УДК 517.9

Е. Ю. Романенко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ДИНАМИКА ОКРЕСТНОСТЕЙ ТОЧЕК ПРИ НЕПРЕРЫВНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ИНТЕРВАЛА*

Let $\{I, f, Z^+\}$ be a dynamical system induced by the continuous map f of a closed bounded interval I into itself. In order to describe the dynamics of neighborhoods of points unstable under f, we suggest a notion of $\varepsilon\omega$-set $\omega_{f,\varepsilon}(x)$ of a point x as the ω-limit set of ε-neighborhood of x. We investigate the association between the $\varepsilon\omega$-set and the domain of influence of a point. We also show that the domain of influence of an unstable point is always a cycle of intervals. The results obtained can be directly applied in the theory of continuous time difference equations and similar equations.

Нехай $\{I, f, Z^+\}$ — динамічна система, індукована неперервним відображенням f замкненого обмеженого інтервалу I в себе. Для опису динаміки околів точок, нестійких при відображенні f, запропоновано поняття $\varepsilon\omega$-множини $\omega_{f,\varepsilon}(x)$ точки x як ω-граничної множини ε-околу точки x. Досліджено зв'язок між $\varepsilon\omega$-множиною й областю впливу точки. Показано також, що область впливу нестійкої точки завжди є циклом інтервалів. Одержані результати знаходять безпосереднє застосування в теорії різницевих рівнянь з неперервним часом та близьких до них рівнянь.

1. Определения и простейшие свойства.

Пусть

$$\{I, f, Z^+\} \tag{1}$$

— динамическая система (ДС), порождаемая непрерывным отображением f замкнутого ограниченного интервала I в себя. Асимптотическое поведение траекторий $x, f(x), \ldots, f^n(x), \ldots$ точек $x \in I$ (здесь индекс n обозначает n-ю итерацию функции: $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$, $f^0(x) = x$) обычно характеризуется с помощью ω-*предельных множеств*

$$\omega_f(x) = \left\{ x' \in I : \exists\, n_1 < n_2 < \ldots \to \infty \text{ такие, что } x' = \lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x) \right\}. \tag{2}$$

Точка x называется *неустойчивой* при отображении f, если для x существует число $d = d(x) > 0$ такое, что при каждом $\varepsilon > 0$ найдутся точка $x' \in U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap I$ и номер m со свойством $\left| f^m(x) - f^m(x') \right| > d$. Как легко видеть, каждая точка траектории неустойчивой точки также является неустойчивой (поэтому неустойчивые точки называют *точками, траектории которых неустойчивы по Ляпунову*). Если точка x неустойчивая, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется подпоследовательность номеров $m_1 < m_2 < \ldots \to \infty$, для которой

$$\inf_{k>0} \operatorname{diam} f^{m_k}(U_\varepsilon(x)) > d. \tag{3}$$

Множество неустойчивых точек называют *разделителем* отображения f [1]. Будем обозначать его $D(f)$. Из (3) следует, что ω-предельное множество $\omega_f(x)$ точки $x \in D(f)$ дает недостаточную информацию о свойствах траектории: сколь угодно малые погрешности в определении численного значения x могут приводить к существенным отклонениям значения величины $f^n(x)$, полученного в результате вычислений, от его истинного значения. Это становится принципиально важным, когда разделитель $D(f)$ содержит массивное, в том или ином смысле, подмножество $D_*(f)$ (например, плотное или положитель-

* Частично поддержана Министерством образования и науки Украины, Государственным фондом фундаментальных исследований (проект № 01.07/00081).

ной меры), для которого $\inf_{x \in D_*(f)} d(x) > 0$. Такое явление получило название *чувствительной зависимости от начальных данных*.

Исходя из изложенного, при исследовании ДС имеет смысл рассматривать, наряду с траекториями точек, и траектории окрестностей точек:

$$U_\varepsilon(x), f(U_\varepsilon(x)), \ldots, f^n(U_\varepsilon(x)), \ldots, \quad \text{где} \quad U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \bigcap I.$$

По аналогии с ω-предельным множеством траектории точки можно ввести ω-предельное множество траектории ε-окрестности точки. Это множество назовем $\varepsilon\omega$-*множеством точки* и будем обозначать $\omega_{f,\varepsilon}(x)$. Определение следующее:

$$\omega_{f,\varepsilon}(x) = \left\{ J \in 2^I \colon \exists\, n_1 < n_2 < \ldots \to \infty \quad \text{такие, что} \quad J = \mathrm{Lt}_{i\to\infty} f^{n_i}(U_\varepsilon(x)) \right\}. \quad (4)$$

Здесь 2^I — семейство всех замкнутых подмножеств интервала I, а Lt обозначает топологический предел последовательности множеств (см., например, [2]). Таким образом, множество $\omega_{f,\varepsilon}(x)$ не принадлежит интервалу I, а является подмножеством множества 2^I.

***Замечание* 1.** ДС (1) индуцирует ДС

$$\left\{ (2^I)_H, \hat{f}, Z^+ \right\}, \quad (5)$$

где $(2^I)_H$ — (компактное) пространство всех замкнутых подмножеств из I, наделенное метрикой Хаусдорфа, и $\hat{f}(A) = \overline{\bigcup_{x\in A} f(x)}$, $A \in (2^I)_H$; здесь и далее черта сверху, как обычно, обозначает операцию замыкания. Нетрудно видеть, что с точки зрения ДС (5) введенное выше $\varepsilon\omega$-множество точки $x \in I$ есть не что иное как ω-предельное множество траектории „точки” $A = \overline{U}_\varepsilon(x)$ пространства $(2^I)_H$. Тогда из общей теории ДС на компактных пространствах непосредственно следует, что *множество* $\omega_{f,\varepsilon}(x)$ *замкнуто в пространстве* $(2^I)_H$ *и инвариантно относительно действия ДС* (5). Такой подход, безусловно, заслуживает внимания, однако для целей данной работы удобнее оставаться в рамках исходной ДС (1).

Действие функции $f\colon I \to I$ естественным образом продолжается на множество 2^I по правилу

$$f(\mathcal{A}) = \{ A' = f(A) \colon A \in \mathcal{A} \}, \qquad \mathcal{A} \subset 2^I.$$

Из определения топологического предела и непрерывности f очевидным образом выводятся соотношения

$$f(\omega_{f,\varepsilon}(x)) = \omega_{f,\varepsilon}(x), \quad (6)$$

$$\omega_{f,\varepsilon}(x) = \bigcup_{i=0}^{p-1} f^i\left(\omega_{f^p,\varepsilon}(x)\right) \quad \text{для любого целого} \quad p \ge 1. \quad (7)$$

Понятие $\varepsilon\omega$-множества $\omega_{f,\varepsilon}(x)$ тесно связано с классическими понятиями ω-предельного множества $\omega_f(x)$ и *области влияния* $Q_f(x)$ точки x. Последняя определяется так:

$$Q_f(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{j\ge 0} \overline{\bigcup_{n\ge j} f^n(U_\varepsilon(x))}, \quad (8)$$

при этом $Q_f(x) = \omega_f(x)$ для устойчивых точек и $Q_f(x) \supseteq \omega_f(x)$ для неустойчивых; более того, $\mathrm{int}\, Q_f(x) \ne \varnothing$, если и только если точка x неустойчива.

Чтобы указать соотношения между множеством $\omega_{f,\varepsilon}(x)$ и множествами $\omega_f(x)$ и $Q_f(x)$, удобно ввести еще одно множество $\tilde{\omega}_{f,\varepsilon}(x)$ — $\varepsilon\omega$-*след точки*, определяемое через $\omega_{f,\varepsilon}(x)$ следующим образом:

$$\tilde{\omega}_{f,\varepsilon}(x) = \bigcup_{J \in \omega_{f,\varepsilon}(x)} J, \tag{9}$$

где операция объединения $\bigcup$ осуществляется в пространстве I.

Из (4) и (8) следует, что

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \tilde{\omega}_{f,\varepsilon}(x) = Q_f(x), \quad x \in I. \tag{10}$$

Действительно, пусть Ls обозначает верхний топологический предел последовательности множеств; как известно [2],

$$\operatorname{Ls} A_n = \bigcap_{j>0} \overline{\bigcup_{n \geq j} A_n} \quad \text{и (в сепарабельном пространстве)} \quad \operatorname{Ls} A_n = \bigcup{}' \operatorname{Lt} A_{k_n},$$

где операция объединения $\bigcup{}'$ распространяется на любые сходящиеся подпоследовательности A_{k_n}. Отсюда сразу же следуют равенства

$$Q_f(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \operatorname{Ls}_{n\to\infty} f^n(U_\varepsilon(x)) \quad \text{и} \quad \tilde{\omega}_{f,\varepsilon}(x) = \operatorname{Ls}_{n\to\infty} f^n(U_\varepsilon(x)),$$

которые дают (10) и, кроме того, устанавливают, что $\varepsilon\omega$-*след точки* x — *это верхний топологический предел последовательности множеств* $f^n(U_\varepsilon(x))$, $n = 0, 1, \ldots$.

Из (10) заключаем, что

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \tilde{\omega}_{f,\varepsilon}(x) = \omega_f(x), \quad x \in I \setminus D(f), \tag{11}$$

и, следовательно, рассматривать $\varepsilon\omega$-множества целесообразно, вообще говоря, только для неустойчивых точек.

2. Основные результаты. Выясним, что представляют собой множества $\omega_{f,\varepsilon}(x)$, когда $x \in D(f)$. Доказательства сформулированных утверждений будут приведены в следующем пункте.

Особо выделим подмножества $D_p(f) \subset D(f)$, которые определим таким образом:

$$D_p(f) = \left\{ x \in D(f) \colon \exists\, k = k(x,p) \geq 0 \text{ такое, что } f^{kp}(x) \in \operatorname{int} Q_{f^p}(x) \right\}. \tag{12}$$

Для неустойчивых точек x предположение, что $x \in D_p(f)$ при некотором $p \geq 1$, является достаточно общим ввиду следующего утверждения.

Предложение 1*. *Для каждой точки* $x \in D(f)$ *и любого целого* $p \geq 0$ *существует номер* $k = k(x,p) \geq 0$ *такой, что*

$$f^{kp}(x) \in Q_{f^p}(x). \tag{13}$$

Нам потребуется также еще одно утверждение о свойствах множества $Q_f(x)$, в котором используется понятие цикла интервалов. Напомним определение: объединение замкнутых интервалов $J_0, J_1, \ldots, J_{p-1} \subset I$ называется *циклом интервалов* отображения f периода p, если эти интервалы цикличес-

* Предложение 1 эквивалентно утверждению: *для каждой точки* $x \in D(f)$ *и любого целого* $p \geq 0$ *существует* (*кратный* p) *номер* $n = n(x,p) \geq 0$ *такой, что* $f^n(x) \in \Omega(f^p)$, *где* $\Omega(f)$ — *множество неблуждающих точек отображения* f.

ки переставляются отображением f, т. е. $f(J_0) = J_1, f(J_1) = J_2, \ldots, f(J_{p-1}) = J_0$, и при этом $\operatorname{int} J_i \cap \operatorname{int} J_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $i, j = 0, 1, \ldots, p-1$.

Предложение 2. *Если $x \in D(f)$, то область влияния $Q_f(x)$ точки x представляет собой цикл интервалов отображения f.*

Предложение 2 позволяет поставить в соответствие каждой неустойчивой точке $x \in D(f)$ некоторое целое число, равное периоду ее области влияния $Q_f(x)$. Назовем это число *псевдопериодом* точки. Заметим, что для неустойчивых периодических точек их псевдопериод, вообще говоря, не совпадает с их периодом (точнее, является делителем периода). Назовем $x \in D(f)$ *правильной неустойчивой точкой,* если $x \in D_p(f)$, где p — псевдопериод x.

Теперь можно сформулировать основной результат.

Теорема. *Пусть $x \in D(f)$ и p — псевдопериод точки x. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ $\varepsilon\omega$-множество $\omega_{f,\varepsilon}(x)$ точки x состоит из невырожденных интервалов $J_j(\varepsilon) = \mathrm{Lt}_{i\to\infty} f^{2pi+j}(U_\varepsilon(x))$, $j = 0, 1, \ldots, 2p-1$, циклически переставляемых отображением f.*

Более того, если x — правильная неустойчивая точка, то найдется $\varepsilon_* > 0$ такое, что при $\varepsilon < \varepsilon_*$

$$\omega_{f,\varepsilon}(x) = \left\{ Q_{f^{2p}}(x), f\big(Q_{f^{2p}}(x)\big), \ldots, f^{2p-1}\big(Q_{f^{2p}}(x)\big) \right\}, \quad \textit{если} \quad Q_{f^{2p}}(x) \neq Q_{f^p}(x), \tag{14}$$

$$\omega_{f,\varepsilon}(x) = \left\{ Q_{f^{p}}(x), f\big(Q_{f^{p}}(x)\big), \ldots, f^{p-1}\big(Q_{f^{p}}(x)\big) \right\}, \quad \textit{если} \quad Q_{f^{2p}}(x) = Q_{f^p}(x). \tag{15}$$

***Замечание* 2.** Полученные результаты показывают, что область влияния полностью характеризует асимптотическое поведение малых окрестностей правильных неустойчивых точек. Однако при этом возможны ситуации, когда компоненты области влияния $Q_f(x)$, как таковые, не являются элементами $\varepsilon\omega$-множества $\omega_{f,\varepsilon}(x)$, а каждая компонента распадается на пару смежных интервалов, которые в совокупности и образуют множество $\omega_{f,\varepsilon}(x)$ (чего, понятно, не может быть для устойчивых точек).

***Замечание* 3.** Из первой части теоремы следует, что *$\varepsilon\omega$-предельное множество неустойчивой точки x является циклом системы* (5) *при любом* $\varepsilon > 0$. Однако при этом $\varepsilon\omega$-след точки x, вообще говоря, не является циклом интервалов отображения f (элементы $\varepsilon\omega$-предельного множества, как подынтервалы из I, могут пересекаться по внутренности).

Если же x — правильная неустойчивая точка, то, как следует из второй части теоремы, при малых $\varepsilon > 0$ $\varepsilon\omega$-след точки x совпадает с ее областью влияния; соотношение (10) принимает вид $\tilde{\omega}_{f,\varepsilon}(x) = Q_f(x)$, начиная с некоторого $\varepsilon = \varepsilon_* > 0$, и, следовательно, *при достаточно малых $\varepsilon > 0$ $\varepsilon\omega$-следы правильной неустойчивой точки являются* (*одним и тем же*) *циклом интервалов отображения f.*

***Замечание* 4.** Применительно к системе (5) приведенная выше теорема означает, что *для любого $A \in (2^I)_H$ такого, что A связно в I и $\operatorname{int} A$ содержит неустойчивую точку отображения f, ω-предельное множество траектории A, $\hat{f}(A)$, $\hat{f}^2(A), \ldots$ представляет собой цикл, „точками" которого являются невырожденные интервалы $J_j(A) = \mathrm{Lt}_{i\to\infty} f^{2pi+j}(A)$, $j = 0, 1, \ldots$ $\ldots, 2p-1$, где p — наименьший из псевдопериодов неустойчивых точек, принадлежащих* $\operatorname{int} A$. Близкие вопросы рассмотрены в [3], где показано, что если отображение f имеет циклы периодов 2^i, $i = 0, 1, \ldots, n < \infty$, и не имеет других периодических орбит, то последовательность A, $f^{2^n}(A)$, $f^{2^{n+1}}(A), \ldots$ сходится (в метрике Хаусдорфа) для любого невырожденного интервала $A \in I$. С точки зрения ДС (5) это означает, что ω-предельное множество траектории A, $\hat{f}(A)$, $\hat{f}^2(A), \ldots$, когда A связно в I и $\operatorname{int} A \neq \varnothing$, является циклом ДС (5), если отображение f не имеет циклов сколь угодно большого периода.

По аналогии с $\varepsilon\omega$-следом точки можно ввести понятие *ω-следа* $\tilde{\omega}[A]$ *множества* $A \in (2^I)_H$ как объединения в пространстве I элементов ω-предельного множества $\omega[A]$. Другими словами, $\tilde{\omega}[A] = \operatorname{Ls}_{n\to\infty} f^n(A)$. Тогда естественно возникает вопрос: при каких условиях множество $\tilde{\omega}[A]$ является циклом интервалов отображения f?

В заключение этого пункта отметим, что приведенная теорема находит непосредственное применение в теории разностных уравнений с непрерывным временем и в теории краевых задач для уравнений в частных производных (см. [1, 4] и приведенную в них библиографию).

3. *Доказательства.* В этом пункте приведем детальные доказательства сформулированных выше утверждений.

***Доказательство предложения* 1.** Для точек $x \in D(f)$ выполняется соотношение (3), из которого заключаем, что для любой окрестности U точки x существует число $d = d(x) > 0$ такое, что

$$\limsup_{n\to\infty} \operatorname{diam} f^n(U) > d. \tag{16}$$

Поэтому, в силу ограниченности I, найдутся номера $k \geq 0$ и $k' \geq 1$, для которых $f^k(U) \cap f^{k+k'}(U) \neq \varnothing$ (т. е. точка $y = f^k(x)$ является неблуждающей). Отсюда непосредственно следует, что любая окрестность точки $y = f^k(x)$ пересекается с бесконечным числом множеств из последовательности $f^n(U)$, $n = 0, 1, \ldots$. И тогда, ввиду произвольности U, заключаем, что $f^k(x) \in Q_f(x)$. Для $p = 1$ предложение доказано.

Ввиду установленного выше предложение 1 будет доказано для любого $p > 1$, если покажем, что $x \in D(f^p)$. Предположим, что это не так, т. е.

$$x \in D(f), \quad \text{но} \quad x \notin D(f^p).$$

Пусть d — константа, фигурирующая в (16). Выявление противоречия основывается на таких трех свойствах.

1. Из равномерной непрерывности f на I следует существование $\delta > 0$ такого, что для любого открытого множества $U \subset I$

$$\operatorname{diam} f^r(U) < \frac{d}{2}, \quad r = 0, 1, \ldots, p-1, \quad \text{если} \quad \operatorname{diam} U < \delta.$$

2. Поскольку $x \notin D(f^p)$, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\operatorname{diam} f^{mp}(U_\varepsilon(x)) < \delta, \quad m = 0, 1, \ldots.$$

3. Поскольку $x \in D(f)$, найдется целое N такое, что

$$\operatorname{diam} f^N(U_\varepsilon(x)) > d.$$

Представим N в виде $N = m_* p + r_*$, где m_* и r_* — целые положительные числа, $0 \leq r_* \leq p-1$. Тогда из первого и второго свойств имеем

$$\operatorname{diam} f^N(U_\varepsilon(x)) \le \operatorname{diam} f^{r_*}\left(f^{m_* p}(U_\varepsilon(x))\right) < \frac{d}{2}, \quad \text{так как} \quad f^{m_* p}(U_\varepsilon(x)) < \delta,$$

что противоречит третьему свойству. Следовательно, $x \in D(f^p)$, и доказательство завершено.

Для доказательства предложения 2 потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $x \in D(f)$. Тогда для любого подынтервала H из I, содержащего точку x вместе с окрестностью, найдутся целые $r \ge 0$ и $q \ge 1$ такие, что множество $W = \bigcup_{n\ge 0} f^n(H)$ состоит из $r + q$ компонент связности*

$$H, f(H), \ldots, f^{r-1}(H), \quad E_i = \bigcup_{n\ge 0} f^{r+i+nq}(H), \quad i = 0, 1, \ldots, q-1. \tag{17}$$

Доказательство. Воспользуемся следующим результатом [5, с. 69, 70]: пусть H — подынтервал из I и $W = \bigcup_{n\ge 0} f^n(H)$; если множество $S(H) = \left\{ s \in Z^+ : \exists j \ge 1 \text{ такое, что } f^s(H) \text{ и } f^{s+j}(H) \text{ входят в одну компоненту множества } W \right\}$ непусто, то множество W состоит из компонент (17), где $r \ge 0$ — наименьший элемент из $S(H)$ и $q \ge 1$ — наименьшее целое число, для которого $f^r(H)$ и $f^{r+q}(H)$ принадлежат одной и той же компоненте множества W.

Отсюда непосредственно следует лемма 1. Действительно, как отмечалось при доказательстве утверждения 1, если $x \in D(f)$, то для любого подынтервала $H \subset I$ со свойством $\operatorname{int} H \ni x$ найдутся номера $k \ge 0$ и $k' \ge 1$ такие, что $f^k(H) \bigcap f^{k+k'}(H) \ne \varnothing$. Поэтому $S(H) \ne \varnothing$ и, значит, утверждение леммы 1 справедливо (при этом в (17) $r \le k$ и $q \le k'$).

Доказательство предложения 2. Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множества

$$Q_{f,\varepsilon}(x) = \bigcap_{j\ge 0} \overline{\bigcup_{n\ge j} f^n(U_\varepsilon(x))}. \tag{18}$$

Ввиду (8) лемма будет доказана, если мы покажем, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ множества $Q_{f,\varepsilon}(x)$ состоят из одного и того же (конечного) числа компонент связности (в дальнейшем просто компонент), которые представляют собой интервалы, циклически переставляемые отображением f.

Далее вместо $U_\varepsilon(x)$ будем писать U_ε. Будем также использовать обозначение $a(\operatorname{mod} b)$ (a, b — целые числа), понимая под ним следующее: $a(\operatorname{mod} b) = b\{a/b\}$, где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа.

Согласно лемме 1 существуют целые $r \ge 0$ и $q \ge 1$ такие, что при каждом $j \ge r$ компонентами множества $\bigcup_{n\ge j} f^n(U_\varepsilon)$ являются q связных (возможно, незамкнутых) множеств

$$E_{j,i} = \bigcup_{n\ge 0} f^{i+nq+j}(U_\varepsilon), \quad i = 0, 1, \ldots, q-1, \tag{19}$$

причем

$$f(E_{j,i}) = E_{j,(i+1)(\operatorname{mod} q)} \text{ и } E_{j,i} \supset E_{j+1,(i-1)(\operatorname{mod} q)}, \qquad 0 \ge i \ge q-1. \tag{20}$$

1. Если среди интервалов $\overline{E}_{j,i}$, $i = 0, 1, \ldots, q-1$, нет смежных, то эти интервалы являются компонентами множества $\overline{\bigcup_{n\ge j} f^n(U_\varepsilon)}$, и тогда, ввиду второго из соотношений (20), множество $Q_{f,\varepsilon}(x)$ состоит из q компонент

$$G_i = \bigcap_{j\geq 0} \overline{E}_{j,(i-j)(\mathrm{mod}\, q)}, \quad i = 0, 1, \ldots, q-1. \tag{21}$$

2. Предположим, что среди интервалов $\overline{E}_{j,i}$, $i = 0, 1, \ldots, q-1$, есть смежные, а именно, найдутся m интервалов, объединение которых дает интервал, не смежный ни с одним из исходных интервалов $\overline{E}_{j,i}$. Покажем, что тогда $m = 2$. Из (20) следует, что m делит q, а множество из q интервалов $\overline{E}_{j,0}$, $\overline{E}_{j,1}, \ldots, \overline{E}_{j,q-1}$ разбивается на $q' = q/m$ наборов по m смежных в совокупности интервалов

$$\begin{gathered}
\overline{E}_{j,0},\ \overline{E}_{j,q'}, \ldots, \overline{E}_{j,(m-1)q'}, \\
\overline{E}_{j,1},\ \overline{E}_{j,q'+1}, \ldots, \overline{E}_{j,(m-1)q'+1}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\overline{E}_{j,q'-1},\ \overline{E}_{j,2q'-1}, \ldots, \overline{E}_{j,(m-1)q'+q'-1} = \overline{E}_{j,q-1},
\end{gathered} \tag{22}$$

при этом объединение интервалов, входящих в каждый набор, образует одну из компонент $F_{j,i}$ множества $\overline{\bigcup_{n\geq j} f^n(U_\varepsilon)}$, а именно:

$$F_{j,i} = \bigcup_{l=0}^{m-1} \overline{E_{j,i+lq'}}, \quad i = 0, 1, \ldots, q'-1.$$

Рассмотрим, например, компоненту $F_{j,0} = \bigcap_{l=0}^{m-1} \overline{E}_{j,lq'}$. Понятно, что $f^{q'}(F_{j,0}) = F_{j,0}$. Действительно,

$$f^{q'}(F_{j,0}) = \bigcup_{l=0}^{m-1} \overline{E}_{j,(l+1)q'(\mathrm{mod}\, q)} = \bigcup_{l=1}^{m-1} \overline{E}_{j,lq'} \cup \overline{E}_{j,0} = F_{j,0}.$$

Поэтому на интервале $F_{j,0}$ имеется неподвижная точка, которую обозначим z. Если z принадлежит какому-то одному из интервалов $\overline{E}_{j,lq'}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, например интервалу $\overline{E}_{j,0}$, то $\overline{E}_{j,0}$ переходит в себя же при отображении $f^{q'}$ и, следовательно,

$$\overline{E}_{j,0} = f^{q'}\big(\overline{E}_{j,0}\big) = f^{2q'}\big(\overline{E}_{j,0}\big) \ldots,$$

т. е.

$$\overline{E}_{j,0} = \overline{E}_{j,q'} = \overline{E}_{j,2q'} = \ldots = \overline{E}_{j,(m-1)q'}.$$

Тогда $m = 1$ в разбиении (22), что невозможно, так как по определению $m \geq 2$.

Если z принадлежит двум из интервалов $\overline{E}_{j,i}$, то эти интервалы должны переходить друг в друга при отображении $f^{q'}$. Тогда аналогично предыдущему находим

$$\overline{E}_{j,0} = \overline{E}_{j,2q'} = \ldots \quad \text{и} \quad \overline{E}_{j,q'} = \overline{E}_{j,3q'} = \ldots,$$

т. е. $m = 2$ (что, конечно, возможно только когда q — четное). Этим все возможности исчерпаны.

Таким образом, во втором случае множество $\overline{\bigcup_{n\geq j} f^n(U_\varepsilon)}$ образовано $q' = q/2$ компонентами

$$F_{j,i} = \overline{E}_{j,i} \cup \overline{E}_{j,q'+i} = \overline{\bigcup_{n\geq 0} f^{i+nq'+j}(U_\varepsilon)}, \quad i = 0, 1, \ldots, q-1, \tag{23}$$

причем, как следует из (20),

$$f(F_{j,i}) = F_{j,(i+1)(\mathrm{mod}\,q')} \quad \text{и} \quad F_{j,i} \supset F_{j+1,(i-1)(\mathrm{mod}\,q')}, \quad 0 \ge i \ge q-1. \tag{24}$$

Следовательно, множество $Q_{f,\varepsilon}(x)$ состоит уже из $q' = q/2$ компонент — интервалов

$$G_i = \bigcap_{j \ge 0} F_{j,(i-j)(\mathrm{mod}\,q')}, \quad i = 0, 1, \ldots, q'-1. \tag{25}$$

3. Таким образом, из (21), (23) и (25) заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$, независимо от того, какой из двух рассмотренных выше случаев реализуется, существует целое $p_\varepsilon \ge 1$ такое, что множество $Q_{f,\varepsilon}(x)$ состоит из p_ε компонент

$$G_{\varepsilon,i} = \bigcap_{j \ge 0} \overline{\bigcup_{n \ge 0} f^{j+np_\varepsilon+(i-j)(\mathrm{mod}\,p)}(U_\varepsilon)}, \quad i = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{26}$$

При этом из (20) и (24) находим

$$f(G_{\varepsilon,i}) = G_{\varepsilon,(i+1)(\mathrm{mod}\,p)}, \quad 0 \le i \le p-1. \tag{27}$$

Более того, из вложенности множеств $G_{\varepsilon,i}$ по ε и соотношений (27) следует, что если $\varepsilon' < \varepsilon$, то $p_{\varepsilon'}$ кратно p_ε и

$$f(G_{\varepsilon,i}) \supset \bigcup_{n=0}^{N-1} G_{\varepsilon',i+np_\varepsilon}, \quad N = \frac{p_{\varepsilon'}}{p_\varepsilon}, \quad i = 0, 1, \ldots, p_\varepsilon - 1. \tag{28}$$

Итак, для каждого $\varepsilon > 0$ существует целое число $p_\varepsilon \ge 1$ такое, что компоненты $G_{\varepsilon,i}$ множества $Q_{f,\varepsilon}(x)$ могут быть представлены в виде (26). Поскольку $x \in D(f)$, имеет место соотношение (3), и тогда диаметр хотя бы одной из компонент $G_{\varepsilon,i}$ будет больше $d = d(x)$, каким бы малым ни было $\varepsilon > 0$. Это означает, что, начиная с некоторого ε_*, число компонент множества $Q_{f,\varepsilon}(x)$ стабилизируется и становится равным некоторому числу $p = p(x)$: $p_{\varepsilon'} = p_{\varepsilon''} = p$, если $\varepsilon', \varepsilon'' \le \varepsilon_*$ (в противном случае из (28) следовало бы, что $\mathrm{diam}\, G_{\varepsilon,i} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для любого i, $0 \le i \le p_\varepsilon - 1$). Поэтому множество компонент связности области влияния $Q_f(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} Q_{f,\varepsilon}(x)$ всегда состоит из конечного числа замкнутых интервалов, циклически переходящих друг в друга при отображении f, что и требовалось доказать.

Из определения области влияния и доказательства леммы 1 легко получаем такое следствие.

Следствие. *Если область влияния $Q_f(x)$ точки x — интервал, то либо $Q_f(x) = Q_{f^2}(x)$, либо $Q_f(x)$ является объединением двух смежных интервалов $Q_{f^2}(x)$ и $f\big(Q_{f^2}(x)\big)$, переходящих друг в друга при отображении f.*

Для доказательства теоремы потребуется следующая лемма, которая фактически является упрощенной формулировкой теоремы для случая $p = 1$.

Лемма 2. *Если область влияния $Q_f(x)$ точки $x \in D(f)$ является интервалом, то для любой ε-окрестности $U_\varepsilon(x)$ точки x последовательность множеств*

$$U_\varepsilon(x),\ f^2(U_\varepsilon(x)), \ldots,\ f^{2i}(U_\varepsilon(x)), \ldots \tag{29}$$

имеет топологический предел; более того, если x — правильная неустойчивая точка, т. е. $x \in D_1(f)$, то найдется $\varepsilon_* > 0$ такое, что

$$\mathrm{Lt}_{i\to\infty} f^{2i}(U_\varepsilon(x)) = Q_{f^2}(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon < \varepsilon_*. \tag{30}$$

Доказательство. Поскольку $\mathrm{Lt}\,A_i = \mathrm{Lt}\,\overline{A_i}$ и $\mathrm{Ls}\,A_i = \mathrm{Ls}\,\overline{A_i}$, вместо последовательности (29) будем рассматривать последовательность

$$V_\varepsilon(x),\ f^2(V_\varepsilon(x)), \ldots,\ f^{2i}(V_\varepsilon(x)), \ldots, \quad \text{где} \quad V_\varepsilon(x) = \overline{U}_\varepsilon(x) \tag{31}$$

(это упрощает некоторые рассмотрения). Последовательность множеств, для которой существует топологический предел, будем называть сходящейся.

Из определения области влияния следует, что

$$Q_f(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} Q_{f,\varepsilon}(x), \quad \text{где} \quad Q_{f,\varepsilon}(x) = \mathrm{Ls}_{n\to\infty} f^n(V_\varepsilon(x)). \tag{32}$$

Множества $Q_{f,\varepsilon}(x)$ инвариантны при отображении f и являются интервалами (последнее так, поскольку $Q_{f,\varepsilon}(x) \supset Q_f(x)$, а интервал $Q_f(x)$, будучи инвариантным, пересекается со всеми множествами последовательности (31), начиная с некоторого номера).

Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Ввиду инвариантности интервал $Q_{f,\varepsilon}(x)$ содержит хотя бы одну неподвижную точку, например, x_0. Что касается последовательности (31), сходимость которой нас интересует, то имеются две возможности:

i) $f^{n_*}(V_\varepsilon(x)) \ni x_0$ при некотором $n_* > 0$;

ii) $f^n(V_\varepsilon(x)) \not\ni x_0$, $n = 1, 2, \ldots$,

причем в обоих случаях любая окрестность каждой точки $x \in Q_{f,\varepsilon}(x)$, в том числе и x_0, пересекается с бесконечным числом множеств из последовательности (31).

I. Сразу же отметим, что неподвижная точка, для которой реализуется возможность i), всегда найдется, если отображение f имеет более одной неподвижной точки на интервале $Q_{f,\varepsilon}(x)$, который ради краткости будем обозначать Q.

Действительно, предположим, что это не так. Тогда, во-первых, найдутся две неподвижные точки $x_1, x_2 \in Q$, $x_1 < x_2$, такие, что на (x_1, x_2) функция $f(x) - x$ знакопостоянна, например, строго положительна, и, во-вторых, найдется номер $k > 0$ такой, что $f^k(V_\varepsilon(x)) \subset (x_1, x_2)$.

Если $\sup_{x'\in(x_1,x_2)} f(x') = x_2$, то $f((x_1, x_2)) = (x_1, x_2)$ и $\lim_{n\to\infty} f^n(x') = x_2$ для любого $x' \in (x_1, x_2)$. Отсюда непосредственно следует, что $f^n(V_\varepsilon(x)) \subset$ $\subset (x_1, x_2)$ при всех $n \geq k$, и тогда для точки x_1 возможность i) обязательно реализуется. Если бы это было не так, то для каждой точки $x' \in (x_1, x_2)$ нашлась бы окрестность, которая пересекалась бы не более чем с конечным числом множеств из (31), что противоречит условию $x' \in Q$.

Допустим, что $\sup_{x'\in(x_1,x_2)} f(x') > x_2$. Тогда в правой полуокрестности точки x_1 имеется бесконечно много прообразов неподвижной точки x_2. Согласно лемме 1 множество $\bigcup_{n\geq 0} f^n(V_\varepsilon(x))$ состоит из конечного числа компонент, и поэтому существует $\sigma > 0$ такое, что диаметр каждой из этих компонент больше σ. Выберем $\delta < \sigma$ так, чтобы точка $x' = x_1 + \delta$ была прообразом точки x_2. Как мы знаем, интервал $[x_1, x']$ пересекается с бесконечным числом множеств из (31). Если $f^j(V_\varepsilon(x))$ — одно из этих множеств, то $[x_1, x']$ пересекается и со всей компонентой, которой принадлежит $f^j(V_\varepsilon(x))$. Поскольку диаметр этой компоненты больше σ, компонента „накрывает" хотя бы один прообраз неподвижной точки x_2, а именно, точку x', и тогда x' с необходимостью принадлежит по крайней мере одному из множеств (31). Отсюда непосредственно следует, что для точки x_2 реализуется свойство i), что невозможно согласно нашему предположению.

Таким образом, утверждение, сформулированное в начале п. I, доказано.

II. Предположим, что неподвижная точка, для которой реализуется возможность i), существует. Напомним, что

$$Q = \mathrm{Ls}_{n\to\infty} f^n(V_\varepsilon(x)). \tag{33}$$

1. Если множество $f^{n_*}(V_\varepsilon(x))$ „накрывает" вместе с точкой x_0 весь интервал Q, то ввиду инвариантности Q имеем $Q \subset \overline{f^n(V_\varepsilon(x))}$ при $n \geq n_*$. Отсюда и из соотношения (33) заключаем, что

$$\mathrm{Li}_{n\to\infty} f^n(V_\varepsilon(x)) \supset Q = \mathrm{Ls}_{n\to\infty} f^n(V_\varepsilon(x)).$$

Следовательно, предел $\mathrm{Lt}_{n\to\infty} f^n(V_\varepsilon(x))$ существует и, более того, представляет собой интервал Q.

2. Рассмотрим случай, когда $f^{n_*}(V_\varepsilon(x)) \subset \operatorname{int} Q$. Сходимость последовательности интервалов $f^n(V_\varepsilon(x))$, $n = 1, 2, \ldots$, определяется динамикой их концевых точек. Поэтому удобно использовать такие обозначения:

$$[y_n, z_n] = f^n(V_\varepsilon(x)), \qquad y_n^* = \min_{n_* \leq i \leq n} y_i, \qquad z_n^* = \max_{n_* \leq i \leq n} z_i.$$

Обозначим через q_1 и q_2 соответственно левый и правый концы интервала Q. Из (33) заключаем, что

$$\liminf_{n\to\infty} y_n^* = q_1, \qquad \limsup_{n\to\infty} z_n^* = q_2, \tag{34}$$

и тогда

$$[y_{n+1}, z_{n+1}] \not\subseteq \left[y_n^*, z_n^*\right], \qquad n \geq n_*. \tag{35}$$

Выделим два альтернативных случая:

A) существует $m \geq n_*$ такое, что

$$[y_{m+1}, z_{m+1}] \supseteq [y_m, z_m]; \tag{36}$$

B) каково бы ни было m, соотношение (36) не выполняется.

В случае A) последовательность (31), начиная с $n = m$, состоит из вложенных интервалов $[y_m, z_m] \subseteq [y_{m+1}, z_{m+1}] \subseteq [y_{m+2}, z_{m+2}] \subseteq \ldots$ и поэтому является сходящейся.

Перейдем к случаю B). Пусть, для определенности, $z_{n_*+1} > z_{n_*}$ (другой подслучай $z_{n_*+1} < z_{n_*}$ исследуется аналогично с использованием (35)). Если для каждого $k \geq n_*$ выполняется неравенство $z_{k+1} \geq z_k$, то тогда, согласно условию B), для каждого $k \geq n_*$ выполняется и неравенство $y_{k+1} \geq y_k$, что противоречит первому из соотношений (34). Таким образом, последовательность z_n не может быть монотонной, т. е. существует $k > n_*$ такое, что

$$z_{n_*} < z_{n_*+1} \leq \ldots \leq z_{k-1} \leq z_k > z_{k+1}.$$

Покажем, что тогда

$$z_{k+1} \geq z_{k-1}. \tag{37}$$

Из B) следуют неравенства

$$y_{n_*} \le y_{n_*+1} \le \ldots \le y_{k-1} \le y_k.$$

Кроме того, в силу i)

$$x_0 \in [y_n, z_n] \quad \text{при} \quad n \ge n_*.$$

Итак, имеем

$$y_{k-2} \le y_{k-1} \le y_k < x_0 < z_{k-2} \le z_{k-1} \le z_k.$$

Поскольку $f([y_{k-2}, z_{k-2}]) = [y_{k-1}, z_{k-1}] \supseteq [y_k, z_{k-2}]$, на интервале $[y_{k-1}, z_{k-2}]$ нет прообразов точки z_k. С другой стороны, $f([y_{k-1}, z_{k-1}]) = [y_k, z_k]$. Из этих двух фактов заключаем, что на интервале $[z_{k-2}, z_{k-1}]$ имеется прообраз точки z_k, который обозначим a_k. Тогда ввиду соотношений $f(x_0) = x_0$, $f(a_k) = z_k$, $x_0 < z_{k-1} \le z_k$ и непрерывности f заключаем, что на интервале $[x_0, a_k]$ есть прообраз точки z_{k-1}, который обозначим a_{k-1}. Но $[y_k, z_k] \supseteq [x_0, a_{k-1}]$, поэтому $[y_{k+1}, z_{k+1}] = f([y_k, z_k]) \supseteq [x_0, z_{k-1}]$. Следовательно, неравенство (37) выполняется.

В силу (35)

$$y_{k+1} < y_{k-1}. \tag{38}$$

Из (37) и (38) вытекает, что

$$[y_{k+1}, z_{k+1}] \supset [y_{k-1}, z_{k-1}]. \tag{39}$$

Применяя к (39) отображения f и f^2, находим, что независимо от четности k выполняются включения

$$[y_{2i+2}, z_{2i+2}] \supset [y_{2i}, z_{2i}] \quad \text{и} \quad [y_{2i+3}, z_{2i+3}] \supset [y_{2i+1}, z_{2i+1}], \qquad i > \frac{k}{2}. \tag{40}$$

Откуда заключаем, что последовательность (31) распадается на две подпоследовательности $[y_{2i}, z_{2i}]$ и $[y_{2i+1}, z_{2i+1}]$, каждая из которых, начиная с некоторого i, состоит из вложенных интервалов и, значит, является сходящейся.

3. Оставшийся случай, когда $f^{n_*}(V_\varepsilon(x))$ „накрывает" только один из концов интервала Q, анализируется аналогично.

III. Рассмотрим теперь случай, когда для любой неподвижной точки реализуется возможность ii).

Тогда в силу п. I данного доказательства на интервале $Q = Q_{f,\varepsilon}(x)$ существует только одна неподвижная точка, которую опять обозначим x_0. Поскольку $f(Q) = Q$, то, во-первых, x_0 — внутренняя точка интервала Q и, во-вторых, f имеет на Q цикл периода 2 (см., например, [1]). Следовательно, на Q имеется не менее трех неподвижных точек отображения f^2, и из того же п. I заключаем, что у отображения f^2 найдется неподвижная точка, для которой реализуется возможность i). Тогда согласно п. II доказательства, если применить его к отображению f^2, существует предел

$$\mathrm{Lt}_{i\to\infty} f^{4i}(V_\varepsilon(x)). \tag{41}$$

Покажем, что существование предела (41) влечет существование предела

$$\mathrm{Lt}_{i\to\infty} f^{2i}(V_\varepsilon(x)). \tag{42}$$

Из (41) следует, что множества

$$E_j = \mathrm{Lt}_{i\to\infty} f^{4i+j}(V_\varepsilon(x)), \qquad j = 0, 1, 2, 3, \tag{43}$$

определены корректно (причем каждое из них либо является интервалом, либо состоит из одной точки) и циклически переходят друг в друга под действием f, а именно,

$$f(E_j) = E_{j+1\,(\mathrm{mod}\,4)}, \qquad j = 0, 1, 2, 3. \tag{44}$$

Кроме того, поскольку интервал Q — верхний топологический предел последовательности (31), множества E_0, E_1, E_2, E_3 являются интервалами и

$$E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3 = Q. \tag{45}$$

При этом всегда выполняется какое-то одно из свойств:

1) $E_0 = E_1 = E_2 = E_3$;

2) $E_0 = E_2 \neq E_1 = E_3$;

3) множества E_0, E_1, E_2, E_3 попарно не содержатся одно в другом.

Отсутствие других вариантов будет доказано, если покажем, что невыполнение свойства 3 влечет выполнение свойства 1 или 2. Введем обозначение $\langle k \rangle = k(\mathrm{mod}\,4)$ и предположим, что

$$E_m \supset E_n, \qquad 0 \leq m, n \leq 3, \qquad m \neq n. \tag{46}$$

Если при этом числа m и n оба четные или оба нечетные, то $n = \langle m+2 \rangle$ и $E_m \supset E_{\langle m+2\rangle}$. Применяя к этому включению отображение f^2, приходим к противоположному включению $E_{\langle m+2\rangle} \supset E_m$. Следовательно, $E_m = E_{\langle m+2\rangle}$, а значит, и $E_{\langle m+1\rangle} = E_{\langle m+3\rangle}$. Таким образом, $E_0 = E_2$ и $E_1 = E_3$ независимо от значения m. Это влечет выполнение свойства 1 или 2. Если же одно из чисел m и n четное, а другое нечетное, то либо $n = \langle m+1 \rangle$, либо $n = \langle m+3 \rangle$. В первом случае из соотношения $E_m \supset E_{\langle m+1\rangle}$ находим $E_m \supset E_{\langle m+1\rangle} \supset E_{\langle m+2\rangle} \supset E_{\langle m+3\rangle} \supset \supset E_m$, и тогда $E_0 = E_1 = E_2 = E_3$, т. е. имеет место свойство 1. Второй случай аналогичным образом приводит к этому же результату.

Возвратимся к доказательству существования предела (42). Интервал Q, как мы знаем, содержит неподвижную точку x_0 отображения f. Ввиду (45) гипотетически возможны лишь две ситуации.

1. Точка x_0 принадлежит внутренности какого-то интервала E_j, $0 \leq j \leq 3$. Однако это, как нетрудно видеть, противоречит (43): в силу ii) окрестности точек $x' \in E_j$, отличных от x_0, не могут пересекаться со всеми, начиная с некоторого i, множествами последовательности $f^{4i+j}(V_\varepsilon(x))$, $i = 0, 1, \ldots$.

2. Точка x_0 — граничная точка нескольких из интервалов E_0, E_1, E_2, E_3 (именно нескольких, так как иначе x_0 была бы граничной точкой интервала Q, что исключено). Это, в частности, означает, что множества E_0, E_1, E_2, E_3 не могут обладать свойством 1. Далее, как из свойства 2, так и из свойства 3 следует, что x_0 является граничной точкой только двух (смежных) интервалов, например, E_m и E_n. Поскольку $f(x_0) = x_0$, хотя бы один из интервалов E_m, E_n переходит в другой при отображении f; пусть, для определенности, $E_n = f(E_m)$, т. е. $E_n = E_{\langle m+1\rangle}$. Здесь опять гипотетически возможны два случая:

a) $f\big(E_{\langle m+1\rangle}\big) = E_m$;

b) $f\big(E_{\langle m+1\rangle}\big) = E_{\langle m+2\rangle} \neq E_m$.

В случае a) имеем $E_m = E_{\langle m+2\rangle}$ и $E_{\langle m+1\rangle} = E_{\langle m+3\rangle}$. Отсюда следует, что $E_0 = E_2$ и $E_1 = E_3$, каково бы ни было $0 \leq m \leq 3$ (откуда в свою очередь вытекает свойство 2, поскольку свойство 1, как отмечено выше, не выполняется). Ввиду (43) первое из этих равенств означает, что

$$\mathrm{Lt}_{i\to\infty} f^{2(2i)}\big(V_\varepsilon(x)\big) \;=\; \mathrm{Lt}_{i\to\infty} f^{2(2i+1)}\big(V_\varepsilon(x)\big),$$

и, следовательно, предел (42) существует.

Рассмотрим случай b). Поскольку $f(x_0) = x_0$, есть две возможности:

интервал $E_{\langle m+2\rangle}$ либо содержит, либо содержится сам в одном из интервалов E_m, $E_{\langle m+1\rangle}$, но это „запрещено" свойством 3;

справедливо равенство $E_{\langle m+2\rangle} = E_{\langle m+1\rangle}$; однако тогда $E_0 = E_1 = E_2 = E_3 = Q$, т. е. имеет место свойство 1, что, как мы знаем, „запрещено" условием $x_0 \in \operatorname{int} Q$.

Таким образом, реализуемым является только случай a). Следовательно, предел (42) существует, а тогда он с необходимостью совпадает с пределом (41).

IV. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует топологический предел $\mathrm{Lt}_{i\to\infty} f^{2i}\big(V_\varepsilon(x)\big)$, который обозначим $Q_{f^2,\varepsilon}(x)$. Из (32) находим

$$\bigcap_{\varepsilon>0} Q_{f^2,\varepsilon}(x) \;=\; Q_{f^2}(x), \tag{47}$$

откуда, в частности, следует, что при любом $\varepsilon > 0$ $Q_{f^2,\varepsilon}(x) \supseteq Q_{f^2}(x)$ и, значит, $f^{2i}\big(V_\varepsilon(x)\big) \cap Q_{f^2}(x) \neq \varnothing$, начиная с некоторого $i > 0$. Предположим, что x — правильная неустойчивая точка, т. е.

$$f^k(x) \in \operatorname{int} Q_f(x) \quad \text{для некоторого} \quad k \ge 0, \tag{48}$$

и докажем (30).

1′. Сразу же заметим следующее. Если $Q_{f^2,\varepsilon_*}(x) = Q_{f^2}(x)$ для какого-нибудь $\varepsilon_* > 0$, то из (47) и вложенности множеств $Q_{f^2,\varepsilon}(x)$ по ε имеем

$$Q_{f^2}(x) \subseteq Q_{f^2,\varepsilon}(x) \subseteq Q_{f^2,\varepsilon_*}(x) \;=\; Q_{f^2}(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon < \varepsilon_*.$$

Следовательно, $Q_{f^2,\varepsilon}(x) = Q_{f^2}(x)$, когда $\varepsilon < \varepsilon_*$, т. е. соотношение (30) справедливо.

2′. Рассмотрим две возможные ситуации в зависимости от того, совпадают или не совпадают множества $Q_{f^2}(x)$ и $Q_f(x)$.

a′. Пусть $Q_{f^2}(x) = Q_f(x)$. Тогда ввиду (48) $f^k(x) \in \operatorname{int} Q_{f^2}(x)$ и в силу непрерывности f найдется $\varepsilon_* > 0$, для которого $f^j\big(V_{\varepsilon_*}(x)\big) \subset Q_{f^2}(x)$ при $j \ge k$. Поэтому $f^{2i}\big(V_{\varepsilon_*}(x)\big) \subset Q_{f^2}(x)$ при $i > 1 + k/2$ и тогда $Q_{f^2,\varepsilon_*}(x) \subseteq Q_{f^2}(x)$. С другой стороны, из (47) имеем $Q_{f^2,\varepsilon_*}(x) \supseteq Q_{f^2}(x)$. Следовательно, $Q_{f^2,\varepsilon_*}(x) = Q_{f^2}(x)$ и в силу п. 1′ приходим к соотношению (30).

b′. Если $Q_{f^2}(x) \neq Q_f(x)$, то согласно следствию из леммы 1 область влияния $Q_f(x)$ является объединением двух (переходящих друг в друга) смежных интервалов $Q_0 = Q_{f^2}(x)$ и $Q_1 = f\big(Q_{f^2}(x)\big)$, общая граничная точка которых неподвижна при отображении f. Обозначим эту неподвижную точку через z. Пусть в (48), для определенности, k нечетное. Тогда ввиду предложения 1 имеем $f^k(x) \in Q_1$ (действительно, если $f^k(x) \in Q_0$, то $f^{k+1}(x) \in Q_1$, и, следовательно, $f^{2j}(x) \in Q_1$ при $j \ge (k+1)/2$; с другой стороны, из предложения 1 вытекает, что все четные итерации $f^{2j}(x)$ точки x принадлежат интервалу Q_0).

Если существует $\varepsilon_* > 0$ такое, что $f^k\big(V_{\varepsilon_*}(x)\big) \subset Q_1$ (такое ε_*, конечно, заведомо найдется, если $f^k(x) \in \operatorname{int} Q_1$), то $f^{k+1}\big(V_{\varepsilon_*}(x)\big) \subseteq Q_0$ и, следовательно, $f^{2i}\big(V_{\varepsilon_*}(x)\big) \subseteq Q_0$ при всех $i \geq (k+1)/2$. Далее доказательство соотношения (30) проводится так же, как в случае a′.

Предположим, что $f^k(V_\varepsilon(x)) \not\subset Q_1$ ни при каком $\varepsilon > 0$. Тогда $f^k(x) = z$ и для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ можно указать $\sigma > 0$ такое, что

$$V_\sigma(z) \subset f^k(V_\varepsilon(x)) \subset Q_f(x).$$

Отсюда (рассуждая, как в п. a′) находим $Q_{f^2}(x) = Q_0 \cup Q_1 = Q_f(x)$, что невозможно в случае b′. Следовательно, наше предположение нереализуемо, что завершает доказательство.

Доказательство теоремы. Область влияния $Q_f(x)$ точки $x \in D(f)$ является (согласно лемме 1) циклом интервалов отображения f. Пусть p — период этого цикла интервалов. Тогда область влияния $Q_{f^p}(x)$ точки x при отображении f^p представляет собой интервал. Из леммы 2, если ее применить к отображению f^p, следует, что топологический предел $\mathrm{Lt}_{i\to\infty} f^{2pi}\big(U_\varepsilon(x)\big)$ существует и является невырожденным интервалом, который обозначим $J_0(\varepsilon)$. Из той же леммы заключаем, что $J_0(\varepsilon) = Q_{f^{2p}}(x)$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, если только $x \in D_p(f)$. Отсюда и из определения $\varepsilon\omega$-множества сразу же следуют оба утверждения теоремы.

1. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с.
2. *Куратовский К.* Топология: В 2 т. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
3. *Федоренко В. В.* Топологический предел траекторий интервала простейших одномерных динамических систем // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 3. – С. 425–430.
4. *Шарковский А. Н., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и динамические системы, порождаемые некоторыми классами краевых задач // Тр. Мат. ин-та РАН. – 2004. – **244**. – С. 281–296.
5. *Block L. S., Coppel W. A.* Dynamics in one dimension // Lect. Notes Math. – 1992. – **1513.** – 247 p.

Получено 17.12.2004