УДК 517.5

С. А. Стасюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КОЛМОГОРОВСКИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ АНАЛОГОВ КЛАССОВ НИКОЛЬСКОГО – БЕСОВА С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ГЛАДКОСТЬЮ *

We establish the exact-order estimates of Kolmogorov widths and entropy numbers for the analogs of the Nikol'skii – Besov classes with logarithmic smoothness.

Знайдено точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників та ентропійних чисел для аналогів класів Нікольського – Бєсова з логарифмічною гладкістю.

Пусть L_q, $1 \le q \le \infty$, — пространство Лебега 2π-периодических функций $f(x)$, $x \in [0, 2\pi]$, со стандартной нормой $|| \cdot ||_q$. Для $r > 0$, $1 < p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ обозначим

$$B^{0,r}_{p,\theta} := \{f \in L_p \colon ||f||_{B^{0,r}_{p,\theta}} \le 1\}, \tag{1}$$

где

$$||f||_{B^{0,r}_{p,\theta}} := \left(\sum_{s=0}^{\infty} ((s+1)^r ||\delta_s(f)||_p)^\theta \right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{2}$$

$$||f||_{B^{0,r}_{p,\infty}} := \sup_{s \ge 0} \frac{||\delta_s(f)||_p}{(s+1)^{-r}}, \ \theta = \infty, \tag{3}$$

а $\delta_s(f) := \sum_{[2^{s-1}] \le |k| < 2^s} \widehat{f}(k) e^{ikx}$, $\widehat{f}(k) := (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$. Классы $B^{0,r}_{p,\theta}$ мы называем аналогами классов Никольского – Бесова с логарифмической гладкостью. В случае $\theta = \infty$ вместо $B^{0,r}_{p,\infty}$ иногда будем писать $H^{0,r}_p$, т. е. будем полагать $B^{0,r}_{p,\infty} \equiv H^{0,r}_p$.

Заметим, что для классов LG^r, которые можно отождествить с классами $H^{0,r}_\infty$, в [1] установлены точные по порядку оценки поперечников по Колмогорову и энтропийных чисел. Классы, определяемые с помощью (1) – (3), изучались также в работах [2, 3], с точки зрения установления порядковых оценок некоторых аппроксимативных характеристик этих классов, а в работе [4], с точки зрения вложения в некоторые пространства гладких функций.

Приведем определение исследуемых в данной работе аппроксимативных характеристик.

Пусть $\mathcal{K}$ — компакт в банаховом пространстве X с единичным шаром B_X. Величины

$$d_m(\mathcal{K}, X) := \inf_{\{v_j\}_{j=1}^m \subset X} \sup_{f \in \mathcal{K}} \inf_{c_j} \left\| f - \sum_{j=1}^m c_j v_j \right\|_X, \tag{4}$$

$$\varepsilon_m(\mathcal{K}, X) := \inf \left\{ \varepsilon \colon \exists \{u_j\}_{j=1}^n \subset X, n \le 2^{m-1}, \mathcal{K} \subset \bigcup_{j=1}^n \{u_j + \varepsilon B_X\} \right\}, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

* Выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект № GP/F32/0100) и FP7-People-2011-IRSES (проект № 295164 (EUMLS: EU-Ukrainian Mathematicians for Life Sciences)).

называются соответственно m-м поперечником по Колмогорову и m-м энтропийным числом множества $\mathcal{K}$ в пространстве X. С результатами исследования величин (4) и (5) можно ознакомиться, например, в [5 – 8], где приведена обширная библиография.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема A [1]. *Для* $r > 1$ *справедливы соотношения*

$$d_m(LG^r, L_q) \asymp \varepsilon_m(LG^r, L_q) \asymp \begin{cases} (\log_2 m)^{-r+1}, & \text{если} \quad q = \infty, \\ (\log_2 m)^{-r+1/2}, & \text{если} \quad 1 \le q < \infty. \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть* $1 \le \theta < \infty$, $r > 1 - \dfrac{1}{\theta}$, *тогда*

$$d_m(B^{0,r}_{\infty,\theta}, L_\infty) \asymp \varepsilon_m(B^{0,r}_{\infty,\theta}, L_\infty) \asymp (\log_2 m)^{-r+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть* $1 \le q < \infty$, $r > \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\theta}$, *тогда для* $\max\{q; 2\} \le p \le \infty$, $2 \le \theta < \infty$ *или* $\max\{q; 2\} \le p < \infty$, $\theta = \infty$ *имеют место порядковые равенства*

$$d_m(B^{0,r}_{p,\theta}, L_q) \asymp \varepsilon_m(B^{0,r}_{p,\theta}, L_q) \asymp (\log_2 m)^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}. \tag{8}$$

Сравнивая приведенные выше теоремы, видим, что теоремы 1 и 2 дополняют результат теоремы A в том смысле, что помимо введения и рассмотрения дополнительных параметров p и θ также удалось расширить область изменения параметра r.

Заметим, что условия $r > \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\theta}\right)_+ := \max\left\{0; \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\theta}\right\}$ и $r > 1 - \dfrac{1}{\theta}$ обеспечивают вложение $B^{0,r}_{p,\theta} \subset L_q$ при $1 \le q < \infty$, $q \le p$, $2 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ и $q = p = \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ соответственно. Этот факт следует из доказательства оценок сверху в теоремах 1 и 2 с помощью применения неравенства Гельдера и соотношения (см., например, [6] (введение, § 3), [7] (гл. § I, § 1.1))

$$\left\| \left(\sum_{s=0}^{\infty} |\delta_s(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \ll \left(\sum_{s=0}^{\infty} ||\delta_s(f)||_p^2 \right)^{1/2}, \quad 2 \le p < \infty, \tag{9}$$

для $f \in L_p$. Соотношение (9) является следствием теоремы Литтлвуда – Пэли.

Основные пункты доказательства теорем 1 и 2 включают оценки сверху для $d_m(B^{0,r}_{p,\theta}, L_q)$, оценки снизу для $\varepsilon_m(B^{0,r}_{p,\theta}, L_q)$ с последующим применением леммы, вытекающей из одного неравенства Карла (см., например, [1]).

Лемма A. *Пусть* A *— компакт в сепарабельном банаховом пространстве* X. *Предположим, что для пары чисел* (a, b), *где либо* $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, *либо* $a = 0$, $b < 0$, *выполнены соотношения*

$$d_m(A, X) \ll m^{-a}(\log_2 m)^b,$$

$$\varepsilon_m(A, X) \gg m^{-a}(\log_2 m)^b.$$

Тогда

$$d_m(A, X) \asymp \varepsilon_m(A, X) \asymp m^{-a}(\log_2 m)^b.$$

***Доказательство теорем* 1 *и* 2**. Нижеприведенная схема рассуждений аналогична применяемой в [1] при доказательстве теоремы А.

Установим сначала оценки сверху для $d_m(B^{0,r}_{p,\theta}, L_q)$. С этой целью рассмотрим при $m = 2^n$ приближение функций $f \in B^{0,r}_{p,\theta}$ суммами Фурье $S_{2^n}(f) = \sum_{s=0}^{n} \delta_s(f)$.

При $p = q = \infty$, $1 < \theta < \infty$, $r > 1 - \dfrac{1}{\theta}$ вследствие применения неравенства Гельдера получаем

$$||f - S_{2^n}(f)||_\infty = \left\| \sum_{s>n} \delta_s(f) \right\|_\infty \leq \sum_{s>n} (s+1)^{-r} ||\delta_s(f)||_\infty (s+1)^r \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s>n} (s+1)^{-r\theta'} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \left(\sum_{s>n} ((s+1)^r ||\delta_s(f)||_\infty)^\theta \right)^{1/\theta} \ll n^{-r+1-\frac{1}{\theta}} ||f||_{B^{0,r}_{\infty,\theta}} \leq$$

$$\leq n^{-r+1-\frac{1}{\theta}} \asymp (\log_2 m)^{-r+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{10}$$

Если же $p = q = \infty$, $\theta = 1$, $r > 0$, то

$$||f - S_{2^n}(f)||_\infty \leq \sum_{s>n} (s+1)^{-r} ||\delta_s(f)||_\infty (s+1)^r <$$

$$< n^{-r} \sum_{s>n} (s+1)^r ||\delta_s(f)||_\infty \leq n^{-r} ||f||_{B^{0,r}_{\infty,1}} \leq n^{-r} \asymp (\log_2 m)^{-r}. \tag{11}$$

Пусть теперь $2 \leq q < \infty$, $2 < \theta < \infty$, $r > \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\theta}$. Применяя следствие теоремы Литтлвуда – Пэли (9) и неравенство Гельдера, имеем

$$||f - S_{2^n}(f)||_q \ll \left(\sum_{s>n} ||\delta_s(f)||_q^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{s>n} (s+1)^{-2r} (||\delta_s(f)||_p \, (s+1)^r)^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s>n} (s+1)^{-\frac{2r\theta}{\theta-2}} \right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{s>n} ((s+1)^r ||\delta_s(f)||_p)^\theta \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll n^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} ||f||_{B^{0,r}_{p,\theta}} \leq n^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \asymp (\log_2 m)^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}. \tag{12}$$

Если же $q \geq 2$, $\theta = 2$, $r > 0$, то

$$||f - S_{2^n}(f)||_q \ll \left(\sum_{s>n} (s+1)^{-2r} (||\delta_s(f)||_p \, (s+1)^r)^2 \right)^{1/2} <$$

$$< n^{-r} \left(\sum_{s>n} ((s+1)^r ||\delta_s(f)||_p)^2 \right)^{1/2} \leq n^{-r} ||f||_{B^{0,r}_{p,2}} \ll (\log_2 m)^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}. \tag{13}$$

В случае же $2 \leq q < \infty$, $\theta = \infty$, $r > \dfrac{1}{2}$ получаем

$$||f - S_{2^n}(f)||_q \ll \left(\sum_{s>n}(s+1)^{-2r}(||\delta_s(f)||_p\,(s+1)^r)^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s>n}(s+1)^{-2r}\right)^{1/2} \sup_{s>n}((s+1)^r||\delta_s(f)||_p) \ll$$

$$\ll n^{-r+\frac{1}{2}}||f||_{H_p^{0,r}} \ll n^{-r+\frac{1}{2}} \asymp (\log_2 m)^{-r+\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

При $1 \leq q < 2 \leq \theta \leq \infty$, $r > \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\theta}$, учитывая $||\cdot||_q \leq ||\cdot||_2$ и (12)–(14), имеем

$$d_m(B_{p,\theta}^{0,r}, L_q) \leq d_m(B_{p,\theta}^{0,r}, L_2) \ll (\log_2 m)^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}. \tag{15}$$

Таким образом, оценки сверху в (7), (8) для $d_m(B_{p,\theta}^{0,r}, L_q)$, вследствие (10)–(15), установлены.

Докажем теперь оценки снизу в (7) и (8) для $\varepsilon_m(B_{p,\theta}^{0,r}, L_q)$.

Базовыми при доказательстве этих оценок являются следующие утверждения из [1].

Предварительно для любого множества $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ через $\mathcal{T}(\Lambda)$ обозначим множество тригонометрических полиномов вида

$$t(x) = \sum_{k\in\Lambda} c_k e^{ikx}$$

и для случая, когда множество $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ симметрично относительно начала координат ($\Lambda = -\Lambda$), положим

$$\mathcal{T}_{\mathrm{r}}(\Lambda) = \left\{ t(x) = \sum_{k\in\Lambda} c_k e^{ikx} : c_k = \overline{c}_{-k}, k \in \Lambda \right\}$$

(для $\Lambda = -\Lambda$ иногда будем использовать обозначение $\mathcal{T}_{\mathrm{r}}(\Lambda \bigcap \mathbb{Z}_+)$ вместо $\mathcal{T}_{\mathrm{r}}(\Lambda)$).

Теорема В [1]. *Для любого полинома вида*

$$f = \sum_{k=l+1}^{2l} p_k(x)\cos 4^k x,$$

где $p_k \in \mathcal{T}_{\mathrm{r}}(\{-2^l, \ldots, 2^l\})$, $k = l+1, \ldots, 2l$, $l = 1, 2, \ldots$, *выполняется неравенство*

$$||f||_\infty \geq c \sum_{k=l+1}^{2l} ||p_k||_1, \quad c > 0.$$

Лемма В [1]. *Существует такая абсолютная постоянная* $c_0 > 0$, *что в каждом пространстве* $\mathcal{T}_{\mathrm{r}}(\{N, \ldots, N+m\})$ *можно найти* 2^m *функций* $t^1, \ldots, t^{2^m}$, *для которых*

1) $||t^i||_\infty \leq 1$ *для каждого* i;

2) $||t^{i_1} - t^{i_2}||_1 \geq c_0$, $i_1 \neq i_2$, $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, 2^m\}$.

Лемма С [1]. *Пусть заданы натуральные числа* m, μ, $\mu < m$, *и „параллелепипед”* $\Pi \subset \subset \mathbb{Z}^m$,

$$\Pi = \bigotimes_{j=1}^{m} \{1, \ldots, M_j\},$$

причем для некоторых $Q \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{N}$, $Q \leq M$,

$$Q \leq M_j \leq M, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Тогда найдется множество $\Omega \subset \Pi$ *из не менеее чем* $\left[M^{-\mu}(Q^m - 1) / \binom{m}{\mu} \right]$ *различных точек, имеющее следующее свойство*: *если* $x = x_j \in \Omega$, $y = y_j \in \Omega$, $x \neq y$, *то*

$$\#\{j : x_j \neq y_j\} \geq \mu.$$

Поскольку правая часть (8) от q не зависит, а $|| \cdot ||_q \geq || \cdot ||_1$, $1 \leq q < \infty$, и имеет место вложение $B^{0,r}_{\infty,\theta} \subset B^{0,r}_{p,\theta}$, $1 < p \leq \infty$, то доказательство оценок снизу для $\varepsilon_m(B^{0,r}_{p,\theta}, L_q)$, $1 \leq q < \infty$, сводится к рассмотрению случая $q = 1$, $p = \infty$. При $\theta = \infty$, исходя из таких же соображений, считаем, учитывая (6), что нижняя оценка в (8) для $\varepsilon_m(B^{0,r}_{p,\infty}, L_q)$ уже доказана.

Для каждого числа l построим специальный набор функций $\mathcal{F}_l \subset B^{0,r}_{\infty,\theta}$, на котором будет реализована нижняя оценка для $\varepsilon_{2^l}(B^{0,r}_{\infty,\theta}, L_1)$. Зафиксируем число l и для каждого $j = l + + 1, \ldots, 2l$, согласно лемме B, в которой положим $N = 2^j$, $m = 2^l$, определим набор $\{t^i_j\}_{i=1}^{2^{2^l}} \subset \subset \mathcal{T}_{\mathrm{r}}(\{2^j, \ldots, 2^j + 2^l\})$ со свойствами:

а) $||t^i_j||_\infty \leq 1$;

б) $||t^{i_1}_j - t^{i_2}_j||_1 \geq c_0$ для любых j, $i_1 \neq i_2$.

В результате получим l таких наборов. Далее рассмотрим в качестве „параллелепипеда” Π из леммы C „куб” $\bigotimes_{j=1}^{l} \{1, \ldots, M\}$, положив $M = 2^{2^l}$, $m = l$, $\mu = [l/3]$ $\Big($тогда $\left[M^{-\mu}(M^m - -1) / \binom{m}{\mu} \right] \geq 2^{l 2^{l-1}}\Big)$, и по соответствующему множеству Ω из леммы C определим множество функций

$$\mathcal{F}^0_l := \left\{ f_I = \sum_{j=l+1}^{2l} t^{i_j}_j \colon \ i_j \in \{1, \ldots, 2^{2^l}\}, \ I := (i_{l+1}, \ldots, i_{2l}) \subset \Omega \right\}.$$

Заметим, что $2^{l 2^{l-1}} \leq \operatorname{card} \mathcal{F}^0_l \leq 2^{l 2^l}$.

Для произвольной функции $f \in \mathcal{F}^0_l$, учитывая, что $||\delta_s(f)||_\infty \leq 1$ при $s = l + 1, \ldots, 2l$ и $\delta_s(f) = 0$ при $s \in \mathbb{Z}_+ \backslash \{l + 1, \ldots, 2l\}$ (см. свойство а)), имеем

$$||f||_{B^{0,r}_{\infty,\theta}} = \left(\sum_{s=l+1}^{2l} \left((s+1)^r ||\delta_s(f)||_\infty\right)^\theta \right)^{1/\theta} \leq \left(\sum_{s=l+1}^{2l} (s+1)^{r\theta} \right)^{1/\theta} \asymp l^{r + \frac{1}{\theta}}.$$

Положим $\mathcal{F}_l := C_1 l^{-r-\frac{1}{\theta}} \mathcal{F}^0_l$. Тогда, очевидно, при некотором $C_1 > 0$ имеет место вложение $\mathcal{F}_l \subset B^{0,r}_{\infty,\theta}$ при любом $l \in \mathbb{N}$.

Далее, в [1] показано, что

$$||f-g||_1 \gg l^{1/2} \quad \forall f, g \in \mathcal{F}_l^0, \quad f \neq g, \tag{16}$$

а значит, с учетом $\varepsilon_{l2^{l-1}}(\mathcal{F}_l^0, L_1) \gg l^{1/2}$ и $\varepsilon_{2^l}(B^{0,r}_{\infty,\theta}, L_1) \gg \varepsilon_{2^l}(\mathcal{F}_l, L_1) \gg l^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}$, завершаем доказательство оценки снизу для $\varepsilon_m(B^{0,r}_{p,\theta}, L_q)$ в случае $1 \leq q < \infty$.

Перейдем к случаю $q = \infty$. Доказательство в этом случае фактически совпадает с доказательством для случая $1 \leq q < \infty$, а точнее, для $q = 1$. Отметим только отличия. Вместо $\mathcal{F}_l$ рассмотрим подмножество $H = \{h_I, I \in \Omega\}$ (Ω — множество точек (наборов) I, построенное в лемме С), где $h_I = \sum_{k=l+1}^{2l} t^{i_k} \cos 4^k x$, а t^{i_k} — удовлетворяющий требованиям леммы В (при $N = 0$, $m = 2^l$) набор тригонометрических полиномов порядка 2^l с числом элементов 2^{2^l}.

Применяя теперь теорему В (вместо (16)), для $h \in H$, $g \in H$, $h \neq g$, имеем $||h-g||_\infty \geq cl$, поэтому $\varepsilon_{2^l}(B^{0,r}_{\infty,\theta}, L_\infty) \gg l^{-r+1-\frac{1}{\theta}}$ (вследствие включения $C_2 l^{-r-\frac{1}{\theta}} H \subset B^{0,r}_{\infty,\theta}$, $C_2 > 0$).

Таким образом, оценки сверху для $d_m(B^{0,r}_{p,\theta}, L_q)$ и такие же по порядку оценки снизу для $\varepsilon_m(B^{0,r}_{p,\theta}, L_q)$ получены. Отсюда, с учетом леммы А, заключаем, что теоремы 1 и 2 доказаны.

Отметим, что в [3] при $2 \leq q \leq p \leq \infty$, $q < \infty$, $1 \leq \theta \leq 2$, $r > 0$ установлена оценка $d_m(B^{0,r}_{p,\theta}, L_q) \asymp (\log_2 m)^{-r}$, которая дополняет теорему 2, например, по значениям параметра θ.

В заключение выражаю благодарность В. С. Романюку за обсуждение результатов работы и полезные замечания при ее оформлении.

1. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* Об одной норме и аппроксимационных характеристиках классов функций многих переменных // Теория функций. Сер. физ.-мат. наук. – 2007. – **25**. – С. 58 – 79.
2. *Seeger A., Trebels W.* Low regularity classes and entropy numbers // Arch. Math. – 2009. – **92**, № 2. – P. 147 – 157.
3. *Стасюк С. А.* Аппроксимативные характеристики аналогов классов Бесова с логарифмической гладкостью // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 4. – С. 493 – 499.
4. *Cobos F., Domínquez Ó.* On Besov spaces of logarithmic smoothness and Lipschitz spaces // J. Math. Anal. and Appl. – 2015. – **425**, № 1. – P. 71 – 84.
5. *Пич А.* Операторные идеалы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 536 с.
6. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions // Comput. Math. and Anal. Ser. – Commack, New York: Nova Sci. Publ., Inc., 1993. – 419 p.
7. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **93**. – 352 с.
8. *Романюк А. С.* Оценки энтропийных чисел и ε-энтропии классов периодических функций многих переменных // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 3. – С. 196 – 213.

Получено 10.11.14