УДК 517.937

В. А. Літовченко (Чернівец. нац. ун-т)

ЗАДАЧА КОШІ З ОПЕРАТОРОМ РІССА ДРОБОВОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

On the class of generalized functions of a finite order, we establish the correct solvability of the Cauchy problem for a pseudodifferentional equation whose symbols are homogeneous functions of order $\gamma > 0$. We prove a theorem on the localization property of a solution of this problem.

У класі узагальнених функцій скінченного порядку встановлено коректну розв'язність задачі Коші для псевдодиференціального рівняння, символи якого є однорідними функціями виміру $\gamma > 0$, та доведено теорему про властивість локалізації розв'язку цієї задачі.

Вступ. Дану роботу присвячено вивченню питання про коректну розв'язність задачі Коші для рівняння

$$\partial_t U(t, x) + \sum_{j=1}^{m} b_j(t)\big(A_{\gamma_j} U\big)(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Omega \equiv (0, T] \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

у класі початкових узагальнених функцій скінченного порядку та встановлення принципу локалізації її розв'язку (тут A_{γ_j} — псевдодиференціальні оператори (ПДО) з однорідними символами виміру $\gamma_j > 0$, не залежними від t, x (типу оператора Рісса дробового диференціювання), $b_j(\cdot)$ — інтегровні на $[0, T]$ невід'ємні функції, певним чином узгоджені з A_{γ_j} так, щоб рівняння (1) було параболічного типу).

Слід зазначити, що перші дослідження задачі Коші для рівняння (1) у випадку, коли $b_j(\cdot) \equiv 0$, $j = \overline{2, m}$, $b_1(\cdot) \equiv \text{const}$, а $\gamma_1 > 1$, були здійснені С. Д. Ейдельманом та Я. М. Дрінем на початку 80-х років минулого століття [1]. Згодом вони розглядали рівняння більш загального вигляду й одержали ряд важливих результатів, пов'язаних із розв'язністю задачі Коші у класах гельдерових функцій, шаудерівськими оцінками та властивістю стабілізації розв'язку [2 – 4]. М. В. Федорюк знайшов точну асимптотичну поведінку фундаментального розв'язку в околі нескінченно віддаленої точки, яка виявилася не експоненціальною, як для диференціальних рівнянь, а степеневою [5]. У роботах [6, 7] встановлено розв'язність задачі Коші для рівняння (1) при $b_j(\cdot) \equiv \text{const}$, $j = \overline{1, m}$, та принцип локалізації у класі початкових узагальнених функцій скінченного порядку (зокрема, коректна розв'язність у випадку фінітних узагальнених функцій).

Доречно зауважити, що методика дослідження властивостей фундаментального розв'язку задачі Коші, яка використовувалась у зазначених працях, своєю специфікою накладає обмеження на порядок однорідності $\gamma = \max_{j=\overline{1, m}} \gamma_j$ головного символу рівняння: $\gamma > 1$.

Застосовуючи новий підхід до дослідження властивостей параметрикса задачі Коші для рівняння (1) з символами ПДО певної гладкості поза початком координат, залежними від часу й просторової змінної (який базується на використанні елементів теорії узагальнених функцій та гармонічного аналізу), і трактуючи при цьому ПДО як гіперсингулярний інтеграл (досі в (1) розглядалися лише класичні ПДО з негладкими символами, тобто ПДО, дія яких у просторах достатньо „хороших" функцій описується завдяки операторам Фур'є), А. Н. Кочубей уперше одержав точні оцінки параметрикса у випадку, коли розмірність простору більша за одиницю і $\gamma \geq 1$, та довів існування розв'язку задачі Коші у класі неперервних обмежених функцій [8].

У даній роботі, розвиваючи ідею А. Н. Кочубея, реалізовану ним при дослідженні параметрикса [8], вивчаються властивості фундаментального розв’язку задачі Коші для рівняння (1) при $\gamma > 0$. Встановлюється коректна розв’язність цієї задачі у класі узагальнених початкових функцій — згортувачів у просторі нескінченно диференційовних функцій, які разом зі своїми похідними спадають на нескінченності степеневим чином [6]. Також доводиться теорема про властивість локалізації розв’язку зазначеної задачі.

1. Необхідні відомості. Нехай $\mathbb{R}^n$ — n-вимірний евклідів простір, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — його елементи, (x, y) — скалярний добуток у $\mathbb{R}^n$, γ — фіксоване додатне число, $\hat{\gamma} = n + \gamma$, $M_\alpha(\cdot) = (1 + \|\cdot\|)^\alpha$,

$$\Phi \overset{\text{df}}{=} \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \forall p \in \mathbb{Z}_+ : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{k=0}^{p} M_{\hat{\gamma}+k}(x) \sum_{|\alpha|=k} \left| D_x^\alpha \varphi(x) \right| \right\} < +\infty \right\},$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \qquad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,$$

де $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — сукупність усіх нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^n$ функцій.

Уведемо в Φ зліченну систему норм

$$\|\varphi\|_p = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{k=0}^{p} M_{\hat{\gamma}+k}(x) \sum_{|\alpha|=k} \left| D_x^\alpha \varphi(x) \right| \right\}, \qquad \varphi \in \Phi, \qquad p \in \mathbb{Z}_+,$$

і позначимо через Φ_p поповнення простору Φ за p-ю нормою. Тоді $\Phi = \bigcap_{p=0}^{\infty} \Phi_p$.

Зрозуміло, що $D(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset \Phi$, причому ці вкладення є неперервними і щільними (тут $D(\mathbb{R}^n)$ — простір фінітних нескінченно диференційовних функцій на $\mathbb{R}^n$, а $S(\mathbb{R}^n)$ — відомий простір Л. Шварца [9]). Виявляється [6], що Φ — повний, досконалий, зліченно-нормований простір з неперервними операціями зсуву та диференціювання, причому операція зсуву у просторі Φ є нескінченно диференційовною, а послідовність функцій $\{\varphi_\nu,\ \nu \geq 1\} \subset \Phi$ збігається до φ з Φ при $\nu \to +\infty$ у просторі Φ лише тоді, коли вона: 1) обмежена в Φ; 2) правильно збігається в Φ, тобто для кожного $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ послідовність $\left\{ D_x^\alpha(\varphi_\nu - \varphi),\ \nu \geq 1 \right\}$ збігається до нуля рівномірно на довільному компакті $K \subset \mathbb{R}^n$.

Символом Φ' позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю. При цьому $\Phi' = \left(\lim_{p \to +\infty} \operatorname{pr} \Phi_p\right)' = \lim_{p \to +\infty} \operatorname{ind} \Phi'_p$. Отже, якщо $f \in \Phi'$, то $f \in \Phi'_p$ при деякому $p \in \mathbb{Z}_+$, тобто кожна узагальнена функція f з Φ' має скінченний порядок. Простір Φ' є повним.

Через W позначимо сукупність усіх узагальнених функцій з Φ', які мають наступну властивість. Для будь-якої функції $f \in W$ існують $p \in \mathbb{Z}_+$, а також звичайні функції $f_q(\cdot)$, де $q \in \mathbb{Z}_+^n$ і $|q| \leq p$, такі, що

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}_+^n \quad \exists\, c_q(k) > 0 : \left| f_q(x) \right| \leq c_q(k)(1 + \|x\|)^{-|k|}$$

майже скрізь на $\mathbb{R}^n$, причому

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{|q| \leq p} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f_q(x)}\, D^q \varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in \Phi$$

(тут $\bar{z}$ означає комплексну спряженість до z).

Зі структури фінітної узагальненої функції f (див. [9, с. 145]) одержуємо, що $f \in W$. Однак у класі W містяться не лише фінітні функціонали, оскільки кожен елемент з $S(\mathbb{R}^n)$ є регулярним функціоналом з W (тобто правильним є таке вкладення: $S(\mathbb{R}^n) \subset W$).

Безпосередньо, виходячи з властивостей елементів класу W, приходимо до наступного твердження.

Теорема 1. *Нехай* $f \in W$. *Тоді*: 1) f *— згортувач у просторі* Φ; 2) $F[f](\cdot)$ *— неперервна функція на* $\mathbb{R}^n$ *така, що на нескінченності зростає не швидше многочлена фіксованого степеня*; 3) $\forall\, \varphi \in \Phi: F[f * \varphi](\xi) = \overline{F[f](\xi)} = F[\varphi](\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, *де* F *— пряме перетворення Фур'є.*

Далі, нехай $\mathfrak{R}$ — сукупність усіх елементів f з Φ' таких, що $F[f]$ — мультиплікатор у просторі $F[\Phi]$. Тоді на підставі теореми 1 з [10] кожен елемент f з $\mathfrak{R}$ є згортувачем у просторі Φ, причому

$$F[f * \varphi](\xi) = \overline{F[f](\xi)} F[\varphi](\xi), \qquad \varphi \in \Phi, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Крім цього для кожних f з $\mathfrak{R}$ та φ з Φ, а також для всіх $x \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність

$$(f * \varphi)(x) = \langle f, \varphi(x - \cdot) \rangle$$

(оскільки вона виконується для всіх f з Φ' [6]).

Зазначимо, що згідно з твердженнями 1, 3 теореми 1 перетворення Фур'є функції f з W є мультиплікатором у просторі Φ. Отже, $W \subset \mathfrak{R}$.

Означення. *Функція* a_α, $\alpha > 0$, *належить до класу* Λ, *якщо* $a_\alpha : \mathbb{R}^n \to \to [0, +\infty)$ *є однорідною порядку* α, *яка*: 1) *нескінченно диференційовна на* $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$; 2) $\forall\, k \in \mathbb{Z}_+^n \ \ \exists\, c_k > 0: \left| D_x^k a_\alpha(x) \right| \le c_k \| x \|^{\alpha - |k|}$, $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$; 3) $\exists\, \delta_1 > 0 \ \ \exists\, \delta_2 \ge 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n : a_\alpha(x) \ge \delta_1 \| x \|^\alpha + \delta_2$.

За функцією a_α з класу Λ у просторі Φ побудуємо оператор A_α:

$$(A_\alpha \varphi)(\cdot) = F^{-1}[\, a_\alpha(\xi) F[\varphi](\xi)\,](\cdot) \qquad (\forall\, \varphi \in \Phi),$$

де F^{-1} — обернене перетворення Фур'є. Цей оператор є лінійним і неперервним у Φ, оскільки такими є оператори Фур'є [6]. У випадку, коли $a_\alpha(\cdot) = = \| \cdot \|^\alpha$, оператор A_α збігається з відомим оператором Рісса дробового диференціювання [11] (з приводу продовження A_α на ширші класи функцій та вираження його через гіперсингулярний інтеграл див. [6, 8]).

Далі, нехай m — фіксоване натуральне число, $\{\gamma_j\}_{j=1}^m \subset (0, +\infty)$, $a_{\gamma_j} \in \Lambda$, $j = \overline{1, m}$; $T \in (0, +\infty]$; $b_j(\cdot)$, $j = \overline{1, m}$, — інтегровні на $[0, T]$ невід'ємні функції; λ — множина значень j з $\{1, \dots, m\}$, для яких $b_j(t) \not\equiv 0$, $t \in [0, T]$; $\gamma_0 \overset{\text{df}}{=} \overset{\text{df}}{=} \gamma_{j_0} = \min_{j \in \lambda} \{\gamma_j\}$, $\gamma \overset{\text{df}}{=} \gamma_{j_1} = \max_{j \in \lambda} \{\gamma_j\}$. Вважатимемо також, що:

1) $\forall\, j \in \{j_0; j_1\} \ \ \exists\, p_j > 0 \ \ \exists\, c_1 > 0 \ \ \exists\, c_2 > 0 \ \ \forall\, t \in [0, T]: c_1 t^{p_j - 1} \le b_j(t) \le \le c_2 t^{p_j - 1}$ (надалі $p = p_{j_1}$, $p_0 = p_{j_0}$);

2) $\forall\, j \in \lambda \backslash \{j_0; j_1\} \ \ \exists\, p_j > 0$, $\dfrac{p\gamma_j}{\gamma} \le p_j \le \dfrac{p_0 \gamma_j}{\gamma_0}$, $\exists\, c > 0 \ \ \forall\, t \in [0, T]: b_j(t) \le \le c t^{p_j - 1}$.

Мають місце допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай* $h_k(\cdot)$ — *функція з розкладу* $e^{-t} = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-t)^l}{l!} + t^k h_k(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. *Тоді* $h_k(\cdot)$ — *нескінченно диференційовна на* $\mathbb{R}$, *причому*

$$\forall\, \delta > 0 \quad \forall\, r \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists\, c > 0 \quad \forall\, t \in [-\delta, \delta]: \left| D_t^r h_k(t) \right| < c. \tag{2}$$

Доведення. З розкладу функції e^{-t} у ряд Маклорена одержуємо

$$h_k(t) = (-1)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-t)^l}{(k+l)!}.$$

Степеневий ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-t)^l}{(k+l)!}$$

збігається абсолютно з радіусом збіжності $R = \infty$, тому $h_k(\cdot)$ — нескінченно диференційовна функція на $\mathbb{R}$:

$$D_t^r h_k(t) = (-1)^{k+r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+r)!(-t)^j}{j!(k+r+j)!}, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad r \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Умова (2) одержується безпосередньо з (3).

Лему доведено.

Лема 2. *Нехай*

$$P(t,x) = \sum_{j=1}^{m} \left(\int_0^t b_j(\tau) d\tau \right) a_{\gamma_j}(x),$$

$$G(t,x) = F^{-1}[\exp\{-P(t,\xi)\}](t,x), \qquad (t,x) \in \Omega.$$

Тоді для всіх $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$, $(t,x) \in \Omega$

$$\left| D_x^\nu G(t,x) \right| \le c_1 t^{\beta\gamma_0} \left(t^\beta + \| x \| \right)^{-(n+\gamma_0+|\nu|)}, \tag{4}$$

$$\left| D_t D_x^\nu G(t,x) \right| \le c_2 t^{\beta\gamma_0 - 1} \left(t^\beta + \| x \| \right)^{-(n+\gamma_0+|\nu|)}, \tag{5}$$

де c_1, c_2 — *додатні сталі, не залежні від* t *і* x, *а*

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{p}{\gamma}, & 0 < t < 1, \\[2mm] \dfrac{p_0}{\gamma_0}, & t \ge 1. \end{cases}$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли $t \in (0, 1)$. В інтегралі

$$D_x^\nu G(t,x) = \frac{i^{|\nu|}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \xi^\nu \exp\{-P(t,\xi) + i(x,\xi)\} d\xi, \qquad \xi^\nu \stackrel{\text{df}}{=} \prod_{j=1}^{n} \xi_j^{\nu_j},$$

виконаємо заміну $\xi_j = t^{-p/\gamma} \zeta_j$, $j = \overline{1,n}$. Поклавши $z = t^{-p/\gamma} x$, одержимо

$$D_x^\nu G(t,x) = \frac{i^{|\nu|}}{(2\pi)^n} t^{-p(n+|\nu|)/\gamma}\, \Psi_\nu(t,z),$$

де

$$\Psi_\nu(t,z) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \zeta^\nu \exp\{-P_1(t,\zeta) + i(z,\zeta)\} d\zeta,$$

$$P_1(t,\zeta) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{j=1}^{m}\left(\int_0^t b_j(\tau)d\tau\right)t^{-p\gamma_j/\gamma}a_{\gamma_j}(\zeta).$$

Нехай $\eta_0(\cdot)$ — нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}^n$ фінітна функція, така, що

$$\eta_0(\zeta) = \begin{cases} 1, & \|\zeta\| \le \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \|\zeta\| \ge 1. \end{cases}$$

Позначимо $\eta_1(\cdot) = 1 - \eta_0(\cdot)$,

$$\Psi_\nu^k(t,z) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_k(\zeta)\zeta^\nu \exp\{-P_1(t,\zeta) + i(z,\zeta)\}d\zeta, \qquad k = \overline{0,1}.$$

Тоді $\Psi_\nu = \Psi_\nu^0 + \Psi_\nu^1$.

Скориставшись при $t \ge 0$ розкладом e^{-t} з леми 1, одержимо

$$\Psi_\nu^0(t,z) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta)\zeta^\nu e^{i(z,\zeta)}d\zeta + \sum_{l=1}^{k-1}(-1)^l \int_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta)\zeta^\nu (P_1(t,\zeta))^l e^{i(z,\zeta)}d\zeta +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta)\zeta^\nu (P_1(t,\zeta))^k h_k(P_1(t,\zeta))e^{i(z,\zeta)}d\zeta \stackrel{\text{df}}{=} \Psi_\nu^{0,0} + \sum_{l=1}^{k-1}(-1)^l\Psi_\nu^{0,l} + \Psi_\nu^{0,k}.$$

Зрозуміло, що $\Psi_\nu^{0,0}(\cdot) \in S(\mathbb{R}^n)$, тому

$$\left|\Psi_\nu^{0,0}(z)\right| \le c\|z\|^{-r}, \qquad r \in \mathbb{N}, \qquad \|z\| \ge 1,$$

де c — додатна стала, не залежна від z.

Зафіксуємо довільним чином l з $\{1,\ldots,(k-1)\}$ і розглянемо $\Psi_\nu^{0,l}$. Оскільки $(P_1(t,\zeta))^l = \sum_j R_j(t,\zeta)$ — сума зі скінченною кількістю доданків виду $R_j(t,\zeta) = \hat{b}_j(t)a_j(\zeta)$, де $a_j(\cdot)$ — однорідна функція порядку не більшого ніж $l\gamma$ і не меншого за $l\gamma_0$, тієї ж гладкості, що і $a_{\gamma_j}(\cdot)$, а $\hat{b}_j(\cdot)$ — рівномірно обмежена на $[0,1)$ функція, то

$$\Psi_\nu^{0,l}(t,z) = \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} \eta_0(\zeta)\zeta^\nu R_j(t,\zeta)e^{i(z,\zeta)}d\zeta \stackrel{\text{df}}{=} \sum_j \hat{b}_j(t)\Psi_\nu^{0,l,j}(z).$$

При доведенні леми 1 з [8] було встановлено, що

$$\left|\Psi_\nu^{0,l,j}(z)\right| \le c\|z\|^{-n-|\nu|-l\gamma_0}, \qquad l\gamma_0 > 0, \qquad \|z\| \ge 1$$

(див. нерівність (18) у [8]). Отже, для всіх $\|z\| \ge 1$ й $t \in [0,1)$ виконується оцінка

$$\left|\Psi_\nu^{0,l}(t,z)\right| \le c_1\|z\|^{-n-|\nu|-l\gamma_0},$$

де c_1 — додатна стала, не залежна від t і z.

Таким чином,

$$\left|\sum_{l=1}^{k-1}(-1)^l\Psi_\nu^{0,l}(t,z)\right| \le c_2\|z\|^{-n-|\nu|-\gamma_0}, \qquad t \in [0,1), \qquad \|z\| \ge 1.$$

Оцінимо $\Psi_\nu^{0,k}(t,z)$, $t \in [0,1)$, $\|z\| \ge 1$. Нехай $z = (z_1,\ldots,z_n)$. Виберемо номер j такий, що $|z_j| \ge |z_k|$, $k = \overline{1,n}$. Тоді $\|z\| \le \sqrt{n}\,|z_j|$. Зінтегруємо r разів частинами $\Psi_\nu^{0,k}$ по змінній ζ_j:

$$\Psi_\nu^{0,k}(t,z) = \frac{(-1)^r}{(iz_j)^r}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(z,\zeta)}\frac{\partial^r}{\partial\zeta_j^r}\Big\{\eta_0(\zeta)\zeta^\nu(P_1(t,\zeta))^k h_k(P_1(t,\zeta))\Big\}d\zeta =$$

$$= \frac{(-1)^r}{(iz_j)^r}\Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(z,\zeta)}\eta_0(\zeta)\frac{\partial^r}{\partial\zeta_j^r}\Big\{\zeta^\nu(P_1(t,\zeta))^k h_k(P_1(t,\zeta))\Big\}d\zeta +$$

$$+ \sum_{l=1}^r C_r^l\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(z,\zeta)}\frac{\partial^l\eta_0(\zeta)}{\partial\zeta_j^l}\frac{\partial^{r-l}}{\partial\zeta_j^{r-l}}\Big\{\zeta^\nu(P_1(t,\zeta))^k h_k(P_1(t,\zeta))\Big\}d\zeta\Bigg] \overset{\text{df}}{=}$$

$$\overset{\text{df}}{=} \frac{(-1)^r}{(iz_j)^r}\Bigg[\Psi_\nu^{0,k,0}(t,z) + \sum_{l=1}^r C_r^l\Psi_\nu^{0,k,l}(t,z)\Bigg].$$

Передусім оцінимо вираз

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial\zeta_j^r}\Big\{\zeta^\nu(P_1(t,\zeta))^k h_k(P_1(t,\zeta))\Big\}\right| = \left|\sum_{l=0}^r C_r^l\frac{\partial^l}{\partial\zeta_j^l}\Big\{\zeta^\nu(P_1(t,\zeta))^k\Big\}\frac{\partial^{r-l}h_k(P_1(t,\zeta))}{\partial\zeta_j^{r-l}}\right|.$$

Розглянемо спочатку

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial\zeta_j^r}\Big\{\zeta^\nu(P_1(t,\zeta))^k\Big\}\right| \le \sum_{l=0}^r C_r^l\left|\frac{\partial^l(\zeta^\nu)}{\partial\zeta_j^l}\right|\left|\frac{\partial^{r-l}}{\partial\zeta_j^{r-l}}\big((P_1(t,\zeta))^k\big)\right|.$$

Згідно з формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції [12] одержимо

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial\zeta_j^r}\big((P_1(t,\zeta))^k\big)\right| \le \sum_q^r\frac{r!}{i!g!\ldots h!}\left|\frac{d^q\big((P_1(t,\zeta))^k\big)}{d(P_1(t,\zeta))^q}\right|\left|\frac{\partial P_1(t,\zeta)}{1!\partial\zeta_j}\right|^i\ldots\left|\frac{\partial^L P_1(t,\zeta)}{L!\partial\zeta_j^L}\right|^h$$

(тут знак суми поширюється на всі цілочислові невід'ємні розв'язки рівняння $r = i + 2g + \ldots + Lh$, число $q = i + g + \ldots + h$). Звідси, скориставшись тим, що

$$\left|\frac{\partial^L P_1(t,\zeta)}{L!\partial\zeta_j^L}\right| \le c\|\zeta\|^{-L}P_1(t,\zeta), \qquad \zeta\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}, \tag{6}$$

дістанемо

$$\left|\frac{\partial^r\big((P_1(t,\zeta))^k\big)}{\partial\zeta_j^r}\right| \le \sum_q^r c(r)\big(P_1(t,\zeta)\big)^{k-q}\|\zeta\|^{-r}(P_1(t,\zeta))^q \le$$

$$\le c\big(P_1(t,\zeta)\big)^k\|\zeta\|^{-r}, \qquad \zeta\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},$$

де c — додатна стала, не залежна від t і ζ.

Оскільки

$$\left|\frac{\partial^l\zeta^\nu}{\partial\zeta_j^l}\right| \le c\left(\begin{cases}\|\zeta\|^{|\nu|-l}, & |\nu|\ge l,\\ 0, & |\nu|<l\end{cases}\right), \tag{7}$$

то

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial\zeta_j^r}\Big\{\zeta^\nu(P_1(t,\zeta))^k\Big\}\right| \le c(P_1(t,\zeta))^k\|\zeta\|^{|\nu|-r}, \qquad \zeta\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$

Скориставшись ще раз формулою Фаа де Бруно, а також лемою 1 і оцінкою (6), одержимо

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial\zeta_j^r}h_k(P_1(t,\zeta))\right| \le \sum_q^r c(r)\left|\frac{d^q h_k(P_1(t,\zeta))}{d(P_1(t,\zeta))^q}\right|\left|\frac{\partial P_1(t,\zeta)}{1!\partial\zeta_j}\right|^i\ldots\left|\frac{\partial^L P_1(t,\zeta)}{L!\partial\zeta_j^L}\right|^h \le$$

$$\leq\ c(r)\|\zeta\|^{-r}\sum_{q}^{r}\,(P_1(t,\zeta))^q\ \leq\ c\|\zeta\|^{\gamma_0-r},$$

де $\|\zeta\|\leq 1,\ t\in[0,1)$, а стала c не залежить від t і ζ.

Таким чином, для всіх $\|\zeta\|\leq 1,\ t\in[0,1)$

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial\zeta_j^r}\left\{\zeta^\nu(P_1(t,\zeta))^k h_k(P_1(t,\zeta))\right\}\right|\ \leq\ c\|\zeta\|^{|\nu|+\gamma_0(k+1)-r},$$

причому $c\neq c(t)$.

Звідси одержуємо

$$\left|\Psi_\nu^{0,k,l}(t,z)\right|\ \leq\ c\int\limits_{1/2\leq\|\zeta\|\leq 1}\|\zeta\|^{|\nu|+\gamma_0(k+1)+l-r}d\zeta\ \leq\ c_2,\qquad l\ =\ \overline{1,r},\qquad r\in\mathbb{N};$$

$$\left|\Psi_\nu^{0,k,0}(t,z)\right|\ \leq\ c\int\limits_{\|\zeta\|\leq 1}\|\zeta\|^{|\nu|+\gamma_0(k+1)-r}d\zeta$$

для всіх $\|z\|\geq 1$ і $t\in[0,1)$.

Для забезпечення збіжності останнього інтеграла покладемо $r=n+|\nu|+[k\gamma_0]$, а за k виберемо найменше з натуральних чисел l, для яких виконується нерівність $[l\gamma_0]\geq\gamma_0$. Тоді

$$\left|\Psi_\nu^{0,k}(t,z)\right|\ \leq\ c\|z\|^{-n-|\nu|-\gamma_0},\qquad \|z\|\ \geq\ 1,\qquad t\in[0,1),$$

де c — додатна стала, не залежна від t і z.

Перейдемо до оцінювання Ψ_ν^1 при $\|z\|\geq 1$. Як і у випадку $\Psi_\nu^{0,k}$, зінтегруємо r разів частинами Ψ_ν^1 по змінній ζ_j:

$$\left|\Psi_\nu^1(t,z)\right|\ \leq$$

$$\leq\ \frac{1}{|z_j|^r}\left[\int\limits_{1/2\leq\|\zeta\|}\left|\frac{\partial^r}{\partial\zeta_j^r}\left(\zeta^\nu e^{-P_1(t,\zeta)}\right)\right|d\zeta\ +\ c\sum_{l=1}^{r}\ \int\limits_{1/2\leq\|\zeta\|\leq 1}\left|\frac{\partial^{r-l}}{\partial\zeta_j^{r-l}}\left(\zeta^\nu e^{-P_1(t,\zeta)}\right)\right|d\zeta\right].\quad (8)$$

Оскільки згідно з формулою Фаа де Бруно та нерівністю (6)

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial\zeta_j^r}e^{-P_1(t,\zeta)}\right|\ \leq\ \sum_{q}^{r}c(r)\left|\frac{d^q e^{-P_1(t,\zeta)}}{d(P_1(t,\zeta))^q}\right|\left|\frac{\partial P_1(t,\zeta)}{1!\partial\zeta_j}\right|^i\ldots\left|\frac{\partial^L P_1(t,\zeta)}{L!\partial\zeta_j^L}\right|^h\ \leq$$

$$\leq\ c\|\zeta\|^{-r}e^{-P_1(t,\zeta)/2}\sum_{q}^{r}\sup_{y}\left\{y^q e^{-y}\right\}\ \leq\ c_1\|\zeta\|^{-r}e^{-\delta\|\zeta\|^\gamma},\qquad \zeta\in\mathbb{R}^n,$$

де c_1, δ — додатні сталі, не залежні від t і ζ, з огляду на (7), з нерівності (8) при $\|z\|\geq 1$ і $t\in[0,1)$ отримуємо оцінку

$$\left|\Psi_\nu^1(z)\right|\ \leq\ c_2\|z\|^{-r},\qquad r\in\mathbb{N},\qquad c_2\ \neq\ c_2(t,\ z).$$

Таким чином, існує константа c, не залежна від t і z, така, що

$$|\Psi_\nu(t,z)|\ \leq\ c\|z\|^{-n-|\nu|-\gamma_0},\qquad \|z\|\ \geq\ 1,\qquad t\in[0,1).$$

Зазначимо, що при $\|z\|\leq 1$ і $t\in(0,T]$

$$|\Psi_\nu(t,z)|\ \leq\ \int\limits_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^{n}|\zeta_j|^{\nu_j}e^{-\delta\|\zeta\|^\gamma}d\zeta.$$

Отже,

$$\forall\, \nu \in \mathbb{Z}_+^n \quad \exists\, c > 0 \quad \forall\, t \in (0,1) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n: \left| D_x^\nu G(t,x) \right| \le$$

$$\le\ c t^{-p(n+|\nu|)/\gamma} (1 + \|z\|)^{-n-|\nu|-\gamma_0} \ \equiv\ c t^{p\gamma_0/\gamma} \left(t^{p/\gamma} + \|x\| \right)^{-n-|\nu|-\gamma_0}.$$

Випадок

$$\left| D_t D_x^\nu G(t,x) \right| = \frac{1}{(2\pi)^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \xi^\nu D_t (P(t,\xi)) \exp\{ -P(t,\xi) + i(x,\xi) \} d\xi \right|$$

розглядається аналогічно. Після виконання заміни $\xi_j = t^{-p/\gamma} \zeta_j$, $j = \overline{1,n}$, й підстановки $z = t^{-p/\gamma} x$ одержимо

$$\left| D_t D_x^\nu G(t,x) \right| =$$

$$= \frac{t^{-p(n+|\nu|)/\gamma}}{(2\pi)^n} \sum_{j=1}^m b_j(t) t^{-p\gamma_j/\gamma} \left(\left| \int_{\mathbb{R}^n} \zeta^\nu a_{\gamma_j}(\zeta) \exp\{ -P_1(t,\zeta) + i(z,\zeta) \} d\zeta \right| \right) \le$$

$$\le\ c t^{-(1+p(n+|\nu|)/\gamma)} \sum_{j=1}^m \left| \int_{\mathbb{R}^n} \zeta^\nu a_{\gamma_j}(\zeta) \exp\{ -P_1(t,\zeta) + i(z,\zeta) \} d\zeta \right| \stackrel{\mathrm{df}}{=}$$

$$\stackrel{\mathrm{df}}{=} c t^{-(1+p(n+|\nu|)/\gamma)} \sum_{j=1}^m \left| \hat{\Psi}_j \right|,$$

де c — додатна стала, не залежна від t і z.

Зазначимо, що для кожного фіксованого j з $\{1, \ldots, m\}$ інтеграл $\hat{\Psi}_j$ є інтегралом виду Ψ_ν, оскільки $\zeta^\nu a_{\gamma_j}(\zeta)$ — однорідна функція. Однак ця функція має обмежену гладкість, тому інтеграл $\hat{\Psi}_j^{0,0}$ (аналог $\Psi_\nu^{0,0}$), взагалі кажучи, не належить простору $S(\mathbb{R}^n)$, проте його можна вважати інтегралом виду $\Psi_\nu^{0,l,j}$. Таким чином, доведення нерівності (5) у випадку, коли $t \in (0, 1)$, зводиться до повторення міркувань, проведених при встановленні нерівності (4).

На завершення зауважимо, що при $t \ge 1$ оцінки (4), (5) одержуються аналогічно завдяки заміні $\xi_j = t^{-p_0/\gamma_0} \zeta_j$, $j = \overline{1,n}$, та підстановці $z = t^{-p_0/\gamma_0} x$.

Лему доведено.

***Наслідок* 1.** *При кожному фіксованому* $t \in (0, T]$ *функція* $G(t, \cdot)$ *належить* Φ.

Лема 3. *Функція* $G(t, \cdot)$, *як абстрактна функція параметра* $t \in (0, T]$ *зі значенням у просторі* Φ, *є диференційовною по* t.

Доведення. Необхідно довести, що граничне співвідношення

$$\Psi_{\Delta t}(t,x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{G(t+\Delta t, x) - G(t,x)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} D_t G(t,x)$$

виконується у тому розумінні, що:

1) $\forall\, k \in \mathbb{Z}_+^n:\ D_x^k \Psi_{\Delta t}(t,x) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} D_x^k D_t G(t,x)$ рівномірно по x на кожному компакті K з $\mathbb{R}^n$;

2) $\forall\, \nu \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall\, t \in (0,T] \quad \exists\, c_\nu > 0 \quad \forall\, |\Delta t| < \dfrac{1}{2} t \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$:

$$\left\| \Psi_{\Delta t}(t,x) \right\|_\nu \le c_\nu.$$

Функція G є диференційовною по t у звичайному розумінні, тому

$$\Psi_{\Delta t}(t,x) = D_t G(t+\theta_1 \Delta t, x), \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

Отже,

$$\left| D_x^k \left(\Psi_{\Delta t}(t,x) - D_t G(t,x) \right) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|\xi\|^{|k|} P(t,\xi) \left| e^{-P(t+\theta_1\Delta t,\xi)} - e^{-P(t,\xi)} \right| d\xi =$$

$$= c_1 \theta_1 |\Delta t| \int_{\mathbb{R}^n} \|\xi\|^{|k|} P(t,\xi) P(t+\theta_2 \Delta t, \xi) e^{-P(t+\theta_2\Delta t,\xi)} d\xi \leq$$

$$\leq c_2 |\Delta t| \int_{\mathbb{R}^n} \|\xi\|^{|k|} P(t,\xi) \left(\sum_{j=1}^m c_j (t+\theta_2 \Delta t)^{p_j} a_{\gamma_j}(\xi) \right) \times$$

$$\times \exp\left\{ - \int_0^{t+\theta_2\Delta t} b_{j_0}(\tau) d\tau \, a_{\gamma_0}(\xi) \right\} d\xi \leq$$

$$\leq c_2 b(t) |\Delta t| \int_{\mathbb{R}^n} \|\xi\|^{|k|} P(t,\xi) \left(\sum_{j=1}^m a_{\gamma_j}(\xi) \right) e^{-\delta t^{p_0} a_{\gamma_0}(\xi)} d\xi \leq c_3 b_1(t) |\Delta t|,$$

$$|\Delta t| < \frac{1}{2} t, \quad t \in (0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \theta_j \in (0,1), \quad j = \overline{1,2},$$

де c_3 і $b_1(t)$ — додатні величини, не залежні від Δt і x. Таким чином, умова 1 виконується.

Умова 2 також виконується, оскільки згідно з лемою 2 одержуємо

$$\left| D_x^k \left(\Psi_{\Delta t}(t,x) \right) \right| = \left| D_x^k D_t G(t+\theta_1 \Delta t, x) \right| \leq$$

$$\leq c (t+\theta_1 \Delta t)^{\beta\gamma_0 - 1} \left((t+\theta_1\Delta t)^\beta + \|x\| \right)^{-(n+|k|+\gamma_0)} \leq$$

$$\leq c_2 t^{\beta\gamma_0-1} \left(t^\beta + \|x\| \right)^{-(n+|k|+\gamma_0)}, \quad t \in (0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad c_2 \neq c_2(\Delta t, x)$$

(тут враховано те, що $(1-\theta_1/2)t \leq t + \theta_1 \Delta t \leq (1+\theta_1/2)t$ для всіх $|\Delta t| < t/2$, $\theta_1 \in (0,1)$), що й потрібно було довести.

Наслідок 2. *Для кожного f з $\mathfrak{R}$ функція $(f * G)(t, \cdot)$, $t \in (0,T]$, є диференційовною по t у звичайному розумінні.*

Лема 4. *Функція $G(t,\cdot)$ при $t \to +0$ прямує до дельта-функції Дірака у просторі Φ'.*

Доведення. Насамперед наведемо допоміжне співвідношення

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t,x) dx = 1, \quad t \in (0,T], \tag{9}$$

яке одержується з означення функції G та формули обернення перетворення Фур'є.

Для довільної основної функції φ з Φ маємо

$$|\langle G(t,\cdot), \varphi \rangle - \langle \delta, \varphi \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |G(t,x)| |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \overset{\text{df}}{=} \mathfrak{I}(t), \quad t \in (0,T].$$

За неперервністю функції φ для довільного $\varepsilon > 0$ існує t_0 таке, що $t_0^{p/(2\gamma)} < \varepsilon$ і $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon$, як тільки $\|x\| < t_0^{p/(2\gamma)}$. Тоді

$$\mathfrak{I}(t) < \varepsilon \int_{\|x\| < t_0^{p/(2\gamma)}} |G(t,x)| dx + \int_{\|x\| \geq t_0^{p/(2\gamma)}} |G(t,x)| |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \overset{\text{df}}{=}$$

$$\stackrel{\text{df}}{=} \varepsilon \mathfrak{I}_1(t) + \mathfrak{I}_2(t), \qquad t \in (0, T].$$

Згідно з (4) при $t \in (0, 1)$ одержимо

$$\mathfrak{I}_1(t) \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t^{\gamma_0 p/\gamma}}{\left(t^{p/\gamma} + \|x\|\right)^{n+\gamma_0}} dx = c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1 + \left\|t^{-p/\gamma} x\right\|\right)^{n+\gamma_0}} d\left(t^{-p/\gamma} x\right) =$$

$$= c \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{(1+\rho)^{1+\gamma_0}} = c_1, \qquad c_1 \neq c_1(t).$$

З обмеженості функції φ в $\mathbb{R}^n$, з огляду на (4) при $t \in (0, 1)$, отримуємо

$$\mathfrak{I}_2(t) \leq c t^{p\gamma_0/\gamma} \int_{\|x\| \geq t_0^{p/(2\gamma)}} \|x\|^{-(n+\gamma_0)} dx =$$

$$= c t^{p\gamma_0/\gamma} \int_{t_0^{p\gamma_0/\gamma}}^{+\infty} \rho^{-(1+\gamma_0)} d\rho = c_2 t^{p\gamma_0/\gamma} t_0^{-p\gamma_0/(2\gamma)},$$

де c_2 — додатна стала, не залежна від t. Звідси для всіх $t \leq t_0$ і $t \in (0, 1)$ маємо $\mathfrak{I}_2(t) \leq c_2 t_0^{p\gamma_0/(2\gamma)} < c_2 \varepsilon^{\gamma_0}$.

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists t_0 < \varepsilon^{2\gamma/p} \;\; \forall t \leq t_0 \colon \mathfrak{I}(t) \leq c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon^{\gamma_0},$$

що й потрібно було довести.

2. Задача Коші. Розглянемо рівняння (1), у якому $b_j(\cdot)$ — функції, описані у попередньому пункті, а A_{γ_j} — оператори типу A_α, побудовані за символами $a_{\gamma_j} \in \Lambda$, $j = \overline{1, m}$.

Фундаментальним розв'язком рівняння (1) є функція $G(t, \cdot)$, яка при кожному $t \in (0, T]$ належить до простору Φ (див. наслідок 1).

Як видно з леми 4, граничними значеннями розв'язку рівняння (1) при $t \to +0$ можуть бути елементи з простору Φ', причому початкову умову для (1)

$$U(t, \cdot)\big|_{t=0} = f \tag{10}$$

слід розуміти як $U(t, \cdot) \underset{t \to +0}{\overset{\Phi'}{\to}} f$ (тобто як слабку збіжність у просторі Φ').

Отже, під розв'язком задачі Коші (1), (10) розумітимемо гладку функцію U, яка задовольняє рівняння (1) у звичайному розумінні, а початкову умову (10) у тому розумінні, що $U(t, \cdot) \underset{t \to +0}{\overset{\Phi'}{\to}} f$.

Наступне твердження характеризує коректну розв'язність задачі Коші (1), (10).

Теорема 2. *Задача Коші* (1), (10) *є коректно розв'язною в класі початкових узагальнених функцій* $\mathfrak{R}$. *Її розв'язок диференційовний по* t, *нескінченно диференційовний по* x *і зображується формулою*

$$U(t, x) = (f * G)(t, x), \qquad (t, x) \in \Omega,$$

при цьому $U(t, \cdot) \in \Phi$ *для кожного* $t \in (0, T]$.

Доведення. Як зазначалось, у просторі Φ операція зсуву не лише неперервна, але і нескінченно диференційовна, тому $G(t, x - \cdot)$, як абстрактна функція параметра x у просторі Φ, нескінченно диференційовна по x. Диференційовність по t цієї функції стверджується у наслідку 2. Отже, $U(t, x) = \langle f, G(t, x - \cdot) \rangle$, $(t, x) \in \Omega$, є звичайною функцією, диференційовною по t і нескінченно диференційовною по x. Крім того, оскільки f — згортувач у просторі Φ, то $(f * G)(t, \cdot) \in \Phi$ при кожному t з $(0, T]$.

Доведемо тепер, що функція U є розв'язком рівняння (1). Для f з $\mathfrak{R}$ (див. п. 1)

$$F[f * G](t, \xi) = F[f](\xi) F[G](t, \xi) = F[f](\xi) e^{-P(t,\xi)}, \qquad (t, \xi) \in \Omega.$$

Отже, для всіх $t \in (0, T]$ і $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{j=1}^{m} b_j(t)\big(A_{\gamma_j} U\big)(t, x) = F^{-1}\left[\left(\sum_{j=1}^{m} b_j(t) a_{\gamma_j}(\xi)\right) e^{-P(t,\xi)}\, \overline{F[f](\xi)}\right](t, x) =$$

$$= -F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} e^{-P(t,\xi)}\, \overline{F[f](\xi)}\right](t, x) = -F^{-1}\left[F\left[\frac{\partial}{\partial t} G(t, \xi)\overline{F[f](\xi)}\right]\right](t, x) =$$

$$= -F^{-1}\left[F\left[\left(f * \frac{\partial}{\partial t} G\right)\right]\right](t, x) = -\left(f * \frac{\partial}{\partial t} G\right)(t, x) = -\frac{\partial U(t, x)}{\partial t},$$

тобто U задовольняє рівняння (1) у звичайному розумінні.

Згідно з лемою 4 та неперервністю операції згортки у просторі Φ' [6] функція U задовольняє початкову умову (10).

Для встановлення єдиності розв'язку задачі Коші (1), (10) розглянемо допоміжну (спряжену) задачу Коші

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} - \sum_{j=1}^{m} b_j(t)\big(A^*_{\gamma_j} V\big)(t, x) = 0, \quad V \in \Phi, \quad (t, x) \in \Omega' \overset{\text{df}}{=} [0, t_0) \times \mathbb{R}^n, \tag{11}$$

$$V(t, \cdot)\Big|_{t=t_0} = \varphi, \qquad \varphi \in \mathfrak{R}, \tag{12}$$

де умова (12) виконується у слабкому розумінні; t_0 — довільним чином фіксоване число з $(0, T]$, а $A^*_{\gamma_j} : \Phi \to \Phi'$ — спряжений оператор до A_{γ_j}. Зазначимо, що [7]

$$\forall\, \varphi \in \Phi : \big(A^*_{\gamma_j} \varphi\big)(\cdot) = F\Big[a_{\gamma_j}(\xi) F^{-1}[\varphi](\xi)\Big](\cdot).$$

Позначимо через $G^*(t - t_0, \cdot)$ фундаментальний розв'язок задачі Коші (11), (12). Як і у випадку задачі (1), (10), неважко переконатися, що:

1) $G^*(t - t_0, \cdot)$ при кожному фіксованому $t \in [0, t_0)$ належить до простору Φ як абстрактна функція параметра t, диференційовна по t, і

$$G^*(t - t_0, x) = F\left[\exp\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(\int_{t_0}^{t} b_j(\tau)\, d\tau\right) a_{\gamma_j}(\xi)\right\}\right](t - t_0, x), \qquad (t, x) \in \Omega';$$

2) задача Коші (11), (12) є розв'язною в класі узагальнених початкових функцій $\mathfrak{R}$, її розв'язок є диференційовним по t, нескінченно диференційовним по x і зображується формулою

$$V(t, x) = (\varphi * G^*)(t - t_0, x), \qquad (t, x) \in \Omega',$$

причому $V(t, \cdot) \in \Phi$ для кожного $t \in [0, t_0)$.

Позначимо через $Q^t_{t_0}$ оператор, який діє з простору $\mathfrak{R}$ у простір Φ так:

$$Q^t_{t_0} \varphi = (\varphi * G^*)(t - t_0, \cdot) = V(t, \cdot) \in \Phi \quad (\forall\, \varphi \in \mathfrak{R}).$$

Оператор $Q_{t_0}^t$ є лінійним і неперервним (оскільки такою є операція згортки), визначеним для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 \le T$, причому для всіх $\varphi \in \mathfrak{R}$

$$\frac{\partial Q_{t_0}^t \varphi}{\partial t} - \sum_{j=1}^{m} b_j(t) A_{\gamma_j}^* Q_{t_0}^t \varphi = 0, \qquad \lim_{t \to t_0} Q_{t_0}^t \varphi = \varphi \tag{13}$$

(тут $t \to t_0$ у слабкому розумінні границі).

Розглянемо тепер розв'язок $U(t,\cdot) = (f * G)(t,\cdot)$ задачі Коші (1), (10) (надалі трактуватимемо його як функціонал з $\Phi' \supset \Phi$). Для єдиності розв'язку задачі Коші (1), (10) у просторі Φ досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (1) при нульовій початковій умові може бути лише функціонал $U \equiv 0$. Зафіксуємо довільним чином $t_0 \in (0, T]$ і застосуємо функціонал U до елемента $Q_{t_0}^t \varphi$, де φ — довільний елемент з $\mathfrak{R}$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння з (13), отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle U(t,\cdot), Q_{t_0}^t \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial U}{\partial t}, Q_{t_0}^t \varphi \right\rangle + \left\langle U, \frac{\partial Q_{t_0}^t \varphi}{\partial t} \right\rangle =$$

$$= \left\langle -\sum_{j=1}^{m} b_j(t)\left(A_{\gamma_j} U\right), Q_{t_0}^t \varphi \right\rangle + \left\langle U, \sum_{j=1}^{m} b_j(t)\left(A_{\gamma_j}^* Q_{t_0}^t \varphi\right) \right\rangle =$$

$$= \left\langle -\sum_{j=1}^{m} b_j(t)\left(A_{\gamma_j} U\right), Q_{t_0}^t \varphi \right\rangle + \left\langle \sum_{j=1}^{m} b_j(t)\left(A_{\gamma_j} U\right), Q_{t_0}^t \varphi \right\rangle = 0,$$

$$\varphi \in \mathfrak{R}, \qquad t \in (0, t_0)$$

(з приводу диференціювання абстрактної функції див. [9]). Звідси випливає, що $\left\langle U(t,\cdot), Q_{t_0}^t \varphi \right\rangle$ є сталою величиною. Далі, згідно з початковою умовою $U(t,\cdot)\big|_{t=0} = 0$ знаходимо, що ця величина дорівнює нулю при всіх $t \in [0, t_0)$. Зокрема, при $t \to t_0$ (у слабкому розумінні границі) $\langle U(t_0,\cdot), \varphi \rangle = 0$, $\varphi \in \mathfrak{R}$. Оскільки φ — довільний елемент з $\mathfrak{R}$, а простір $S(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{R}$, причому $\overline{S(\mathbb{R}^n)} = \Phi$, то $\langle U(t_0,\cdot), \varphi \rangle = 0$ для всіх φ з Φ. Отже, $U(t_0,\cdot)$ — нульовий функціонал. З огляду на те, що t_0 було вибрано довільним чином між 0 і T, $U(t,\cdot) \equiv 0$ для всіх $t \in [0, T]$.

Теорему доведено.

3. Принцип локалізації. Зазначимо, що розв'язок задачі Коші (1), (10) при $t \to +0$ прямує до узагальненої функції f у слабкому сенсі. Однак може трапитися, що f збігається на деякій частині $\mathbb{R}^n$ з гладкою функцією. Виникає питання: чи буде у цьому випадку відбуватися локальне підсилення збіжності вказаного розв'язку при $t \to +0$?

Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 3 (принцип локалізації). *Нехай* $f \in \mathfrak{R}$, U — *розв'язок задачі Коші* (1), (10), *побудований за функціоналом* f. *Тоді якщо узагальнена функція* f *збігається в деякій області* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *з неперервною функцією* g, *то* $U(t, x) \underset{t \to +0}{\longrightarrow} g(x)$ *рівномірно по* x *на кожному компакті* $K \subset Q$.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли $g(\cdot) \equiv 0$ на Q. Нехай $K \subset K_1 \subset Q$, де K_1 — деяка компактна множина в $\mathbb{R}^n$. Розглянемо функцію $\eta_0 \in D(\mathbb{R}^n) \subset \Phi$ з носієм в Q таку, що $\eta_0 = 1$ на K_1. Оскільки

$\{\eta_0(\cdot)G(t, x-\cdot), (1-\eta_0(\cdot))G(t, x-\cdot)\} \subset \Phi$ при кожному $t \in (0, T]$ і $x \in \mathbb{R}^n$, то

$$U(t, x) = \langle f, \eta_0(\cdot)G(t, x-\cdot)\rangle + \langle f, \eta_1(\cdot)G(t, x-\cdot)\rangle,$$

де $\eta_1(\cdot) = 1 - \eta_0(\cdot)$. Зважаючи на те, що узагальнена функція f дорівнює нулю в області Q, а $\operatorname{supp}(\eta_0(\cdot)G(t, x-\cdot)) \subset Q$, з останньої рівності одержуємо

$$U(t, x) = t^{p\gamma_0/\gamma}\left\langle f, t^{-p\gamma_0/\gamma}\eta_1(\cdot)G(t, x-\cdot)\right\rangle.$$

Далі, кожна узагальнена функція f з Φ' має скінченний порядок, тому

$$\left|U(t, x)\right| \le t^{p\gamma_0/\gamma}\|f\|_q\left\|\omega_{t,x}\right\|_q,$$

де $\omega_{t,x}(\cdot) \stackrel{\mathrm{df}}{=} t^{-p\gamma_0/\gamma}\eta_1(\cdot)G(t, x-\cdot)$, $\|f\|_q$ — норма функціонала f у Φ'_q. Покажемо, що сукупність функцій $\omega_{t,x}(\cdot)$ обмежена за q-ю нормою простору Φ_q рівномірно по $t \in (0, 1)$ і $x \in K$. Оскільки $\omega_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in K_1$, то оцінку $\left\|\omega_{t,x}\right\|_q \le c_q$ досить встановити для $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash K_1$.

Зазначимо, що

$$\Delta_{t,x}(\xi) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=0}^{q} M_{\hat\gamma+k}(\xi)\sum_{|\alpha|=k}\left|D_\xi^\alpha(\eta_1(\xi)G(t, x-\xi))\right| \le$$

$$\le M_{\hat\gamma}(\xi)|G(t, x-\xi)| + M_{\hat\gamma}(\xi)|\eta_0(\xi)G(t, x-\xi)| + \sum_{k=1}^{q} M_{\hat\gamma+k}(\xi)\times$$

$$\times\sum_{|\alpha|=k}\left\{\left|D_\xi^\alpha G(t, x-\xi)\right| + \left|\eta_0(\xi)D_\xi^\alpha G(t, x-\xi)\right| + \sum_{|l|=1}^{|\alpha|}\left|D_\xi^l\eta_0(\xi)\right|\left|D_\xi^{\alpha-l}G(t, x-\xi)\right|\right\}.$$

Звідси, врахувавши лему 2, а також те, що $\eta_0 \in \Phi_q$ (тому що $\eta_0 \in \Phi = \bigcap_{j=0}^{\infty}\Phi_j$), дістанемо

$$\Delta_{t,x}(\xi) \le ct^{p\gamma_0/\gamma}\left\{\frac{M_{\hat\gamma}(\xi)}{\left(t^{p/\gamma}+\|x-\xi\|\right)^{\hat\gamma}} + \frac{1}{\left(t^{p/\gamma}+\|x-\xi\|\right)^{\hat\gamma}} + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{q} M_{\hat\gamma+k}(\xi)\sum_{|\alpha|=k}\left\{\frac{1}{\left(t^{p/\gamma}+\|x-\xi\|\right)^{\hat\gamma+|\alpha|}} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{M_{-\hat\gamma}(\xi)}{\left(t^{p/\gamma}+\|x-\xi\|\right)^{\hat\gamma+|\alpha|}} + \sum_{|l|=1}^{|\alpha|}\frac{M_{-(\hat\gamma+|l|)}(\xi)}{\left(t^{p/\gamma}+\|x-\xi\|\right)^{\hat\gamma+|\alpha-l|}}\right\}\right\}, \qquad t \in (0, 1).$$

Оскільки $\|x-\xi\| \ge a_0 > 0$, де a_0 — відстань між межами компактів K і K_1, то

$$\exists L > 0 \quad \forall x \in K \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \backslash K_1 : \frac{M_1(\xi)}{\|x-\xi\|} \le L.$$

Отже, для всіх $x \in K$, $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash K_1$ і $t \in (0, 1)$

$$\Delta_{t,x}(\xi) \le ct^{p\gamma_0/\gamma}\left\{L^{\hat\gamma} + a_0^{-\hat\gamma} + \sum_{k=1}^{q}\sum_{|\alpha|=k}\left\{L^{\hat\gamma+k} + L^{\hat\gamma+k}a_0^{-\hat\gamma} + \sum_{|l|=1}^{|\alpha|}L^{\hat\gamma+|\alpha-l|}\right\}\right\} =$$

$$= c_2 t^{p\gamma_0/\gamma},$$

де c_2 — додатна стала, не залежна від t, x і ξ. Звідси приходимо до висновку, що $\|\omega_{t,x}\|_q \le c_2$, а $|U(t,x)| \le c_2 t^{p\gamma_0/\gamma}\|f\|_q$. Таким чином, $U(t,x) \underset{t\to+0}{\to} 0$ рівномірно по $x \in K$.

На підставі встановленого факту загальний випадок зводиться до доведення того, що

$$\mathfrak{I}_t(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x-\xi)\eta_0(\xi)g(\xi)d\xi \underset{t\to+0}{\to} (\eta_0 g)(x) \tag{14}$$

рівномірно по $x \in K \subset Q$ (тому що

$$U(t,x) = \langle \eta_0(f-g), G(t, x-\cdot)\rangle + \langle \eta_1 f, G(t, x-\cdot)\rangle + \langle \eta_0 g, G(t, x-\cdot)\rangle,$$

а $\eta_0 g$ — регулярний функціонал).

Оскільки

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t,x)dx = 1, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} |G(t,x)|dx \le c_0, \qquad t \in (0,1), \tag{15}$$

де $c_0 \ne c_0(t)$ (остання нерівність легко одержується завдяки лемі 2), то

$$|\mathfrak{I}_t(x) - (\eta_0 g)(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |G(t,\xi)\|(\eta_0 g)(x-\xi) - (\eta_0 g)(x)|d\xi.$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді, згідно з (15), існує $R = R(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$\int_{\|x\|\ge R} |G(t,\xi)|d\xi < \varepsilon$$

для $t \in (0,1)$. Крім цього, $\eta_0 g$ — неперервна фінітна на $\mathbb{R}^n$ функція, тому

$$\sup_{\substack{x\in K\\ \xi\in\mathbb{R}^n}} |(\eta_0 g)(x-\xi) - (\eta_0 g)(x)| = M < +\infty.$$

Отже,

$$\int_{\|\xi\|\ge R} |G(t,\xi)\|(\eta_0 g)(x-\xi) - (\eta_0 g)(x)|d\xi < \varepsilon M, \qquad t \in (0,1), \qquad x \in K.$$

Далі, для вказаного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що $|(\eta_0 g)(x-\xi) - (\eta_0 g)(x)| < \varepsilon$, як тільки $\|x - \xi - x\| = \|\xi\| < \delta$. Тоді

$$\int_{\|\xi\|<\delta} |G(t,\xi)\|(\eta_0 g)(x-\xi) - (\eta_0 g)(x)|d\xi < \varepsilon c_0, \qquad t \in (0,1), \qquad x \in K.$$

Використовуючи оцінки для функції G та її похідних (див. лему 2), маємо

$$\int_{\delta\le\|\xi\|\le R} |G(t,\xi)\|(\eta_0 g)(x-\xi) - (\eta_0 g)(x)|d\xi \le$$

$$\le Mct^{p\gamma_0/\gamma} \int_{\delta\le\|\xi\|\le R} \|\xi\|^{-n-\gamma_0} d\xi = c_1 \varepsilon^{p\gamma_0/\gamma}, \qquad t \in (0,1), \qquad x \in K.$$

Таким чином,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists t_0 < \varepsilon \;\; \forall t < t_0, \qquad t \in (0,1):$$

$$\sup_{x\in K} |\mathfrak{I}_t(x) - (\eta_0 g)(x)| < \varepsilon M + \varepsilon c_0 + c_1 \varepsilon^{p\gamma_0/\gamma},$$

тобто доведено виконання (14).

Звідси вже, зважаючи на те, що $\eta_0 g = g$ на K, приходимо до твердження даної теореми.

Теорему доведено.

Наслідок 3. *Нехай* $f \in \Re$, U — *розв'язок задачі Коші* (1), (10), *побудований по* f. *Якщо узагальнена функція* f *збігається в деякій області* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *з* l *разів неперервно диференційовною функцією* g, *то* $D_x^s U(t,x) \underset{t\to+0}{\to} D_x^s g(x)$ *рівномірно по* x *на кожному компакті* $K \subset Q$, *де* $0 \le |s| \le l$.

1. *Эйдельман С. Д., Дринь Я. М.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений // Приближенные методы математического анализа. – Киев, 1974. – С. 60 – 69.
2. *Дрінь Я. М.* Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гельдерових функцій // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 1. – С. 19 – 21.
3. *Дринь Я. М.* Фундаментальное решение задачи Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 3. – С. 198 – 202.
4. *Эйдельман С. Д., Дринь Я. М.* Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений // Мат. исслед. – 1981. – Вып. 63. – С. 18 – 33.
5. *Федорюк М. В.* Асимптотика функции Грина псевдодифференциального параболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 7. – С. 1296 – 1301.
6. *Городецький В. В., Літовченко В. А.* Задача Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь у просторах узагальнених функцій типу S' // Допов. НАН України. – 1992. – № 10. – С. 6 – 9.
7. *Літовченко В. А.* Задача Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з початковими умовами в просторах узагальнених функцій типу розподілів: Дис. … канд. фіз.-мат. наук. — Чернівці, 1995. – 118 с.
8. *Кочубей А. Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – **52**, № 5. – С. 909 – 934.
9. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
10. *Борок В. М.* Решение задачи Коши для некоторых типов систем линейных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. – 1954. – **97**, № 6. – С. 949 – 952.
11. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
12. *Гурса Э.* Курс математического анализа. – Л.: Гостехиздат, 1933. – Т. 1, ч. 1. – 368 с.

Одержано 18.05.2004