i(I_j)|^{\alpha} \leq f(|I_j|)\,|I_j|^{\alpha} = f(|I_j|)\,|I_j|^{\delta}\,|I_j|^{\alpha-\delta}.$$

Таким чином, $\sum_j \sum_{i=1}^{l(I_j)} |\triangle_i(I_j)|^{\alpha} \leq C \sum_j |I_j|^{\alpha-\delta}$ для довільного ε-покриття $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ множини E, де $\varepsilon \leq \varepsilon_1(\delta)$. Отже,

$$H_{\varepsilon}^{\alpha}(E,\Phi) \leq \sum_j \sum_{i=1}^{l(I_j)} |\triangle_i(I_j)|^{\alpha} \leq C \sum_j |I_j|^{\alpha-\delta}$$

для довільного ε-покриття $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ множини E, де $\varepsilon \leq \varepsilon_1(\delta)$. Таким чином,

$$H_{\varepsilon}^{\alpha}(E,\Phi) \leq C H_{\varepsilon}^{\alpha-\delta}(E) \quad \forall \alpha > 0 \quad \forall \delta \in (0,\alpha) \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_1(\delta).$$

Отже, $H^{\alpha}(E,\Phi) \leq C H^{\alpha-\delta}(E)\ \forall \alpha > 0\ \forall \delta \in (0,\alpha)$, тому $\dim_H E \leq \dim_H(E,\Phi)$.

Теорему 2 доведено.

Наступна теорема дає достатні умови довірчості сім'ї покриттів $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Теорема 3. *Якщо $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln r_{k_{n-1}}}{\ln r_{k_n}} = 1$, то $\widetilde{\mathcal{A}}$ є довірчою сім'єю покриттів для обчислення розмірності Гаусдорфа – Безиковича на спектрі $S_{\mu_{\xi}}$.*

Доведення. Очевидно, що $\widetilde{\mathcal{A}}$ — локально тонка сім'я покриттів на $S_{\mu_{\tilde{\xi}}}$ та $S_{\mu_{\tilde{\xi}}} \subset [0,1]$.

Для довільного $x \in (0,1]$ існує таке $n(x) \in \mathbb{N}$, що $x \in (r_{k_{n(x)}},\ r_{k_{n(x)-1}}]$. Нехай функція $f: R_+ \to R_+$ дорівнює $3\dfrac{r_{k_{n(x)-1}}}{r_{k_{n(x)}}}$, де $x \in (r_{k_{n(x)}}, r_{k_{n(x)-1}}]$ та $f(x)$ набуває довільних значень на $x \in (1, +\infty)$. Покладемо $C = 3$.

Нехай I — довільний сегмент та $I \subset [0,1]$. Тоді існує таке $n(|I|)$, що $|I| \in (r_{k_{n(|I|)}},\ r_{k_{n(|I|)-1}}]$. Множина $I \cap S_{\mu_{\tilde{\xi}}}$ повністю міститься в об'єднанні трьох циліндрів з $\widetilde{\mathcal{A}}_{n(|I|)-1}$ та не більш ніж в об'єднанні $[f(|I|)]$ ($[x]$ — ціла частина числа x) циліндрів з $\widetilde{\mathcal{A}}_{n(|I|)}$. Отже, $I \cap S_{\mu_{\tilde{\xi}}} \subset \bigcup_{j=1}^{l(I)} \triangle_j(I)$, де $|\triangle_j(I)| \le |I|, j \in \{1, \ldots, l(I)\}$ та $l(I) \le f(|I|)$. Таким чином, виконується пункт 1 теореми 2.

Перевіримо виконання пункту 2 теореми 2. Зафіксуємо деяке $\delta \in (0,1]$. З умови теореми випливає існування такого $n_0(\delta)$, що $3\dfrac{r_{k_{n-1}}}{r_{k_n}}\left(r_{k_{n-1}}\right)^{\delta} \le C\ \forall n \ge n_0(\delta)$. Покладемо $\varepsilon_1(\delta) = r_{k_{n_0(\delta)}}$. Тоді для довільного $\delta \in (0,1]$ існує таке $\varepsilon_1(\delta) > 0$, що $f(|I|)\,|I|^{\delta} \le C$ для $|I| \le \varepsilon_1(\delta)$. Таким чином, з теореми 2 випливає, що сім'я $\widetilde{\mathcal{A}}$ є довірчою на спектрі $\mu_{\tilde{\xi}}$ для обчислення розмірності Гаусдорфа – Безиковича.

Теорему 3 доведено.

3.2. Розмірність міри μ_ξ. Спектр є досить грубою характеристикою сингулярно неперервного ймовірнісного розподілу, оскільки навіть континуальна сім'я попарно різних сингулярних розподілів може мати спільний спектр. В якості прикладу такої сім'ї можна взяти клас нескінченних згорток Бернуллі вигляду $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\xi_k}{2^k}$, де ξ_k — незалежні в. в., які набувають значень 0 та 1 з імовірностями $p \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ та $1-p$ відповідно. Тому розмірність Гаусдорфа – Безиковича спектра міри є також досить грубою фрактальною характеристикою сингулярної міри. Значно краще характеризує властивості сингулярного розподілу розмірність Гаусдорфа власне розподілу.

Нагадаємо, що розмірністю Гаусдорфа розподілу в. в. τ називається число

$$\dim_H(\tau) = \inf\left\{\dim_H(E),\ E \in \mathcal{B}_\tau\right\},$$

де $\mathcal{B}_\tau$ — клас всеможливих борелівських носіїв (не обов'язково замкнених) в. в. τ, тобто

$$\mathcal{B}_\tau = \{E\colon E \in \mathcal{B},\ P_\tau(E) = 1\}.$$

Нагадаємо узагальнення розмірності Гаусдорфа – Безиковича — розмірність Гаусдорфа – Біллінгслі, властивості якої будемо використовувати для знаходження розмірності міри μ_ξ.

Нехай υ — неперервна ймовірнісна міра на борелівських підмножинах $[0,1]$, M — деяка фіксована підмножина одиничного відрізка і Φ_M — така сім'я всіх сегментів одиничного відрізка, що для M і для довільного $\varepsilon > 0$ існує не більш ніж зчисленне $(\upsilon - \varepsilon)$-покриття $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ множини M, тобто $E_j \in \Phi_M$ та $\upsilon(E_j) \le \varepsilon\ \ \forall j \in \mathbb{N}$. Тоді $(\upsilon - \alpha)$-міра Гаусдорфа довільної множини $E \subset M$ визначається таким чином:

$$H^{\alpha}(E,\, \upsilon, \Phi_M) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\inf_{\upsilon(E_j) \le \varepsilon}\left\{\sum_j \upsilon^{\alpha}(E_j)\right\}\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} H^{\alpha}_{\varepsilon}(E,\, \upsilon, \Phi_M),$$

де $E_j \in \Phi_M$, $\bigcup_j E_j \supset E$.

Число

$$\dim_{\upsilon}(E,\,\Phi_M) = \inf\{\alpha\colon H^{\alpha}(E,\,\upsilon,\Phi_M)\,=0\}$$

називається *розмірністю Гаусдорфа–Біллінгслі* множини E відносно міри υ і сім'ї покриттів Φ_M.

Покладемо $0\ln 0 := 0$ у наступних позначеннях. Отже, введемо позначення $h_j = -\sum_{i=0}^{m_j-1}\tilde{p}_{ij}\ln\tilde{p}_{ij}$, $H_n = \sum_{j=1}^{n} h_j$ (див. пункт 2).

Теорема 4. *Якщо*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln r_{k_{n-1}}}{\ln r_{k_n}}-1\right)^2<\infty, \tag{9}$$

то розмірність Гаусдорфа розподілу в. в. ξ

$$\dim_H(\mu_\xi) = \varliminf_{n\to\infty}\frac{H_n}{-\ln r_{k_n}}.$$

Доведення. При обчисленні розмірності Гаусдорфа розподілу в. в. ξ достатньо обмежитись розглядом носіїв, які є підмножинами спектра ξ.

Нехай $\widetilde{\Delta}_{[n]}(x) := \Delta^{\widetilde{Q}_\xi}_{a_1(x)a_2(x)\ldots a_n(x)}$ — циліндричний відрізок n-го рангу $\widetilde{Q}_\xi$-розбиття, який містить точку x спектра S_ξ. Зазначимо, що клас усіх таких циліндричних відрізків збігається з $\widetilde{\mathcal{A}}$. Нехай $\mu := \mu_\xi$ — ймовірнісна міра, яка відповідає розподілу в. в. ξ, λ — міра Лебега на $[0,1]$. Тоді $\mu(\widetilde{\Delta}_{[n]}(x)) = \tilde{p}_{a_1(x)1}\tilde{p}_{a_2(x)2}\ldots\tilde{p}_{a_n(x)n}$ та $\lambda(\widetilde{\Delta}_{[n]}(x)) = q_{a_1(x)1}q_{a_2(x)2}\ldots q_{a_n(x)n} = r_{k_n}$.

Нехай $x = \Delta^{\widetilde{Q}_\xi}_{a_1(x)a_2(x)\ldots a_n(x)\ldots}$ вибирається випадково так, що $\mathrm{P}(a_j(x) = i) = \tilde{p}_{ij}$, $i \in \{0,\ldots,m_j-1\}$, $j\in\mathbb{N}$ (тобто розподіл такої в. в. описується мірою μ). Тоді $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty} = \{\eta_j(x)\}_{j=1}^{\infty} := \{\ln\tilde{p}_{a_j(x)j}\}_{j=1}^{\infty}$ (якщо $\tilde{p}_{a_j(x)j} = 0$, то $\ln\tilde{p}_{a_j(x)j} := 0$) є послідовністю незалежних в. в. з такими розподілами: $\mathrm{P}\{\eta_j = \ln\tilde{p}_{ij}\} = \tilde{p}_{ij}$, $i\in\{0,\ldots,m_j-1\}$, $j\in\mathbb{N}$. Зрозуміло, що $M\eta_j = \sum_{i=0}^{m_j-1}\tilde{p}_{ij}\ln\tilde{p}_{ij} = -h_j$ і $|M\eta_j|\le\ln(l_j+1)$. Покажемо, що $M\eta_j^2 = \sum_{i=0}^{m_j-1}\tilde{p}_{ij}\ln^2\tilde{p}_{ij}\le\max\{2,\ln^2(l_j+1)\}$.

Нехай $x_0\in\{x\colon \ln(x)-2x+2=0\}/\{1\}$. Введемо таку допоміжну функцію $\varphi\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, що

$$\varphi(x) = \begin{cases} x\ln^2 x, & \text{якщо}\quad x\in[0,x_0)\quad (\text{покладемо}\quad 0\ln^2 0 := 0),\\[2mm] -x_0\ln^2 x_0\dfrac{x-x_0}{1-x_0}+x_0\ln^2 x_0, & \text{якщо}\quad x\in[x_0,1].\end{cases}$$

З означення функції $\varphi(x)$ випливає, що $x\ln^2 x\le\varphi(x)\ \ \forall x\in[0,1]$. Функція $\varphi(x)$ є неперервною та опуклою вгору на відрізку $[0,1]$. Отже, з нерівності Йєнсена маємо

$$M\eta_j^2\le\sum_{i=0}^{m_j-1}\varphi(\tilde{p}_{ij})\le(l_j+1)\varphi\left(\frac{1}{l_j+1}\right)\le\max\{2,\ln^2(l_j+1)\}.$$

Таким чином, $D(\eta_j) = M\eta_j^2-(M\eta_j)^2\le 2\max\{2,\ln^2(l_j+1)\}$. Отже, з нерівності $\left(\dfrac{\ln(l_n+1)}{\ln r_{k_n}}\right)^2\le\left(\dfrac{\ln r_{k_{n-1}}}{\ln r_{k_n}}-1\right)^2$ та теореми Колмогорова (посилений закон великих чисел) для майже всіх точок $x \in [0,1]$ (у сенсі міри μ) отримуємо рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)) - M\left(\eta_1(x)+\eta_1(x)+\ldots+\eta_n(x)\right)}{\ln r_{k_n}} = 0. \qquad (10)$$

Нехай $D = \underline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{H_n}{-\ln r_{k_n}}$. Розглянемо множину

$$T = \left\{x\colon \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)}{\ln\lambda(\Delta_n(x))} - \frac{H_n}{-\ln\lambda(\Delta_n(x))}\right) = 0\right\} =$$

$$= \left\{x\colon \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n - M(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n)}{\ln r_{k_n}}\right) = 0\right\}.$$

Оскільки $\mu(T)=1$, то $\dim_\mu(T,\widetilde{\mathcal{A}})=1$. Нехай

$$T_1 = \left\{x\colon \underline{\lim}_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)}{\ln r_{k_n}} - \frac{H_n}{-\ln r_{k_n}}\right) = 0\right\},$$

$$T_2 = \left\{x\colon \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)}{\ln r_{k_n}} \le D\right\} = \left\{x\colon \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln\mu(\widetilde{\Delta}_{[n]}(x))}{\ln\lambda(\widetilde{\Delta}_{[n]}(x))} \le D\right\},$$

$$T_3 = \left\{x\colon \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)}{\ln r_{k_n}} \ge D\right\} = \left\{x\colon \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln\mu(\widetilde{\Delta}_{[n]}(x))}{\ln\lambda(\widetilde{\Delta}_{[n]}(x))} \ge D\right\}.$$

Очевидно, що $T \subset T_1$. Можна довести (аналогічно до [3]), що $T_1 \subset T_3$ і $T \subset T_2$.

За теоремою 2.1 з [19] $\dim_\lambda(T_2,\widetilde{\mathcal{A}}) \le D$. Враховуючи, що $T \subset T_2$, маємо $\dim_\lambda(T,\widetilde{\mathcal{A}}) \le D$. Оскільки $T \subset T_3$, то за теоремою 2.2 з [19] $\dim_\lambda(T,\widetilde{\mathcal{A}}) \ge D\dim_\mu(T,\widetilde{\mathcal{A}}) = D$. Отже, $\dim_\lambda(T,\widetilde{\mathcal{A}}) = D$. Оскільки λ — міра Лебега на [0,1], то $\dim_H(T,\widetilde{\mathcal{A}}) = \dim_\lambda(T,\widetilde{\mathcal{A}}) = D$.

З припущення (9) випливає, що $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln r_{k_{n-1}}}{\ln r_{k_n}} = 1$. Таким чином, сім'я $\widetilde{\mathcal{A}}$ є довірчою на спектрі S_μ для обчислення розмірності Гаусдорфа–Безиковича. Отже, $\dim_H(T,\widetilde{\mathcal{A}}) = \dim_H(T) = D$.

Доведемо, що побудована вище множина T є мінімальним розмірнісним носієм міри μ. Нехай C — деякий носій міри μ, тобто $\mu(C)=1$. Очевидно, що $C_1 = C\bigcap T$ теж носій міри μ і $C_1 \subset C$. Тому $\dim_H(C_1) \le \dim_H(C)$ і $C_1 \subset T$. Доведемо, що $\dim_H(C_1) = \dim_H(T)$. Оскільки $C_1 \subset T$, то $\dim_H(C_1) \le \dim_H(T) = D$. З іншого боку, $C_1 \subset T \subset T_3$. Тому з теорем 2.1 та 2.2 роботи [19] та теореми 3 випливає, що

$$\dim_H(C_1) = \dim_\lambda(C_1,\widetilde{\mathcal{A}}) \ge D\dim_\mu(T,\widetilde{\mathcal{A}}) \ge D\dim_\mu(C_1,\widetilde{\mathcal{A}}) = D\cdot 1 = D.$$

Теорему 4 доведено.

1. *Лебідь М. В., Торбін Г. М.* Сингулярність та тонкі фрактальні властивості одного класу нескінченних згорток Бернуллі з суттєвими перекриттями // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2012. – **87**. – С. 89–104.
2. *Albeverio S., Torbin G.* On fine fractal properties of generalized infinite Bernoulli convolutions // Bull. Sci. Math. – 2008. – **132**, № 8. – P. 711–727.

3. *Albeverio S., Torbin G.* Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^*-digits // Bull. Sci. Math. – 2005. – **129**, № 4. – P. 356 – 367.
4. *Erdös P.* On a family of symmetric Bernoulli convolutions // Amer. J. Math. – 1939. – **61**. – P. 974 – 975.
5. *Garsia A.* Arithmetic properties of Bernoulli convolutions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **102**. – P. 409 – 432.
6. *Lyons R.* Seventy years of Rajchmann measures // J. Fourier Anal. and Appl. – Kahane Spes. Issue. – 1995. – P. 363 – 377.
7. *Peres Y., Solomyak B.* Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof // Math. Res. Lett. – 1996. – **3**, № 2. – P. 231 – 239.
8. *Peres Y., Solomyak B.* Self-similar measures and intersections of Cantor sets // Trans. Amer. Math. Soc. – 1998. – **350**, № 10. – P. 4065 – 4087.
9. *Solomyak B.* On the random series $\sum \pm\lambda^n$ (an Erdös problem) // Ann. Math. – 1995. – **142**. – P. 611 – 625.
10. *Alexander J., Zagier D.* The entropy of a certain infinitely convolved Bernoulli measure // J. London Math. Soc. – 1991. – **44**. – P. 121 – 134.
11. *Chatterji S.* Certain induced measures on the unit interval // J. London Math. Soc. – 1963. – **38**. – P. 325 – 331.
12. *Cooper M.* Dimension, measure and infinite Bernoulli convolutions // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1998. – **124**. – P. 135 – 149.
13. *Праціьовитий М. В., Торбін Г. М.* Один клас випадкових величин типу Джессена – Вінтнера // Доп. НАН України. – 1998. – С. 48 – 54.
14. *Albeverio S., Ivanenko G., Lebid M., Torbin G.* On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion // available at http://arxiv.org/abs/math/0724662
15. *Peres Y., Schlag W., Solomyak B.* Sixty years of Bernoulli convolutions // Fractal Geometry and Stochast. II. Progr. Probab. – 2000. – **46**. – P. 39 – 65.
16. *Peres Y., Simon K., Solomyak B.* Absolute continuity for random iterated function systems with overlaps // J. London Math. Soc. – 2006. – **74**, № 3. – P. 739 – 756.
17. *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2011. – **17**, № 2. – P. 97 – 111.
18. *Lévy P.* Sur les séries dont les termes sont des variables indépendantes // Stud. Math. – 1931. – **3**. – P. 119 – 155.
19. *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory. II // Ill. J. Math. – 1961. – **5**. – P. 291 – 198.
20. *Goncharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal properties of some Bernoulli convolutions (in Ukrainian) // Theory Probab. and Math. Statist. – 2009. – **79**. – P. 39 – 55.
21. *Торбін Г. М.* Мультифрактальний аналіз сингулярно неперервних ймовірнісних мір // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 5. – С. 837 – 857.

Одержано 07.06.13