УДК 519.21

Д. Г. Коренівський (Ін-т математики НАН України, Київ)

ДЕСТАБІЛІЗУЮЧИЙ ЕФЕКТ ПАРАМЕТРИЧНИХ ВИПАДКОВИХ ЗБУРЕНЬ ТИПУ БІЛОГО ШУМУ В ДЕЯКИХ КВАЗІЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ТА ДИСКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ *

We establish the destabilizing action (in the sense of decrease of a reserve of the asymptotic stability in the square mean) of parameter stochastic perturbations of white-noise type in quasilinear (automatic Lur'e – Postnikov control with nonlinear feedback) continuous and discrete dynamical systems. In this case, we use the stochastic Lyapunov functions as linear combinations of the types "the quadratic form with phase coordinates plus an integral of the nonlinearity" (continuous systems) and "the quadratic form with phase coordinates plus an integral sum for the nonlinearity" (discrete systems). We also use the matrix algebraic Sylvester equations associated with the Lyapunov functions of this form.

Виявлено дестабілізуючий (у розумінні зменшення запасу асимптотичної стійкості в середньому квадратичному) ефект параметричних випадкових збурень типу білого шуму в квазілінійних (автоматичного регулювання Лур'є – Постнікова з нелінійним зворотним зв'язком) неперервних і дискретних динамічних системах. При цьому використано стохастичні функції Ляпунова у вигляді лінійних комбінацій „квадратична форма фазових координат плюс інтеграл від нелінійності" (неперервні системи) і „квадратична форма фазових координат плюс інтегральна сума для нелінійності" (дискретні системи) та матричні алгебраїчні рівняння Сільвестра, що супроводжують стохастичні функції Ляпунова такого вигляду.

Вступ. У роботах автора [1, 2] дестабілізуючий (у розумінні зменшення запасу асимптотичної стійкості в середньому квадратичному) ефект параметричних збурень стохастичним процесом типу білого шуму виявлено, з допомогою стохастичних функцій Ляпунова і матричних алгебраїчних рівнянь Сільвестра, в динамічних системах, математичними моделями яких є векторно-матричні системи лінійних диференціальних і різницевих рівнянь. *Параметричними* називають збурення, що діють на систему через її параметри (коефіцієнти).

У цій роботі продовжується пошук класів диференціальних і різницевих рівнянь, в яких подібні стохастичні збурення їх коефіцієнтів приводять до аналогічного ефекту. Зокрема, ставиться задача про вплив параметричних випадкових збурень типу білого шуму на асимптотичну стійкість у середньому квадратичному деяких квазілінійних неперервних і дискретних динамічних систем, математичними моделями яких є відповідно системи квазілінійних (автоматичного регулювання Лур'є – Постнікова) стохастичних диференціальних та різницевих рівнянь типу Іто. *Квазілінійною* називають динамічну систему, в математичній моделі якої (тобто в системі нелінійних диференціальних чи різницевих рівнянь) із нелінійності окремо виділено лінійну частину. Далі розглядається випадок, коли стохастичним процесом типу білого шуму збурюються коефіцієнти лінійної частини. Показано, що для таких систем ефект параметричних випадкових збурень — тільки дестабілізуючий. У стійкій динамічній системі ефект проявляється у зменшенні запасу її асимптотичної стійкості в середному квадратичному (аж до повної втрати системою властивості стійкості) при збільшенні інтенсивності параметричного білого шуму. При дослідженні використано стохастичні функції Ляпунова у вигляді лінійних комбінацій „квадратична форма фазових координат плюс інтеграл від нелінійності" (неперервні системи) і „квадратична форма фазових координат плюс інтегральна сума для нелінійності" (дискретні системи) та матричні алгебраїчні рівняння Сільвестра, що супроводжують функції Ляпунова такого вигляду. Сформульована проблема ніким раніше не розроблялась і вперше постала в даному дослідженні.

---

* Частково підтримано науково-дослідною роботою (№0105U001108) „Математичні методи дослідження динаміки та стійкості неоднорідних об'єктів механіки, гідромеханіки та гемодинаміки" (програма „Математичне моделювання фізичних і механічних процесів у сильно неоднорідних середовищах").

1. Неперервні стохастичні динамічні системи Лур'є – Постнікова. Поряд із детермінованою автономною векторно-матричною системою автоматичного регулювання Лур'є – Постнікова зі сталими коефіцієнтами, нелінійним диференційовним, що лежить у гурвіцевому куті $[0, h]$ координатної площини (σ, φ), зворотним зв'язком $\varphi(\sigma)$ та відповідними початковими умовами

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + g\varphi(\sigma), \quad 0 \le t_0 \le t < \infty, \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

$\sigma = l^T g$, стала матриця $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, сталі вектори $g, l \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^1$, $0 \le \varphi(\sigma)/\sigma \le h$, $h = \mathrm{const} \in (0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$, $d\varphi/d\sigma \ge 0$, t — час, розглядається система Лур'є – Постнікова зі збуреною випадковим процесом $B\xi(t)$ матрицею A

$$dx(t) = [A + B\xi(t)]x(t)dt + g\varphi(\sigma)dt, \tag{2}$$

де стала матриця $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\xi(t)$ — випадковий процес типу гауссового стаціонарного скалярного стандартного білого шуму, тобто процес із статистичними характеристиками $\mathrm{M}\{\xi(t)\} = 0$, $\mathrm{M}\{\xi(t)\xi(t_1)\} = \delta(t - t_1)$, $t_1 \le t$. Тут M — символ математичного сподівання, δ — дельта-функція Дірака. Матрицю B називають матрицею інтенсивності параметричних збурень.

Запишемо систему (2) у вигляді еквівалентної системи стохастичних диференціальних рівнянь Іто

$$dx(t) = [A\,dt + B\,dw(t)]x(t) + g\varphi(\sigma)dt, \tag{3}$$

де $dw(t) \equiv \xi(t)dt$, $w(t)$ — стандартний вінерівський процес (так що $\mathrm{M}\{dw(t)\} = 0$, $\mathrm{M}\{dw(t)\}^2 = dt$, $\mathrm{M}\{dw(t)dw(t_1),\ t \ne t_1\} = 0$).

Система рівнянь (3) є системою зі змінними коефіцієнтами.

Поставимо питання: якщо детермінована система (1) при будь-якій нелінійній диференційовній функції $\varphi(\sigma)$, що лежить у гурвіцевому куті $[0, h]$ координатної площини (σ, φ), асимптотично стійка (іншими словами, якщо система (1) абсолютно стійка за нелінійністю $\varphi(\sigma)$), то який характер впливу стохастичного матричного додатку $B\,dw(t)$ на асимптотичну стійкість у середньому квадратичному системи (3)?

Покажемо, що вплив стохастичних збурень $B\,dw(t)$ в системі (3) односторонній — тільки на зменшення запасу її асимптотичної стійкості в середньому квадратичному при збільшенні норми матриці B (аж до повної втрати системою властивості асимптотичної стійкості при подальшому збільшенні норми матриці B), тобто вплив лише дестабілізуючий.

Для цього нам необхідна деяка інформація. В монографії автора [3] для квазілінійної системи стохастичних рівнянь Іто (3) з допомогою стохастичної функції Ляпунова у вигляді лінійної комбінації „квадратична форма фазових координат плюс інтеграл від нелінійності" одержано коефіцієнтні умови абсолютної стійкості в середньому квадратичному її розв'язків у формі такого твердження.

Теорема 1 [3] (теорема 8.1). *Стан рівноваги* ($x(t) = 0$) *динамічної системи* (3) *асимптотично стійкий у середньому квадратичному тоді, коли виконуються наступні умови*:

1) *матриці* A *і* $A + hgl^T$ *гурвіцеві*, $l^T g > 0$;

2) *існує додатно означений розв'язок* H ($H = H^T > 0$) *матричного рівняння Сільвестра*

$$A^T H + HA + B^T HB = -E, \tag{4}$$

де E — *одинична матриця*;

3) *виконується матрична нерівність*

$$\begin{bmatrix} -E & Hg + \kappa A^T l/2 \\ g^T H + \kappa l^T A/2 & \kappa l^T g \end{bmatrix} \leq 0,$$

в якій довільне від'ємне число κ *з інтервалу*

$$-\frac{2}{hl^T H^{-1} l} < \kappa < 0$$

вибирається якнайближче до своєї нижньої межі $\left(\kappa \downarrow -\dfrac{2}{hl^T H^{-1} l}\right)$.

Теорема 1 доводиться з допомогою стохастичної функції Ляпунова $V(x(t))$ вигляду лінійної комбінації додатно означеної квадратичної форми фазових координат і інтеграла від нелінійності,

$$V(x(t)) = x^T(t) H x(t) + \kappa \int_0^{\sigma} \varphi(y) dy.$$

Умови абсолютної (за нелінійністю) стійкості в середньому квадратичному в теоремі 1 мають асимптотичний характер через асимптотичне правило вибору числа κ.

Умова 1 теореми 1 означає асимптотичну стійкість за Ляпуновим замкнутої детермінованої квазілінійної системи (1) на лінійній граничній характеристиці кута $[0, h]$, умова 2 — асимптотичну стійкість за Ляпуновим у середньому квадратичному відповідної лінійної $(\varphi \equiv 0)$ стохастичної системи. При відсутності випадкових збурень $(B = 0)$ з теореми 1 випливає критерій абсолютної (за нелінійністю) стійкості для детермінованої системи автоматичного регулювання (1).

Із теореми 1 видно, що вона має хоча і конкретний, коефіцієнтний, але чисто теоретичний зміст: як в теоремі, так і в книзі [3] відсутній аналіз математичних співвідношень з точки зору характеру впливу стохастичних збурень. Проте, як автор здогадався дещо пізніше після опублікування своєї книги [3], з теореми 1 (зокрема, з умов 2 і 3 теореми) випливає суттєвий фізичний висновок: в асимптотично стійкій детермінованій системі (1) параметричні стохастичні збурення типу білого шуму мають виключно односторонній вплив — тільки на зменшення запасу асимптотичної стійкості в середньому квадратичному динамічної системи (3).

Отже, розглянемо більш детально умови теореми 1. Звернемо увагу на те, що матриця стохастичного збурення B входить лише в умову 2 теореми 1 — вимогу існування додатно означеного розв'язку $H > 0$ матричного рівняння Сільвестра. Перш за все, якщо детермінована система диференціальних рівнянь (1) (вона відповідає випадку $B = 0$ в (3)) асимптотично стійка (необхідною умовою є гурвіцевість матриці A), то в лівій частині матричної рівності (4) при $H > 0$ матриця $A^T H + HA$ від'ємно означена, а матриця $B^T HB$ завжди невід'ємно означена, більш того, за невиродженої матриці B матриця $B^T HB$ завжди додатно означена. Таким чином, у випадку гурвіцевої матриці A можливий клас матриць B з такою нормою, що $A^T H + HA + B^T HB \geq 0$. Звідси випливає, що не існує матриці $H > 0$ — розв'язку матричного рівняння Сільвестра (4); іншими словами, стохастичні збурення $B\, dw(t)$ матриці $A\, dt$ в системі (3) мають односторонній вплив — тільки на зменшення запасу асимптотичної стійкості в середньому квадратичному, аж до повної втрати системою властивості стійкості при подальшому збільшенні норми матриці B.

З іншого боку, якщо детермінована система диференціальних рівнянь (1) не є асимптотично стійкою, тобто якщо матриця A не гурвіцева, причому дійсні частини всіх її власних значень $\lambda_j(A)$ додатні, $\operatorname{Re}\lambda_j(A) > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то з (4) випливає, що при будь-якій матриці $H > 0$ матрична рівність $A^T H + HA + B^T HB = -E$ неможлива. Це означає, що таку нестійку детерміновану диференціальну систему (1) неможливо зробити стійкою в середньому квадратичному при збуренні її коефіцієнтів (тобто збуренні матриці Adt) стохастичним матричним додатком $B\,dw(t)$.

2. Дискретні стохастичні динамічні системи Лур'є – Постнікова. Поряд з детермінованою автономною дискретною векторно-матричною системою автоматичного регулювання Лур'є – Постнікова зі сталими коефіцієнтами і нелінійним диференційовним, що лежить у гурвіцевому куті $[0, h]$ координатної площини (σ, φ), зворотним зв'язком $\varphi(\sigma)$ та відповідними початковими умовами

$$x(k+1) = Ax(k) + g\varphi(\sigma), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad x(0) = x_0, \tag{5}$$

$\sigma = l^T x(k)$, стала матриця $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, сталі вектори $g, l \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^1$, $0 \le \varphi(\sigma)/\sigma \le h$, $h = \text{const} \in (0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$, $d\varphi/d\sigma \ge 0$, розглядається система Лур'є – Постнікова зі збуреними дискретним білим шумом $\xi(k)$ коефіцієнтами лінійної частини (тобто зі збуреною матричним додатком $B\xi(k)$ матрицею A)

$$x(k+1) = [A + B\xi(k)]x(k) + g\varphi(\sigma), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

де стала матриця $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, а стохастичний процес типу скалярного стандартного дискретного білого шуму $\xi(k)$, $\xi(k) = w(k+1) - w(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, має, згідно з означенням, статистичні характеристики $\mathrm{M}\{\xi(k)\} = 0$, $\mathrm{M}\{\xi(k)\}^2 = 1$, $\mathrm{M}\{\xi(k)\xi(j), k \ne j\} = 0$.

Система рівнянь (6) є системою зі змінними коефіцієнтами.

Поставимо питання: якщо детермінована динамічна система (5) при будь-якій нелінійній диференційовній функції $\varphi(\sigma)$, що лежить у гурвіцевому куті $[0, h]$ координатної площини (σ, φ), асимптотично стійка (іншими словами, якщо система (5) абсолютно стійка за нелінійністю $\varphi(\sigma)$), то який характер впливу стохастичного матричного додатку $B\xi(k)$ на асимптотичну стійкість у середньому квадратичному системи (6)?

Покажемо, що вплив стохастичних збурень $B\xi(k)$ в системі (6) односторонній — тільки на зменшення запасу її асимптотичної стійкості в середньому квадратичному при збільшенні норми матриці B (аж до повної втрати системою властивості асимптотичної стійкості при подальшому збільшенні норми матриці B), тобто вплив лише дестабілізуючий.

Для цього нам необхідна деяка інформація, як це було і у випадку неперервних систем. У монографії автора [3] для системи квазілінійних стохастичних різницевих рівнянь типу Іто (6) з допомогою стохастичної функції Ляпунова у вигляді лінійної комбінації „квадратична форма фазових координат плюс інтегральна сума для нелінійності" одержано коефіцієнтні умови абсолютної (за нелінійністю) стійкості в середньому квадратичному її розв'язків у формі такого твердження.

Теорема 2 [3] (теорема 8.2). *Стан рівноваги* $(x(k) = 0)$ *динамічної системи* (6) *асимптотично стійкий у середньому квадратичному тоді, коли виконуються наступні умови*:

1) *матриці* A *і* $A + hgl^T$ *збіжні* (*тобто модулі всіх їх власних значень менші за одиницю*), $l^T g > 0$;

2) *існує додатно означений розв'язок* H $(H = H^T > 0)$ *матричного рівняння Сільвестра*

$$H - A^T HA - B^T HB = E; \tag{7}$$

3) *виконується матрична нерівність*

$$\begin{bmatrix} -E & Hg + \kappa A^T l/2 \\ g^T H + \kappa l^T A/2 & \kappa l^T g \end{bmatrix} \le 0,$$

в якій довільне від'ємне число κ *з інтервалу*

$$-\frac{2}{hl^T H^{-1} l} < \kappa < 0$$

вибирається якнайближче до своєї нижньої межі $\left(\kappa \downarrow -\dfrac{2}{hl^T H^{-1} l}\right)$.

Теорема 2 доводиться з допомогою стохастичної функції Ляпунова $V(x(k))$ вигляду лінійної комбінації додатно означеної квадратичної форми фазових координат і інтегральної суми для нелінійності,

$$V(x(k)) = x^T(k) Hx(k) +$$

$$+ \kappa \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2}\big[\varphi(\sigma(x(i))) + \varphi(\sigma(x(i-1)))\big]\big[\sigma(x(i)) + \sigma(x(i-1))\big].$$

Умови абсолютної (за нелінійністю) стійкості в середньому квадратичному в теоремі 2 мають асимптотичний вигляд через асимптотичне правило вибору числа κ.

Умова 1 теореми 2 означає асимптотичну стійкість за Ляпуновим замкнутої детермінованої дискретної квазілінійної системи (5) на лінійній граничній характеристиці кута $[0, h]$, умова 2 — асимптотичну стійкість за Ляпуновим у середньому квадратичному відповідної лінійної $(\varphi \equiv 0)$ стохастичної системи. При відсутності випадкових збурень $(B = 0)$ з теореми 2 випливає критерій абсолютної (за нелінійністю) стійкості для детермінованої системи автоматичного регулювання (5).

Отже, розглянемо більш детально умови теореми 2. Звернемо увагу на те, що матриця стохастичного збурення B входить лише в умову 2 теореми 2 — умову існування додатно означеного розв'язку $H > 0$ матричного рівняння Сільвестра. Перш за все, якщо детермінована система різницевих рівнянь (5) (вона відповідає випадку $B = 0$ в (6)) асимптотично стійка (необхідною умовою цього є збіжність матриці A), то в лівій частині матричної рівності (7) при $H > 0$ матриця $H - A^T HA$ додатно означена. Отже, у випадку збіжної матриці A можливий клас матриць B з такою нормою, що $H - A^T HA - B^T HB \le 0$. Звідси випливає, що не існує матриці $H > 0$ — розв'язку матричного рівняння Сільвестра (7); іншими словами, стохастичні збурення $B\xi(k)$ матриці A в системі (6) мають односторонню дію — лише на зменшення запасу асимптотичної стійкості в середньому квадратичному, аж до повної втрати системою властивості стійкості при подальшому збільшенні норми матриці B.

З іншого боку, якщо детермінована система різницевих рівнянь (5) не є асимптотично стійкою, тобто якщо матриця A не збіжна, причому модулі всіх її власних значень більші за одиницю, $\left|\lambda_j(A)\right| > 1$, $j = 1, 2, \dots, n$, то з (7) випливає, що при будь-якій матриці $H > 0$ матрична рівність $H - A^T HA - B^T HB = E$ неможлива; це означає, що таку нестійку детерміновану дискретну систему (5) неможливо зробити асимптотично стійкою в середньому квадратичному при збуренні її коефіцієнтів (тобто збуренні матриці A) стохастичним матричним додатком $B\xi(k)$.

1. *Кореневский Д. Г.* Эффект параметрических случайных возмущений типа белого шума в линейных дискретных динамических системах только дестабилизирующий // Докл. РАН. – 2001. – **378**, № 3. – С. 310–313.
2. *Коренівський Д. Г.* Про неможливість стабілізації розв'язків системи лінійних детермінованих різницевих рівнянь збуреннями її коефіцієнтів стохастичними процесами типу „білого шуму" // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 2. – С. 285–288.
3. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.

Одержано 28.02.2005