УДК 517.9

О. Б. Чернобай (Нац. акад. ДПС України, Ірпінь)

СПЕКТРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ОПЕРАТОРНОЗНАЧНИХ ЯДЕР ТЕПЛІЦА

A proof of integral representation of the operator-valued Toeplitz kernels is given. This proof is based on the spectral theory of the corresponding differential operator constructed from this kernel and acting in the Hilbert space.

Наводиться доведення інтегрального зображення операторнозначних ядер Тепліца. Це доведення грунтується на спектральній теорії відповідного диференціального оператора, що діє в гільбертовому просторі, побудованого за цим ядром.

У 1979 р. М. Котляр і К. Садоскі [1] запропонували узагальнення додатно означених функцій, які називаються узагальненими ядрами Тепліца. Розвинув цю конструкцію на випадок $l < \infty$ Р. Брузуал [2] за допомогою півгруп операторів стиску.

У 1988 – 1999 рр. опубліковано ряд робіт М. Беккера [3, 4], в яких розглядаються матричні додатно означені ядра Тепліца. Інтегральне зображення для таких ядер отримав М. Беккер за допомогою методу напрямних функціоналів.

Разом з тим Ю. М. Березанський [5, 6] у 1956 р. розробив методику встановлення зображень додатно означених ядер, що ґрунтується на теорії узагальнених власних векторів для самоспряжених операторів. У даній роботі ми розвиваємо теорію узагальнених операторнозначних ядер Тепліца, значеннями яких є обмежені оператори в фіксованому сепарабельному гільбертовому просторі. Їх інтегральне зображення доведено за допомогою згаданого методу і є продовженням роботи [7] (див. також [8]). Ці результати пов'язані також із роботою М. Л. Горбачука [9], в якій встановлюється інтегральне зображення для операторнозначних додатно означених функцій на інтервалі.

Нехай H — повний сепарабельний комплексний гільбертовий простір з інволюцією $H \ni f \mapsto \bar{f} \in H$, скалярним добутком $(\cdot\,,\cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$. $L(H)$ — сукупність усіх обмежених операторів у H. Позначимо $I = (-l, l)$, $0 < l < \infty$, $\tilde{I}$ — його замикання. Розглянемо обмежене ядро

$$I \times I \ni (x, y) \mapsto K(x, y) \in L(H).$$

Припустимо, що ядро $K(x, y)$ є неперервним скрізь на $(I \times I) \setminus ((I \times \{0\}) \cup \cup (\{0\} \times I))$. Множину всіх неперервних векторнозначних функцій $I \ni x \mapsto \mapsto f(x) \in H$ позначимо $C(H, I)$. Вважаємо, що ядро $K(x, y)$ додатно означене, тобто для будь-якої векторнозначної $f(x) \in C(H, \tilde{I})$ виконується нерівність

$$\int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} (K(x, y)f(y), f(x))_H \, dx\, dy \;\geq\; 0.$$

Для простоти вважаємо, що ядро невироджене, тобто для $f(x) \in C(H, \tilde{I})$ рівність

$$\int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} (K(x, y)f(y), f(x))_H \, dx\, dy \;=\; 0$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $f(x) = 0$.

На множині $C(H, \tilde{I})$ введемо скалярний добуток

$$(f, g)_{H_K} \;=\; \int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} (K(x, y)f(y), g(x))_H \, dx\, dy. \tag{1}$$

Поповнивши $C(H, \tilde{I})$ по цьому скалярному добутку, одержимо гільбертовий простір, який позначимо H_K.

Побудуємо квазіядерне оснащення простору H_K:

$$H_{K,-} \supset H_K \supset H_{K,+} \tag{2}$$

таке, щоб $H_{K,-} \hookrightarrow H_K$ було вкладенням Гільберта–Шмідта. Для цього спочатку побудуємо певне квазіядерне оснащення простору $L^2(H, I) = L^2(I) \otimes H$ (де $L^2(I)$ — простір L^2, побудований за мірою Лебега dx на I). Простір $L^2(H, I)$ (див. [10], гл. 1, § 3, та [9]) складається з усіх векторнозначних функцій на I зі значеннями в H таких, що

$$\int_I \|f(x)\|_H^2 \, dx < \infty.$$

Скалярний добуток у просторі $L^2(H, I)$ задається рівністю

$$(f, g)_{L^2(H,I)} = \int_I (f(x), g(x))_H \, dx, \quad f, g \in L^2(H, I).$$

У просторі $L^2(H, I)$ множина $C(H, \tilde{I})$ є щільною.

Лема 1. *Вкладення $L^2(H, I) \hookrightarrow H_K$ є неперервним.*

Доведення. Для функцій $f(x) \in C(H, \tilde{I})$

$$\|f\|_{H_K}^2 = \int_I \int_I (K(x, y)f(y), f(x))_H \, dx\, dy \le \int_I \int_I |(K(x, y)f(y), f(x))_H| \, dx\, dy \le$$

$$\le \int_I \int_I \|K(x, y)\|_{L(H)} \|f(x)\|_H \|f(y)\|_H \, dx\, dy \le \sqrt{\int_I \int_I \|K(x, y)\|_{L(H)} \, dx\, dy}\; \|f\|_{L^2(H,I)},$$

враховуючи обмеженість ядра, маємо

$$\|f\|_{H_K} \le C\|f\|_{L^2(H,I)}. \tag{3}$$

Простір $L^2(H, I)$ є поповненням $C(H, I)$ відносно норми $\|\cdot\|_{L^2(H,I)}$, тому з нерівності (3) випливає, що вкладення $L^2(H, I) \hookrightarrow H_K$ є неперервним, тобто

$$H_K \supset L^2(H, I). \tag{4}$$

Лему доведено.

Візьмемо довільне квазіядерне оснащення простору H просторами H_+, H_- зі збереженням інволюції „–" (тобто її звуження на H_+ буде інволюцією в H_+, тому вона розширюється за неперервністю до інволюції на H_-)

$$H_- \supset H \supset H_+ \tag{5}$$

таке, щоб $H_+ \hookrightarrow H$ було квазіядерним. Відомо, що (див. [11], гл. 14, § 3, та [6]) гільбертове оснащення простору $L^2(I)$ соболевськими просторами

$$W_2^{-1}(I) \supset L^2(I) \supset W_2^1(I) \tag{6}$$

буде квазіядерним. Беручи тензорний добуток ланцюжків (5) і (6), можна стверджувати, що наступне оснащення буде також квазіядерним:

$$W_2^{-1}(I) \otimes H_- \supset L^2(H, I) = L^2(I) \otimes H \supset W_2^1(I) \otimes H_+. \tag{7}$$

Враховуючи ланцюжки (4), (6) та (7), можна записати оснащення простору H_K:

$$\left(W_2^1(I)\otimes H_+\right)' \supset H_K \supset L^2(H,I) \supset W_2^1(I)\otimes H_+. \tag{8}$$

Вкладення $L^2(H,I) \hookrightarrow H_K$ є неперервним, а $W_2^1(I)\otimes H_+ \hookrightarrow L^2(H,I)$ — квазіядерним, тому вкладення $W_2^1(I)\otimes H_+ \hookrightarrow H_K$ — квазіядерне. Позначимо $W_2^1(I)\otimes H_+ = H_{K,+}$, а спряжений до нього простір $\left(W_2^1(I)\otimes H_+\right)' = H_{K,-}$. В результаті отримаємо потрібне квазіядерне оснащення (2) простору H_K:

$$H_{K,-} \supset H_K \supset H_{K,+}.$$

Лема 2. *Нехай*

$$\begin{gathered} H_{K,-} \supset H_K \supset H_{K,+}, \\ W_2^{-1}(I)\otimes H_- \supset L^2(H,I) \supset W_2^1(I)\otimes H_+ = H_{K,+} \end{gathered} \tag{9}$$

— *ланцюжки з рівними позитивними просторами і* $\mathbf{I}_{H_K}$, $\mathbf{I}_{L^2(H,I)}$ — *стандартні унітарні оператори, що відповідають ланцюжкам* (9), *тобто* $\mathbf{I}_{H_K} H_{K,-} = H_{K,+}$; $\mathbf{I}_{L^2(H,I)}\left(W_2^{-1}(I)\otimes H_-\right) = W_2^1(I)\otimes H_+$. *Тоді існує унітарний оператор* $U: H_{K,-} \mapsto$ $\mapsto W_2^{-1}(I)\otimes H_-$, $UH_{K,-} = W_2^{-1}(I)\otimes H_-$, *такий, що*

$$(U\xi, f)_{L^2(H,I)} = (\xi, f)_{H_K}, \quad \xi\in H_{K,-}, \quad f\in H_{K,+}. \tag{10}$$

Доведення. Для доведення рівності (10) покладемо $U = \mathbf{I}^{-1}_{L^2(H,I)}\mathbf{I}_{H_K}$ (див. [12]). Цей оператор є унітарним за побудовою. Тоді для будь-якого $\xi\in H_{K,-}$, $f\in H_{K,+} = W_2^1(I)\otimes H_+$ маємо

$$\begin{gathered} (U\xi, f)_{L^2(H,I)} = \left(\mathbf{I}^{-1}_{L^2(H,I)}\mathbf{I}_{H_K}\xi, f\right)_{L^2(H,I)} = \\ = \left(\mathbf{I}_{H_K}\xi, f\right)_{W_2^1(I)\otimes H_+} = \left(\mathbf{I}_{H_K}\xi, f\right)_{H_{K,+}} = (\xi, f)_{H_K}. \end{gathered}$$

Лему 2 доведено.

Тепер перейдемо до визначення узагальненого операторнозначного ядра Тепліца.

Нехай $I = (-l, l)$, $0 < l < \infty$, $I_1 = I \cap [0,\infty)$, $I_2 = I\cap(-\infty, 0)$. Позначимо

$$I_{\alpha\beta} = \{t = x - y \mid x\in I_\alpha, y\in I_\beta\} \qquad \forall\alpha,\beta = 1,2,$$

тобто $I_{11} = I_{22} = (-l,l)$, $I_{12} = (0, 2l)$, $I_{21} = (-2l, 0)$. Розглянемо обмежене за нормою операторів операторне додатно означене ядро

$$I\times I \ni (x,y) \mapsto K(x,y)\in L(H).$$

Таке ядро називають узагальненим ядром Тепліца, якщо існують чотири неперервні операторні функції $I_{\alpha\beta}\ni t\mapsto k_{\alpha\beta}(t)\in L(H)$ такі, що

$$K(x,y) = K^*(y,x), \qquad (x,y)\in I\times I. \tag{11}$$

Дійсно, завдяки ермітовості скалярного добутку (1) для довільних f, $g\in$ $\in C(H,\tilde I)$ маємо

$$\int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l}(K(x,y)f(y), g(x))_H\,dx\,dy = (f,g)_{H_K} = \overline{(g,f)}_{H_K} =$$

$$= \int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} \overline{(K(x,y)g(y), f(x))_H\, dx\,dy} = \int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} \overline{\big(g(y), K^*(x,y)f(x)\big)_H\, dx\,dy} =$$

$$= \int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} \big(K^*(y,x)f(y), g(x)\big)_H\, dx\,dy.$$

Звідси внаслідок довільності f і g випливає (11). На підставі рівностей (11) та (10) маємо

$$k_{\alpha\alpha}(t) = k^*_{\alpha\alpha}(-t), \quad t \in I_{\alpha\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$k_{12}(t) = k^*_{21}(-t), \quad t \in I_{12}.$$

Для кожного $\alpha, \beta = 1, 2$ звуження $K \restriction (I_\alpha \times I_\beta)$ є неперервною операторною функцією $k_{\alpha\beta}(x-y)$. Звідси випливає, що K є неперервною на $(I\times I)\setminus((I\times \{0\}) \cup (\{0\}\times I))$. Обмеженість K випливає з обмеженості кожної $k_{\alpha\beta}$ на $I_{\alpha\beta}$. Для простоти вважаємо, що операторне ядро K є невиродженим. Таким чином, узагальнене ядро Тепліца буде ядром такого типу, який розглядався на початку пункту.

Нам буде потрібний ще один вираз для K. Позначимо через $\kappa_{\alpha\beta}(x,y)$ характеристичну функцію множини $I_\alpha \times I_\beta$ і побудуємо ядро

$$K_{\alpha\beta}(x,y) = \kappa_{\alpha\beta}(x,y)K(x,y), \quad (x,y)\in I\times I, \quad \alpha,\beta = 1, 2.$$

Тоді

$$K(x,y) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} K_{\alpha\beta}(x,y) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \kappa_{\alpha\beta}(x,y)k_{\alpha\beta}(x-y), \quad (x,y)\in I\times I, \quad \alpha,\beta = 1, 2. \tag{12}$$

Позначимо через $C^\infty_{\text{fin}}(H, I)$ множину всіх фінітних в околах $-l$, 0 та l нескінченно диференційовних вектор-функцій із значеннями в H. Введемо диференціальний вираз

$$C^\infty_{\text{fin}}(H, I) \ni f(x) \mapsto -i\frac{d}{dx}f(x) =: (\mathcal{L}f)(x), \quad \mathcal{L}^+ = \mathcal{L}. \tag{13}$$

Цей вираз у просторі H, побудованому за ядром K, породжує оператор A_0 з щільною областю визначення $D(A_0) = C^\infty_{\text{fin}}(H, I)$.

Лема 3. *Оператор* A_0 *є ермітовим у просторі* H:

$$(A_0 f, g)_H = (f, A_0 g)_{H_K}, \quad f, g \in C^\infty_{\text{fin}}(H, I). \tag{14}$$

Доведення. На підставі співвідношень (1) і (12) маємо

$$(A_0 f, g)_{H_K} = \iint_{I\times I} \big(K(x,y)(A_0 f)(y), g(x)\big)_H\, dx\,dy =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \iint_{I_\alpha\times I_\beta} \big(k_{\alpha\beta}(y-x)(-if')(y), g(x)\big)_H\, dx\,dy.$$

Використовуючи заміну змінної $\langle x, y\rangle \to \langle t, y\rangle$, де $t = y - x$, враховуючи рівність нулю функцій в околах $-l$, 0, l та інтегруючи частинами, легко отримуємо (див. доведення леми 2.1 з [7])

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \iint_{I_\alpha\times I_\beta} \big(k_{\alpha\beta}(y-x)(-if')(y), g(x)\big)_H\, dx\,dy =$$

$$= i \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \iint_{I_\alpha \times I_\beta} \left(k_{\alpha\beta}(y-x)(f)(y),\, g'(x)\right)_H dx\,dy =$$

$$= \iint_{I\times I} \left(K(x,y) f(y),\, A_0 g(x)\right)_H dx\,dy = (f, A_0 g)_{H_K}.$$

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Відображення*

$$f(x) \mapsto \overline{f(-x)} = f^*(x)$$

породжує інволюцію $*$ *у просторі* H *і оператор* A_0 *є дійсним відносно цієї інволюції, тобто*

$$A_0 f^* = (A_0 f)^*, \quad f \in D(A_0).$$

Доведення леми повторює доведення леми 2.2 з [7], і ми його не наводимо.

Оскільки у просторі H є інволюція, відносно якої оператор A_0 є дійсним, то він має однакові дефектні числа, і тому існує його самоспряжене розширення у просторі H. Зафіксуємо деяке самоспряжене розширення A оператора A_0. Побудуємо ланцюжок, з яким оператор A стандартно пов'язаний, тобто побудуємо ланцюжок

$$H_{K,-} \supset H_K \supset H_{K,+} \supset \mathcal{D}, \tag{15}$$

де $\mathcal{D} = C^\infty_{\text{fin}}(H_+, I)$ із такою збіжністю:

$$C^\infty_{\text{fin}}(H_+, I) \ni f_n \mapsto f \in C^\infty_{\text{fin}}(H_+, I),$$

якщо функції f_n рівномірно фінітні і будь-яка похідна $\dfrac{d^k f_n}{dx^k}$ збігається до $\dfrac{d^k f}{dx^k}$ рівномірно в I за нормою простору H_+ (під $C^\infty_{\text{fin}}(H_+, I)$ розуміємо простір, побудований, як і $C^\infty_{\text{fin}}(H, I)$, але з заміною H на H_+).

Легко бачити, що оператор A_0 і ланцюжок (15) стандартно пов'язані. Це означає, що: 1) $\mathcal{D}$ неперервно вкладено в $H_{K,+}$; 2) оператор A_0 неперервно діє з $\mathcal{D}$ в $H_{K,+}$.

Лема 5. *Для ядра має місце зображення*

$$K = \int_{\mathbf{R}^1} \Omega(\lambda)\, d\rho(\lambda), \tag{16}$$

де

$$\Omega(\lambda) \in \left(W_2^{-1}(I) \otimes H_-\right) \otimes \left(W_2^{-1}(I) \otimes H_-\right) \tag{17}$$

— елементарне додатно означене ядро з обмеженою відносно λ *нормою*

$$\|\Omega(\lambda)\|_{(W_2^{-1}(I)\otimes H_-)\otimes(W_2^{-1}(I)\otimes H_-)},$$

ρ *— додатна борелівська міра на* $\mathbf{R}^1$.

Ядро $\Omega(\lambda)$ *визначене для* ρ*-майже кожного* $\lambda \in \mathbf{R}^1$. *Інтеграл збігається за нормою у просторі* $\left(W_2^{-1}(I) \otimes H_-\right) \otimes \left(W_2^{-1}(I) \otimes H_-\right)$. *Додатна означеність ядра* $\Omega(\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}^1$, *означає, що для будь-якого* $u \in H_{K,+}$

$$(\Omega(\lambda),\, u \otimes \bar{u})_{L^2(H,I)\otimes L^2(H,I)} \ge 0.$$

Елементарність ядра означає виконання таких рівностей:

$$\left(\Omega(\lambda),\ v\otimes\overline{A_0u}\right)_{L^2(H,I)\otimes L^2(H,I)} = \left(\Omega(\lambda),\ (A_0v)\otimes\bar{u}\right)_{L^2(H,I)\otimes L^2(H,I)} =$$

$$= \lambda(\Omega(\lambda),\ v\otimes\bar{u}), \quad u, v\in C^\infty_{\text{fin}}(H_+, I). \tag{18}$$

Доведення базується на проекційній спектральній теоремі [6], яка полягає в наступному. *На осі* $\mathbf{R}^1$ *існує додатна скінченна борелівська міра* ρ (*спектральна міра оператора* A), *для якої відповідна рівність Парсеваля запишеться так*:

$$(u, v)_{H_K} = \int_{\mathbf{R}^1}(P(\lambda)u, v)_{H_K}\, d\rho(\lambda), \quad u, v\in H_{K,+} = W_2^1(I)\otimes H_+. \tag{19}$$

Тут $P(\lambda)$ — *визначений для* ρ*-майже кожного* $\lambda\in\mathbf{R}^1$ *оператор, що діє з* $H_{K,+}$ *в* $H_{K,-}$, *причому його норма Гільберта – Шмідта* $\|P(\lambda)\|_{H.S.}\le 1$. *Цей оператор* $P(\lambda)$ — *оператор узагальненого проектування на узагальнений власний підпростір оператора* A *в наступному сенсі*: $\forall u\in H_{K,+},\ v\in \mathcal{D} = C^\infty_{\text{fin}}(H, I)$

$$(P(\lambda)u, A_0v)_{H_K} = \lambda(P(\lambda)u, v)_{H_K}. \tag{20}$$

Оператор $P(\lambda)$ *додатно означений, тобто*

$$(P(\lambda)u, Au)_{H_K} \ge 0, \quad u\in H_{K,+}.$$

Перейдемо до доведення леми. Доведемо спочатку зображення

$$(P(\lambda)u, v)_{H_K} = (\Omega(\lambda), v\otimes\bar{u})_{L^2(H,I)\otimes L^2(H,I)}, \tag{21}$$

де $\Omega(\lambda)\in\left(W_2^{-1}(I)\otimes H_-\right)\otimes\left(W_2^{-1}(I)\otimes H_-\right)$. Нехай I_1 — стандартний оператор I, побудований за ланцюжком (2), тоді

$$(P(\lambda)u, v)_{H_K} = (\mathrm{I}_1 P(\lambda)u, v)_{H_{K,+}}, \quad u, v\in H_{K,+}.$$

Оскільки $P(\lambda)$ — оператор Гільберта – Шмідта, що діє з $H_{K,+}$ в $H_{K,-}$, то $\mathrm{I}_1 P(\lambda)$ — оператор Гільберта – Шмідта у просторі $H_{K,+}$. Відповідно до леми 2.1 гл. 1 [6] можна записати

$$(P(\lambda)u, v)_{H_K} = (\mathrm{I}_1 P(\lambda)u, v)_{H_{K,+}} = \left(S_\lambda, v\otimes\bar{u}\right)_{H_{K,+}\otimes H_{K,+}}, \quad u, v\in H_{K,+},$$

де ядро S_λ оператора $\mathrm{I}_1 P(\lambda)$ входить в $H_{K,+}\otimes H_{K,+}$. Для нього у відповідності з теоремою про ядро (теорема 6.3 та зауваження 6.2 [11] (гл. 14, §6)) існує неперервна білінійна форма

$$H_{K,+}\otimes H_{K,+}\ni(u, v)\mapsto a_\lambda(u, v) = \left(S_\lambda, v\otimes\bar{u}\right)_{H_{K,+}\otimes H_{K,+}}.$$

Побудуємо тензорний добуток ланцюжка (7) самого на себе:

$$\left(W_2^{-1}(I)\otimes H_-\right)\otimes\left(W_2^{-1}(I)\otimes H_-\right)\supset L^2(H, I)\otimes L^2(H, I)\supset$$

$$\supset\left(W_2^{1}(I)\otimes H_+\right)\otimes\left(W_2^{1}(I)\otimes H_+\right) = H_{K,+}\otimes H_{K,+}.$$

Нехай I_2 — оператор I, пов'язаний із цим ланцюжком. Поклавши $\Omega(\lambda) = \mathrm{I}_2^{-1}S_\lambda$, одержимо

$$(P(\lambda)u, v)_{H_K} = \left(S_\lambda, v\otimes\bar{u}\right)_{H_{K,+}\otimes H_{K,+}} = a_\lambda(u, v) =$$

$$= (\Omega(\lambda), v\otimes\bar{u})_{L^2(H,I)\otimes L^2(H,I)}. \tag{22}$$

Рівність (21) доведено.

Покажемо, що ядро $\Omega(\lambda)$ є елементарним. Використовуючи рівності (21) і (20), для будь-яких $u, v \in C^{\infty}_{\text{fin}}(H_+, I)$ одержуємо

$$(\Omega(\lambda),\ (A_0 v) \otimes \bar{u})_{L^2(H,I) \otimes L^2(H,I)} = (P(\lambda) u,\ A_0 v)_{H_K} =$$
$$= \lambda (P(\lambda) u, v)_{H_K} = \lambda (\Omega(\lambda), v \otimes \bar{u})_{L^2(H,I) \otimes L^2(H,I)}.$$

Використовуючи (22), ермітовість форми a_λ та доведену рівність, для будь-яких $u, v \in C^{\infty}_{\text{fin}}(H_+, I)$ маємо

$$(\Omega(\lambda),\ v \otimes \overline{A_0 u})_{L^2(H,I) \otimes L^2(H,I)} = a_\lambda(A_0 u, v) = \overline{a_\lambda(v, A_0 u)} =$$
$$= \overline{(\Omega(\lambda),\ (A_0 u) \otimes \bar{v})}_{L^2(H,I) \otimes L^2(H,I)} = \lambda \overline{(\Omega(\lambda), u \otimes \bar{v})}_{L^2(H,I) \otimes L^2(H,I)} =$$
$$= \lambda (\Omega(\lambda), v \otimes \bar{u})_{L^2(H,I) \otimes L^2(H,I)}$$

(ми використали ермітовість ядра $\Omega(\lambda)$, що випливає з його додатної означеності). Отже, рівності першого і другого виразів із (18) третьому доведено, тобто (18) доведено.

Оцінка норми $\| \Omega(\lambda) \|_{(W_2^{-1}(I) \otimes H_-) \otimes (W_2^{-1}(I) \otimes H_-)}$ випливає з оцінки $\| P(\lambda) \| \leq$ ≤ 1. Дійсно, оскільки $\Omega(\lambda) = \mathrm{I}_2^{-1} S_\lambda$, то

$$\| \Omega(\lambda) \|_{(W_2^{-1}(I) \otimes H_-) \otimes (W_2^{-1}(I) \otimes H_-)} = \| S_\lambda \|_{(W_2^{1}(I) \otimes H_+) \otimes (W_2^{1}(I) \otimes H_+)} =$$
$$= \| S_\lambda \|_{H_{K,+} \otimes H_{K,+}} = \| \mathrm{I}_1 P(\lambda) \|_{H_{K,+}} = \| P(\lambda) \|_{H.S.} \leq 1.$$

З додатної означеності оператора $P(\lambda)$ і рівності (22) випливає додатна означеність ядра $\Omega(\lambda)$.

З рівності Парсеваля (19), зображення (21) і рівності (1) для будь-яких $u, v \in$ $\in H_{K,+}$ маємо

$$(K, v \otimes \bar{u})_{L^2(H,I) \otimes L^2(H,I)} = (u, v)_{H_K} = \int_{-\infty}^{\infty} (\Omega(\lambda), v \otimes \bar{u})_{L^2(H,I) \otimes L^2(H,I)} \, d\rho(\lambda).$$

Таким чином, зображення (16) доведено.

Нам будуть потрібні ще деякі додаткові побудови, пов'язані з розширенням ланцюжка (7). Розглянемо гільбертове квазіядерне оснащення простору $L^2(I)$ соболевськими просторами

$$W_{2,0}^{-1}(I) \supset L^2(I) \supset W_{2,0}^{1}(I),$$

де $W_{2,0}^{1}(I)$ — підпростір соболевського простору $W_2^1(I)$, що складається з вектор-функцій $u \in W_2^1(I)$, для яких $u(0) = 0$. Будуючи відповідні тензорні добутки і порівнюючи з (7), отримуємо квазіядерне оснащення

$$W_{2,0}^{-1}(H_-, I) = W_{2,0}^{-1}(I) \otimes H_- \supset W_2^{-1}(I) \otimes H_- \supset L^2(H, I) =$$
$$= L^2(I) \otimes H \supset W_2^1(I) \otimes H_+ \supset W_{2,0}^1(I) \otimes H_+ = W_{2,0}^1(H_+, I). \tag{23}$$

На підставі (17) і (23) нам далі буде зручно розуміти $\Omega(\lambda)$ як елемент тензорного квадрата найлівішого з просторів (23).

Перейдемо до формулювання та доведення основного результату статті.

Теорема 1. *Для кожного узагальненого операторнозначного ядра Тепліца має місце інтегральне зображення*

$$K(x,y) = \int_{\mathbf{R}^1} e^{i\lambda(x-y)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \kappa_\alpha(x)\kappa_\beta(y)\,d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda), \qquad (x,y)\in I\otimes I. \tag{24}$$

Тут κ_α — *характеристична функція інтервалу* I_α, *а* $(\sigma_{\alpha\beta}(\Delta))_{\alpha,\beta=1}^2$, $\sigma_{\alpha\beta}(\Delta)\in \in L(H)$ — *матрична операторнозначна борелівська міра на* $\mathbf{R}^1$, *додатно означена.*

Навпаки, кожне ядро, для якого має місце зображення (24), *є узагальненим операторнозначним ядром Тепліца.*

Зробимо деякі пояснення стосовно матричної міри $\sigma(\Delta) = (\sigma_{\alpha\beta}(\Delta))_{\alpha,\beta=1}^2$, заданої на борелівських множинах $\Delta\subset\mathbf{R}^1$. Для кожних α,β $\Delta\mapsto\sigma_{\alpha\beta}(\Delta)\in L(H)$ є скінченною операторною мірою (див., наприклад, [6]), при цьому оператор $\sigma(\Delta)$ у просторі $H\oplus H$ має бути невід'ємним. Тобто нехай $\varphi = \langle\varphi_1,\varphi_2\rangle \in \in H\oplus H$. Тоді для будь-яких Δ і $\varphi\in H\oplus H$

$$0 \le (\sigma(\Delta)\varphi,\varphi)_{H\oplus H} =$$
$$= (\langle\sigma_{11}(\Delta)\varphi_1+\sigma_{12}(\Delta)\varphi_2,\ \sigma_{21}(\Delta)\varphi_1+\sigma_{22}(\Delta)\varphi_2\rangle,\ \langle\varphi_1,\varphi_2\rangle)_{H\oplus H} =$$
$$= (\sigma_{11}(\Delta)\varphi_1+\sigma_{12}(\Delta)\varphi_2,\ \varphi_1) + (\sigma_{21}(\Delta)\varphi_1+\sigma_{22}(\Delta)\varphi_2,\ \varphi_2). \tag{25}$$

Виведемо з (25) деякі корисні співвідношення. Покладемо в (25) $\varphi = =\langle\lambda_1\varphi_1,\lambda_2\varphi_2\rangle$, де $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{C}^1$ — довільні, а $\varphi_1,\varphi_2\in H$ — фіксовані. В результаті отримаємо

$$0 \le (\sigma_{11}(\Delta)\varphi_1,\varphi_1)\lambda_1\overline{\lambda_1} + (\sigma_{12}(\Delta)\varphi_2,\varphi_1)\lambda_2\overline{\lambda_1} +$$
$$+ (\sigma_{21}(\Delta)\varphi_1,\varphi_2)\lambda_1\overline{\lambda_2} + (\sigma_{22}(\Delta)\varphi_2,\varphi_2)\lambda_2\overline{\lambda_2},$$

тобто числова матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^2$, де $a_{\alpha\beta} = \left(\sigma_{\alpha\beta}(\Delta)\varphi_\beta,\varphi_\alpha\right)_H$, є невід'ємною, а це означає її ермітовість $\left(a_{\alpha\beta}=\overline{a_{\beta\alpha}}\right)$ і виконання нерівностей $a_{11}\ge 0$, $a_{11}a_{22} - -|a_{12}|^2\ge 0$, $a_{22}\ge 0$. В якості φ_1,φ_2 можуть бути довільні вектори з H, тому записані співвідношення означають, що для будь-якого Δ

$$\sigma_{11}(\Delta)\ge 0, \quad \sigma_{22}(\Delta)\ge 0, \quad \sigma_{12}(\Delta) = (\sigma_{21}(\Delta))^*,$$
$$\left|(\sigma_{12}(\Delta)\varphi_2,\varphi_1)_H\right|^2 \le (\sigma_{11}(\Delta)\varphi_1,\varphi_1)_H(\sigma_{22}(\Delta)\varphi_2,\varphi_2)_H, \quad \varphi_1,\varphi_2\in H. \tag{26}$$

Зокрема, з (26) випливає, що $\sigma_{11}(\Delta)$ і $\sigma_{22}(\Delta)$ — невід'ємні операторні міри.

Перейдемо до доведення теореми. Спочатку встановимо її нетривіальну частину — продовження (24).

Позначимо через $H_{\alpha,+}$ підпростір простору $W_{2,0}^1(H_+,I)$, що складається з вектор-функцій, які дорівнюють нулю на $I\setminus I_\alpha$, і нехай

$$H_{\alpha\beta,+} = H_{\alpha,+}\otimes H_{\beta,+} \subset W_{2,0}^1(H_+,I)\otimes W_{2,0}^1(H_+,I), \qquad \alpha,\beta = 1,2.$$

Зауважимо, що для векторної функції $u\in W_{2,0}^1(H_+,I)$ функція $u(x)\kappa_\alpha(x)\in \in H_{\alpha,+}$. Нехай

$$H_{\alpha,-}\supset L^2(H,I_\alpha)\supset H_{\alpha,+}, \qquad \alpha = 1,2, \tag{27}$$

— відповідне оснащення простору $L^2(H,I_\alpha)$ та $H_{\alpha,+}$. Зафіксуємо $\lambda\in\mathbf{R}^1$ і позначимо через $\Omega_{\alpha\beta}(\lambda)$ звуження $\Omega(\lambda)$ (як елемента з тензорного квадрата лівого простору в (23) на $H_{\alpha\beta,+}$). Іншими словами, $\Omega_{\alpha\beta}(\lambda)$ задається рівністю

$$\left(\Omega_{\alpha\beta}(\lambda),\, v_\alpha \otimes \overline{u_\beta}\right)_{L^2(H,I_\alpha)\otimes L^2(H,I_\beta)} =$$

$$= \left(\Omega(\lambda),\, v_\alpha \otimes \overline{u_\beta}\right)_{L^2(H,I)\otimes L^2(H,I)}, \quad v_\alpha \in H_{\alpha,+}, \quad u_\beta \in H_{\beta,+}, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \tag{28}$$

Таким чином,

$$\Omega_{\alpha\beta}(\lambda) \in H_{\alpha,-} \otimes H_{\beta,-} = \left(W_{2,0}^{-1}(I_\alpha) \otimes H_-\right) \otimes \left(W_{2,0}^{-1}(I_\beta) \otimes H_-\right), \ \alpha, \beta = 1, 2. \tag{29}$$

Очевидно, справджується рівність

$$(\Omega(\lambda),\, v \otimes \bar{u})_{L^2(H,I)\otimes L^2(H,I)} =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \left(\Omega_{\alpha\beta}(\lambda),\, \kappa_\alpha(x) v(x) \otimes \kappa_\alpha(y) \overline{u(y)}\right)_{L^2(H,I_\alpha)\otimes L^2(H,I_\beta)}, \quad u, v \in W_{2,0}^1(H_+, I). \tag{30}$$

Виразимо $\Omega_{\alpha\beta}(\lambda)$ $(\alpha, \beta = 1, 2,\ \lambda \in \mathbf{R}^1$ — фіксовані$)$ через $e^{i\lambda x}$. Для цього зведемо питання до відповідних результатів з роботи [7] (теорема 1). Насамперед зазначимо, що для $l \in H_+$ і $u_\alpha(x) \in W_{2,0}^1(I_\alpha)$ добуток $u_\alpha(x) l = u_\alpha(x) \otimes l$ належить до $W_{2,0}^1(H_+, I_\alpha)$, причому, змінюючи довільно l і $u_\alpha(x)$, отримуємо вектори, щільні у просторі $W_{2,0}^1(H_+, I_\alpha)$.

Зафіксуємо $l, m \in H_+$ і введемо ядро

$$\Omega_{\alpha\beta}^{lm}(\lambda) = \left(\Omega_{\alpha\beta}(\lambda),\, (\,\cdot \otimes l) \otimes \overline{(\,\cdot \otimes m)}\right)_{L^2(H,I_\alpha)\otimes L^2(H,I_\beta)} \in W_{2,0}^{-1}(I_\alpha) \otimes W_{2,0}^{-1}(I_\beta) \tag{31}$$

формулою

$$\forall u_\beta(y) \in W_{2,0}^1(I_\beta) \qquad \forall v_\alpha(x) \in W_{2,0}^1(I_\alpha):$$

$$\left(\Omega_{\alpha\beta}^{lm}(\lambda),\, v_\alpha \otimes \overline{u_\beta}\right)_{L^2(I_\alpha)\otimes L^2(I_\beta)} = \left(\Omega_{\alpha\beta}(\lambda),\, (v_\alpha(x) l) \otimes \overline{\left(u_\beta(y) m\right)}\right)_{L^2(H,I_\alpha)\otimes L^2(H,I_\beta)}. \tag{32}$$

Коректність такого введення випливає з деяких загальних фактів (див., наприклад, [13, с. 1611]) і включення (29).

З елементарності ядра $\Omega(\lambda)$, тобто рівностей (18), випливають такі рівності для $\Omega_{\alpha\beta}^{lm}(\lambda)$:

$$\left(\Omega_{\alpha\beta}^{lm}(\lambda),\, v_\alpha(x) \otimes \overline{i u'_\beta(y)}\right)_{L^2(I_\alpha)\otimes {}^2(I_\beta)} = \left(\Omega_{\alpha\beta}^{lm}(\lambda),\, -i v'_\alpha(x) \otimes \overline{u'_\beta(y)}\right)_{L^2(I_\alpha)\otimes L^2(I_\beta)} =$$

$$= \lambda \left(\Omega_{\alpha\beta}^{lm}(\lambda),\, v_\alpha(x) \otimes \overline{u_\beta(y)}\right)_{L^2(I_\alpha)\otimes L^2(I_\beta)}, \tag{33}$$

де v_α, u_β — нескінченно диференційовні фінітні функції на I_α і I_β відповідно, продовжені нулем, якщо потрібно, на I.

Справді, згідно з (33), (28), (13) і (18) маємо

$$\left(\Omega_{\alpha\beta}^{lm}(\lambda),\, v_\alpha(x) \otimes \overline{i u'_\beta(y)}\right)_{L^2(I_\alpha)\otimes L^2(I_\beta)} =$$

$$= \left(\Omega_{\alpha\beta}^{lm}(\lambda),\, (v_\alpha(x) l) \otimes \overline{-\, i u'_\beta(y)}\right)_{L^2(H,I_\alpha)\otimes L^2(H,I_\beta)} =$$

$$= \left(\Omega(\lambda),\, (v_\alpha(x) l) \otimes \overline{A_0\left(u_\beta(y) m\right)}\right)_{L^2(H,I)\otimes L^2(H,I)} =$$

$$= \lambda \left(\Omega(\lambda),\, (v_\alpha(x) l) \otimes \overline{u_\beta(y) m}\right)_{L^2(H,I)\otimes L^2(H,I)} =$$

$$= \lambda \left(\Omega_{\alpha\beta}^{lm}(\lambda),\, v_\alpha(x) \otimes \overline{u_\beta(y)}\right)_{L^2(I_\alpha)\otimes L^2(I_\beta)}.$$

Таким чином, доведено рівність першого і третього виразів з (33). Аналогічно доводиться і друга рівність з (33).

Співвідношення (33) аналогічні рівностям (3.5) з [7] і відповідним рівностям цієї роботи для $\Omega_{\alpha\beta}(\lambda)$ (див. [7, с. 1466 – 1468]). Але тепер роль $\Omega_{\alpha\beta}(\lambda)$ відіграє $\Omega^{lm}_{\alpha\beta}(\lambda)$. На підставі теореми про узагальнені розв'язки рівняння $-i\dfrac{du}{dx} = \lambda u$ [11], як і в [7], робимо висновок, що має місце зображення (3.23) вказаної роботи, лише матриця $\tau(\lambda)$ залежить від l, m:

$$\Omega^{lm}_{\alpha\beta}(\lambda) \equiv \Omega^{lm}_{\alpha\beta}(\lambda; x, y) = \tau^{lm}_{\alpha\beta}(\lambda)e^{i\lambda(x-y)}, \quad x \in \tilde{I}_\alpha, \quad y \in \tilde{I}_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \tag{34}$$

З (31), (32) випливає, що $\Omega^{lm}_{\alpha\beta}(\lambda)$ залежить від $l \in H_+$ ($m \in H_+$) лінійно (антилінійно). Залежність є неперервною: при фіксованих $v_\alpha \in W^1_{2,0}(I_\alpha)$, $u_\beta \in W^1_{2,0}(I_\beta)$ лівий вираз в (34) оцінюється зверху через $\|l\|_{H_+}$, $\|m\|_{H_+}$ завдяки обмеженості $\|\Omega(\lambda)\|_{(W_2^{-1}(I)\otimes H_-)\otimes(W_2^{-1}(I)\otimes H_-)}$.

Зображення (34) показує, що така залежність від l, m буде і для $\tau^{lm}_{\alpha\beta}(\lambda)$, тобто існує $\tau_{\alpha\beta}(\lambda) \in H_- \otimes H_-$ таке, що

$$\left(\tau_{\alpha\beta}(\lambda), l \otimes \overline{m}\right)_{H\otimes H} = \tau^{lm}_{\alpha\beta}(\lambda), \qquad l, m \in H_+, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad \lambda \in \mathbf{R}^1. \tag{35}$$

Рівності (34) і (35) означають, що

$$\Omega_{\alpha\beta}(\lambda) = \tau_{\alpha\beta}(\lambda)e^{i\lambda(x-y)}, \quad \tau_{\alpha\beta}(\lambda) \in H_- \otimes H_-, \quad \left\|\tau_{\alpha\beta}(\lambda)\right\|_{H_-\otimes H_-} \le C \tag{36}$$

(потрібно взяти до уваги, що вектори типу $u_\alpha(x)l$, $l \in H_+$, $u_\alpha(x) \in W^1_{2,0}(I_\alpha)$ є щільними в $W^1_{2,0}(H_+, I_\alpha)$, а також скористатися оцінкою $\|\Omega(\lambda)\|_{(W_2^{-1}(I)\otimes H_-)\otimes(W_2^{-1}(I)\otimes H_-)}$ з леми 5).

З урахуванням рівностей (36), (34) доведено, що $\Omega_{\alpha\beta}(\lambda)$ насправді є векторнозначне зі значеннями в $H_- \otimes H_-$ ядро $\Omega_{\alpha\beta}(\lambda; x, y)$ вигляду

$$\Omega_{\alpha\beta}(\lambda) = \Omega_{\alpha\beta}(\lambda; x, y) =$$

$$= \tau_{\alpha\beta}(\lambda)e^{i\lambda(x-y)} \in H_- \otimes H_-, \quad x \in \tilde{I}_\alpha, \quad y \in \tilde{I}_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \tag{37}$$

Зображення (37) дає можливість для будь-яких $v_\alpha \in H_{\alpha,+}$ і $u_\beta \in H_{\beta,+}$ записати

$$\left(\Omega_{\alpha\beta}(\lambda), v_\alpha \otimes \overline{u_\beta}\right)_{L^2(H,I_\alpha)\otimes L^2(H,I_\beta)} =$$

$$= \iint\limits_{I_\alpha\times I_\beta} e^{i\lambda(x-y)}\left(\tau_{\alpha\beta}(\lambda), v_\alpha(x) \otimes \overline{u_\beta(y)}\right)_{H\otimes H} dx\,dy. \tag{38}$$

Нехай $u, v \in W^1_{2,0}(H_+, I)$, тоді з (30) та (38) отримуємо

$$(\Omega(\lambda), v \otimes \overline{u})_{L^2(H,I)\otimes L^2(H,I)} =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \iint\limits_{I_\alpha\times I_\beta} e^{i\lambda(x-y)}\left(\tau_{\alpha\beta}(\lambda), v(x) \otimes \overline{u(y)}\right)_{H\otimes H} dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{I\times I} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} e^{i\lambda(x-y)}\kappa_\alpha(x)\kappa_\beta(y)\left(\tau_{\alpha\beta}(\lambda), v(x) \otimes \overline{u(y)}\right)\right)_{H\otimes H} dx\,dy. \tag{39}$$

Довільність функцій $u, v \in W^1_{2,0}(H_+, I)$ та (39) показує, що і $\Omega(\lambda)$ є векторнозначним ядром $\Omega(\lambda; x, y)$ зі значеннями в $H_- \otimes H_-$, при цьому

$$\Omega(\lambda; x, y) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} e^{i\lambda(x-y)} \kappa_\alpha(x) \kappa_\beta(y) \tau_{\alpha\beta}(\lambda), \quad x, y \in I. \tag{40}$$

Підставляючи цей вираз в (16), маємо

$$K(x, y) = \int_{\mathbf{R}^1} \Omega(\lambda: x, y) d\rho(\lambda) = \int_{\mathbf{R}^1} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} e^{i\lambda(x-y)} \kappa_\alpha(x) \kappa_\beta(y) \tau_{\alpha\beta}(\lambda) \right) d\rho(\lambda). \tag{41}$$

Рівність (41) потрібно розуміти в наступному сенсі. Для кожних $x, y \in I$ згідно з теоремою про ядро [11] оператор $K(x, y)$ можна розуміти як вектор $K(x, y) \in \in H_- \otimes H_-$ (ланцюжок (5) є квазіядерним). Вираз під знаком інтеграла у правій частині (41) також згідно з (37) належить до $H_- \otimes H_-$, таким буде й інтеграл. Таким чином, (41) — це рівність для будь-яких $x, y \in I$ двох векторів з $H_- \otimes \otimes H_-$.

Перейдемо до встановлення рівності (24) з (41). Для цього насамперед потрібно ідентифікувати $\tau_{\alpha\beta}(\lambda) d\rho(\lambda)$ як операторну міру. Для будь-яких $\alpha, \beta = 1, 2$ і $\lambda \in \mathbf{R}^1$ будемо розглядати $\tau_{\alpha\beta}(\lambda)$ як ядро неперервного оператора $c_{\alpha\beta}(\lambda): H_+ \to H_-$. Справді, це можливо, оскільки для будь-яких $l, m \in H_+$ за означенням маємо

$$\begin{gathered} \left(c_{\alpha\beta}(\lambda) m, l\right)_H = \left(\tau_{\alpha\beta}(\lambda), l \otimes \overline{m}\right)_{H \otimes H}, \\ \left| \left(\tau_{\alpha\beta}(\lambda), l \otimes \overline{m}\right)_{H \otimes H} \right| \le \left\| \tau_{\alpha\beta}(\lambda) \right\|_{H_- \otimes H_-} \|l\|_{H_+} \|m\|_{H_+} \le c \|l\|_{H_+} \|m\|_{H_+} \end{gathered} \tag{42}$$

(ми скористалися нерівністю з (36)). Нагадаємо, що оператор $c: H_+ \to H_-$ називається невід'ємним, якщо $(cl, l) \ge 0$, $l \in H_+$.

Більш того, операторна матриця $c(\lambda) = (c_{\alpha\beta}(\lambda))^2_{\alpha,\beta=1}$ також породжує невід'ємний обмежений оператор $c(\lambda): H_+ \oplus H_+ \to H_- \oplus H_-$ (невід'ємність потрібно розуміти у вказаному вище сенсі з заміною H на $H \oplus H$). Справді, тепер на основі (42), (39) і додатної означеності ядра $\Omega(\lambda)$ для будь-якого $u \in W^1_{2,0}(H_+, I)$ отримуємо

$$\begin{aligned} 0 \le (\Omega(\lambda), u \otimes \overline{u})_{L^2(H,I) \otimes L^2(H,I)} &= \\ = \iint_{I \times I} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} e^{i\lambda(x-y)} \kappa_\alpha(x) \kappa_\beta(y) \left(\tau_{\alpha\beta}(\lambda), u(x) \otimes \overline{u(y)}\right)_{H \otimes H} \right) dx\, dy &= \\ = \iint_{I \times I} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} e^{i\lambda(x-y)} \kappa_\alpha(x) \kappa_\beta(y) \left(c_{\alpha\beta}(\lambda) u(y), u(x)\right)_H \right) dx\, dy &= \\ = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \left(c_{\alpha\beta}(\lambda) \left(\int_{I_\beta} e^{-i\lambda y} u(y)\, dy \right), \left(\int_{I_\alpha} e^{-i\lambda x} u(x)\, dx \right) \right)_H &. \end{aligned}$$

Ця нерівність означає невід'ємність матриці $c(\lambda)$, оскільки вектор

$$\left\langle \int_{I_1} e^{-i\lambda x} u(x)\, dx, \int_{I_2} e^{-i\lambda x} u(x)\, dx \right\rangle \in H_+ \oplus H_+$$

$(\lambda \in \mathbf{R}^1$ фіксоване$)$ набуває довільного значення з простору $H_+ \oplus H_+$ завдяки довільності функції u.

Таким чином, для $c(\lambda)$ можна записати співвідношення типу (26) (вони легко виводяться, подібно до (26)):

$$c_{11}(\lambda) \geq 0, \quad c_{22}(\lambda) \geq 0, \quad c_{12}(\lambda) = (c_{21}(\lambda))^*,$$
$$\left|(c_{12}(\lambda)\varphi_2, \varphi_1)_H\right|^2 \leq (c_{11}(\lambda)\varphi_1, \varphi_1)_H (c_{22}(\lambda)\varphi_2, \varphi_2)_H, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in H_+, \ \forall \lambda \in \mathbf{R}^1. \tag{43}$$

Для борелівських $\Delta \subset \mathbf{R}^1$ введемо невід'ємну операторну міру $\sigma(\Delta)$: $H_+ \oplus H_+ \to H_- \oplus H_-$, поклавши

$$\sigma(\Delta) = \int_\Delta c(\lambda)\, d\rho(\lambda) = (\sigma_{\alpha\beta}(\Delta))^2_{\alpha,\beta=1}, \quad \sigma_{\alpha\beta}(\Delta) = \int_\Delta c_{\alpha\beta}(\lambda)\, d\rho(\lambda). \tag{44}$$

У термінах цієї міри зображення (41) перепишеться так:

$$K(x, y) = \int_{\mathbf{R}^1} e^{i\lambda(x-y)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \kappa_\alpha(x)\kappa_\beta(y)\, d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda), \quad (x, y) \in I \times I, \tag{45}$$

причому $K(x, y)$ тут розуміється як оператор з $L(H)$.

Таким чином, зображення (24) майже доведено, залишилось лише переконатись, що міру $\sigma(\Delta)$ з (44) можна розуміти як операторну зі значеннями в $L(H \oplus H)$.

Для цього досить пересвідчитись, що кожний оператор $\sigma_{\alpha\beta}(\Delta)$ можна за неперервністю розширити до оператора, що діє з H в H (а не з H_+ в H_-). Це буде мати місце, якщо для будь-яких $\varphi_1, \varphi_2 \in H_+$ і деякого $c > 0$ ми доведемо нерівність

$$\left|\left(\sigma_{\alpha\beta}(\Delta)\varphi_1, \varphi_2\right)_H\right| \leq c\|\varphi_1\|_H \|\varphi_2\|_H. \tag{46}$$

Спочатку доведемо (46) у випадку $\alpha = \beta = 1$; при цьому внаслідок невід'ємності оператора $\sigma_{11}(\Delta)$ досить розглянути випадок $\varphi_2 = \varphi_1$. Візьмемо в (45) фіксоване $x = y \in I_1$, тоді

$$(\sigma_{11}(\Delta)\varphi_1, \varphi_1)_H = \int_\Delta d(\sigma_{11}(\lambda)\varphi_1, \varphi_1)_H \leq \int_{\mathbf{R}^1} d(\sigma_{11}(\lambda)\varphi_1, \varphi_1)_H =$$
$$= (K(x, x)\varphi_1, \varphi_1)_H \leq \|K(x, x)\|_{L(H)} \|\varphi_1\|^2_H, \quad \varphi_1 \in H_+. \tag{47}$$

Аналогічно до (47) доводиться нерівність $(\sigma_{22}(\Delta)\varphi_2, \varphi_2)_H \leq \|K(x, x)\|_{L(H)} \times$ $\times \|\varphi_2\|^2_H$, $\varphi_2 \in H_+$. Ці дві нерівності й остання оцінка з (43) приводять до (46) при $\alpha, \beta = 1, 2$ або 2, 1.

Таким чином, оскільки для будь-яких $x, y \in I$ оператор $K(x, y)$ є неперервним в H, то доведено, що значення міри $\sigma(\Delta)$ лежить в $L(H \oplus H)$. Зображення (24) повністю доведено.

Для завершення доведення теореми залишилось пересвідчитись, що кожне ядро K вигляду (24) є узагальненим операторнозначним ядром Тепліца. Інтеграл (24) є оператором з $L(H)$, оскільки такими будуть міри $\sigma_{\alpha\beta}(\Delta)$. Очевидно, $\|K(x, y)\|_{L(H)}$, $(x, y) \in I \times I$, і функція $(I \times I)\setminus((I \times 0) \cup (0 \times I)) \ni (x, y) \mapsto$ $\mapsto K(x, y) \in L(H)$ є неперервною.

Нам залишилось пересвідчитись у додатній означеності цього ядра. Нехай $f(x) \in C(H, \tilde{I})$. Згідно з (24) маємо

$$\iint\limits_{I\times I} (K(x,y)f(y), f(x))_H \, dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{I\times I} \left(\left(\int\limits_{\mathbf{R}^1} e^{i\lambda(x-y)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \kappa_\alpha(x)\kappa_\beta(y)\, d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \right) f(y),\ f(x) \right)_H dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^1} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} d\left(\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \left(\int\limits_{I_\beta} e^{-i\lambda y} f(y)\, dy \right), \left(\int\limits_{I_\alpha} e^{-i\lambda x} f(x)\, dx \right) \right)_H dx\,dy \ \geq\ 0. \qquad (48)$$

Ми скористалися тим, що міра $\sigma(\Delta) = (\sigma_{\alpha\beta}(\Delta))_{\alpha,\beta=1}^2 \in L(H \oplus H)$ є невід'ємною і тому для кожного λ вираз під знаком останнього інтеграла в (48) невід'ємний.

1. *Cotlar M., Sadosky C.* On the Helson – Szego theorem and related class of modified Toeplitz kernels // Proc. Symp. Pure Math. – 1979. – **35**, Pt 1. – P. 383 – 407.
2. *Bruzual R.* Local semigroups of contractions and some applications to Fourier representation theorems // Integr. Equat. and Operator Theory. – 1987. – **10**. – P. 780 – 801.
3. *Беккер М. Б.* Об одном интегральном представлении эрмитовоположительных матричных ядер специальной структуры // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 5. – С. 626 – 628.
4. *Bekker M.* On the extension problem for continuous positive definite generalized Toeplitz kernels definite on a finite interval // Integr. Equat. and Operator Theory. – 1999. – **35**, № 4. – P. 379 – 397.
5. *Березанский Ю. М.* Обобщение теоремы Бохнера на разложения по собственным функциям уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. – 1956. – **110**, № 6. – С. 893 – 896.
6. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
7. *Berezansky Yu. M., Chernobai O. B.* On the theory of generalized Toeplitz kernels // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1458 – 1472.
8. *Чернобай О. Б.* Про спектральну теорію узагальнених ядер Тепліца // Там же. – 2003. – **55**, № 6. – С. 850 – 857.
9. *Горбачук М. Л.* О представлении положительно определенных операторных функций // Там же. – 1965. – **17**, № 2. – С. 29 – 46.
10. *Горбачук М. Л., Горбачук В. И.* Граничные задачи для дифференциальных операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1964. – 284 с.
11. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Выща шк., 1999. – 600 с.
12. *Berezansky Yu. M.* Some generalizations of the classical moment problem // Integr. Equat. and Operator Theory. – 2002. – P. 255 – 289.
13. *Березанський Ю. М., Теско В. А.* Простори основних і узагальнених функцій, пов'язані з узагальненим зсувом // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 12. – С. 1587 – 1657.

Одержано 21.10.2004,
після доопрацювання — 25.03.2005