УДК 517.5

У. В. Гудима (Кам'янець-Поділ. ун-т)

НАЙКРАЩА РІВНОМІРНА АПРОКСИМАЦІЯ НЕПЕРЕРВНОГО КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ МНОЖИНАМИ НЕПЕРЕРВНИХ ОДНОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

We prove theorems of the existence, the necessary and sufficient conditions and criteria of the extremal element for a problem of the best uniform approximation of continuous compact-valued map by sets of continuous single-valued maps.

Встановлено теореми існування, необхідну і достатню умови та критерії екстремального елемента для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень.

1. Постановка задачі. Нехай S — компакт, X — нормований лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел простір, $C(S, X)$ — нормований лінійний над полем дійсних чисел простір однозначних відображень g компакту S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\| = \max\limits_{s\in S}\|g(s)\|$, $K(X)$ — сукупність непорожніх компактів простору X, $C(S, K(X))$ — множина неперервних на S багатозначних відображень S в $K(X)$, $V \subset C(S, X)$.

Задачею найкращої рівномірної апроксимації відображення $a \in C(S, K(X))$ множиною V неперервних однозначних відображень будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*(V) = \inf_{g\in V} \sup_{s\in S} \sup_{y\in a(s)} \|g(s) - y\|. \tag{1.1}$$

Якщо існує відображення $g^* \in V$ таке, що

$$\alpha_a^*(V) = \sup_{s\in S} \sup_{y\in a(s)} \left\|g^*(s) - y\right\|,$$

то його будемо називати екстремальним елементом для величини (1.1).

Як відомо, теорія апроксимації має своїм початком задачу П. Л. Чебишова про рівномірне (чебишовське) наближення неперервної на відрізку дійснозначної функції множиною алгебраїчних многочленів степеня, що не перевищує n. Пізніше розглядалась низка й інших постановок задач про найкраще наближення функції, однією з яких є задача про рівномірне наближення неперервної на компакті S дійснозначної (комплекснозначної) функції a множиною V інших неперервних на цьому компакті функцій, тобто задача відшукання величини

$$\inf_{g\in V} \max_{s\in S} |g(s) - a(s)|. \tag{1.2}$$

З розвитком теорії нормованих лінійних просторів стало зрозумілим, що широке коло задач найкращого наближення допускає загальну постановку, якщо як міру відхилення розглядати норму простору, що дало можливість використовувати для розв'язання цих задач ідеї та методи функціонального аналізу. Внаслідок цього було сформульовано задачу найкращого наближення елемента a нормованого лінійного простору X множиною $V \subset X$, тобто задачу відшукання величини

$$\inf_{g\in V} \|g - a\|. \tag{1.3}$$

Задача відшукання величини (1.3) досліджувалась багатьма авторами. Основні результати цих досліджень підсумовано у монографіях Н. І. Ахієзера [1],

© У. В. ГУДИМА, 2005

В. К. Дзядика [2], М. П. Корнєйчука [3], П.-Ж. Лорана [4], О. І. Степанця [5, 6], В. М. Тихомирова [7] та ін.

Важливі результати дослідження задач відшукання величин (1.2), (1.3) було узагальнено на випадок задачі відшукання величини

$$\inf_{g \in V} \max_{s \in S} \| g(s) - a(s) \|, \tag{1.4}$$

де S, X, $C(S, X)$, V означаються, як і при постановці задачі (1.1), а $a \in C(S, X)$.

Задача найкращого рівномірного поліноміального наближення абстрактної функції $a \in C(S, X)$ уперше розглядалась С. І. Зуховицьким та М. Г. Крейном у роботі [8], де вивчались функції зі значеннями в скінченновимірному комплексному евклідовому просторі.

Питанням існування, єдиності, характеризації, побудови чисельних методів відшукання екстремального елемента для величини (1.4) при різних припущеннях щодо S, X та V присвячено велику кількість робіт (див., наприклад, [8 – 19]).

Важливий клас задач теорії наближення утворюють задачі найкращого одночасного наближення кількох або нескінченної кількості елементів. До задач одночасного наближення кількох елементів можна віднести задачу Штейнера, задачу відшукання чебишовського центра системи кількох точок, задачу одночасного наближення функції та її похідної, основні результати дослідження якої отримані О. І. Степанцем, та ін.

Важливим випадком задачі найкращого одночасного наближення нескінченної кількості елементів є задача про чебишовський центр компакту K нормованого лінійного над полем комплексних (дійсних) чисел простору X відносно множини V цього простору, тобто задача відшукання величини

$$\inf_{g \in V} \max_{y \in K} \| g - y \|. \tag{1.5}$$

Питанням існування, єдиності, стійкості, характеризації, належності чебишовського центра множини опуклій оболонці цієї множини присвячено низку праць (див., наприклад, [20 – 27]).

Серед задач найкращого одночасного наближення нескінченної кількості елементів слід виділити також задачу найкращої одночасної рівномірної апроксимації сім'ї φ_j, $j \in I$, неперервних на компакті S дійснозначних функцій, таких, що $\Phi_1(s) = \min_{j \in I} \varphi_j(s)$, $\Phi_2(s) = \max_{j \in I} \varphi_j(s)$, $s \in S$, також є неперервними на S функціями, множиною $V \subset C(S)$, яка полягає у відшуканні величини

$$\inf_{g \in V} \max_{j \in I} \max_{s \in S} \left| g(s) - \varphi_j(s) \right|. \tag{1.6}$$

Задача відшукання величини (1.6) розглядалась, зокрема, у працях [28 – 32].

У випадку, коли функція, що апроксимується, не означена точно, але відомо, що для кожного s компакту S її значення належать деякій компактній множині $a(s) \subset R$, причому множини $a(s)$ змінюються неперервно по s на S, для найкращого рівномірного відтворення такої функції функціями множини $V \subset C(S)$ природно поставити задачу відшукання величини

$$\inf_{g \in V} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} | g(s) - y |. \tag{1.7}$$

Зрозуміло, що задачі відшукання величин (1.2) – (1.7) вкладаються у схему постановки задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень, тобто є частковими випадками задачі відшукання величини (1.1).

Слід зазначити, що питання апроксимації багатозначних відображень у різних аспектах розглядались у багатьох працях (див., наприклад, [33 – 40]). Більшість цих праць присвячено питанням існування так званих однозначних та простіших багатозначних неперервних ε-апроксимацій багатозначних відображень. Лише в окремих роботах розглядаються питання найкращої апроксимації багатозначних відображень. Зокрема, у праці [33] досліджувалась задача найкращого наближення сегментних функцій відносно хаусдорфової метрики. У праці [35] розглянуто питання про існування у множині багатозначних поліномів фіксованого порядку найкращого рівномірного наближення неперервного багатозначного відображення сегмента $[0, 1]$ у множину $K\upsilon(R^l)$ неперервних опуклих компактів простору R^l. У праці [36] встановлено теореми існування та характеризації найкращого рівномірного наближення багатозначного неперервного відображення компакту U простору R^m в $K\upsilon(R^l)$ сталими відображеннями компакту U в $K\upsilon(R^l)$. У праці [38] встановлено теореми існування, єдиності та характеризації екстремального елемента для задачі відшукання величини (1.7) у випадку, коли S є відрізком $[0, 1]$, V — множина поліномів n-го степеня, а $a(t) = [g_1(t), g_2(t)]$, $t \in [0, 1]$, де $g_1(t)$ і $g_2(t)$ — неперервні на $[0, 1]$ функції, для яких $g_1(t) \le g_2(t)$ при $t \in [0, 1]$.

У даній статті доведено деякі теореми існування та єдиності екстремального елемента для величини (1.1); встановлено необхідну і достатню умови та критерій екстремального елемента g^* для величини (1.1), який є узагальненням відомого класичного критерію Колмогорова многочлена, що найменше відхиляється від заданої функції [41], на випадок задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення так званою Γ^*-множиною відносно g^*; розглянуто конкретизації цього критерію на випадок зіркової відносно g^*, в тому числі опуклої, множини, а також на випадок задачі відшукання величини (1.5), які становлять самостійний інтерес.

Зрозуміло, що задачу відшукання величини (1.1) можна записати в еквівалентній формі

$$\alpha_a^*(V) \;=\; \inf_{g\in V}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\|g(s)-y\|. \tag{1.8}$$

Це випливає з неперервності функції $F_z(y) = \|z-y\|$, $z \in X$, по y на X, компактнозначності відображення a та властивостей неперервної на компакті дійснозначної функції (див., наприклад, [42, с. 28]) та наступного твердження.

Твердження 1.1. *Для будь-якого* $g \in C(S, X)$ *функція*

$$\Phi_a^g(s) \;=\; \max_{y\in a(s)}\|g(s)-y\|, \quad s \in S,$$

є неперервною по s *на* S.

Доведення. Нехай $s_0 \in S$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки відображення $a \in C(S, K(X))$, то воно напівнеперервне в точці s_0 і зверху, і знизу (див., наприклад, [43, с. 96]). Звідси та з неперервності однозначного відображення g робимо висновок, що для околу $U_{\varepsilon/2}(0)$ нуля простору X радіуса $\varepsilon/2$ існує окіл $V(s_0)$ точки s_0 компакту S такий, що

$$a(s) \subset a(s_0) + U_{\varepsilon/2}(0), \quad a(s_0) \subset a(s) + U_{\varepsilon/2}(0), \quad \|g(s)-g(s_0)\| < \varepsilon/2$$

для всіх $s \in V(s_0)$.

Нехай $s \in V(s_0)$ та елемент $y_s \in a(s)$ такий, що

$$\Phi_a^g(s) \;=\; \max_{y\in a(s)}\|g(s)-y\| \;=\; \|g(s)-y_s\|.$$

На підставі співвідношення $a(s) \subset a(s_0) + U_{\varepsilon/2}(0)$ існують $y_{s_0}^s \in a(s_0)$ та

$z^s \in U_{\varepsilon/2}(0)$ такі, що $y_s = y^s_{s_0} + z^s$ З урахуванням цього для всіх $s \in V(s_0)$ одержимо

$$\Phi^g_a(s) - \Phi^g_a(s_0) = \|g(s) - y_s\| - \max_{y \in a(s_0)} \|g(s_0) - y\| \le$$

$$\le \|g(s) - y_s\| - \left\|g(s_0) - y^s_{s_0}\right\| \le \|g(s) - g(s_0)\| + \left\|z^s\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (1.9)$$

Нехай елемент $y_{s_0} \in a(s_0)$ такий, що

$$\Phi^g_a(s_0) = \max_{y \in a(s_0)} \|g(s_0) - y\| = \left\|g(s_0) - y_{s_0}\right\|.$$

Для $s \in V(s_0)$ внаслідок співвідношення $a(s_0) \subset a(s) + U_{\varepsilon/2}(0)$ існують $y^{s_0}_s \in a(s)$ та $z_s \in U_{\varepsilon/2}(0)$ такі, що $y_{s_0} = y^{s_0}_s + z_s$. Тому для всіх $s \in V(s_0)$

$$\Phi^g_a(s_0) - \Phi^g_a(s) = \left\|g(s_0) - y_{s_0}\right\| - \max_{y \in a(s)} \|g(s) - y\| \le$$

$$\le \left\|g(s_0) - y_{s_0}\right\| - \left\|g(s) - y^{s_0}_s\right\| \le \|g(s_0) - g(s)\| + \|z_s\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (1.10)$$

Із співвідношень (1.9), (1.10) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує окіл $V(s_0)$ точки s_0 компакту S такий, що для всіх $s \in V(s_0)$

$$\left|\Phi^g_a(s) - \Phi^g_a(s_0)\right| < \varepsilon.$$

Це означає, що функція $\Phi^g_a(s)$ є неперервною в будь-якій точці $s_0 \in S$.

Твердження доведено.

2. Деякі теореми існування екстремального елемента для величини (1.8). З урахуванням подання задачі відшукання величини (1.1) у вигляді (1.8) означення екстремального елемента для цієї величини можна сформулювати таким чином:

Якщо існує відображення $g^* \in V$ таке, що

$$\alpha^*_a(V) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\|g^*(s) - y\right\|,$$

то будемо називати його екстремальним елементом для величини (1.8).

Твердження 2.1. *Функція*

$$\Phi_a(g) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g(s) - y\|, \qquad g \in C(S, X),$$

є неперервною по g *на* $C(S, X)$.

Доведення. Нехай $g, g_0 \in C(S, X)$, $s_g \in S$ і

$$\Phi_a(g) = \max_{y \in a(s_g)} \left\|g(s_g) - y\right\|.$$

Тоді

$$\Phi_a(g) - \Phi_a(g_0) = \max_{y \in a(s_g)} \left\|g(s_g) - y\right\| - \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g_0(s) - y\| \le$$

$$\le \max_{y \in a(s_g)} \left\|g(s_g) - y\right\| - \max_{y \in a(s_g)} \left\|g_0(s_g) - y\right\| \le$$

$$\le \max_{y \in a(s_g)} \left(\left\|g(s_g) - y\right\| - \left\|g_0(s_g) - y\right\|\right) \le$$

$$\le \left\|g(s_g) - g_0(s_g)\right\| \le \max_{s \in S} \|(g - g_0)(s)\| = \|g - g_0\|. \quad (2.1)$$

Аналогічно доводиться, що

$$\Phi_a(g_0) - \Phi_a(g) \leq \|g - g_0\|. \tag{2.2}$$

На підставі нерівностей (2.1) і (2.2) можна зробити висновок, що

$$|\Phi_a(g) - \Phi_a(g_0)| \leq \|g - g_0\|.$$

З цієї нерівності й випливає неперервність функції $\Phi_a(g)$ в кожній точці $g_0 \in$ $\in C(S, X)$.

Твердження доведено.

Теорема 2.1. *Якщо V — замкнена локально компактна множина простору $C(S, X)$, то екстремальний елемент для величини* (1.8) *існує.*

Доведення. Нехай $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ — екстремальна послідовність для величини (1.8), тобто $g_m \in V$, $m = 1, 2, \dots$, і

$$\lim_{m\to\infty} \Phi_a(g_m) = \lim_{m\to\infty} \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \|g_m(s) - y\| = \alpha_a^*(V). \tag{2.3}$$

Для всіх $m = 1, 2, \dots$, $s \in S$ маємо

$$\|g_m(s)\| \leq \max_{y\in a(s)} \|g_m(s) - y\| + \max_{y\in a(s)} \|y\| \leq$$

$$\leq \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \|g_m(s) - y\| + \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \|y\| =$$

$$= \Phi_a(g_m) + \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \|y\|.$$

Тому для всіх $m = 1, 2, \dots$

$$\|g_m\| = \max_{s\in S} \|g_m(s)\| \leq \Phi_a(g_m) + \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \|y\|.$$

Звідси з огляду на (2.3) робимо висновок, що $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю елементів множини V. Внаслідок локальної компактності та замкненості множини V з $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ можна вибрати збіжну до $g^* \in V$ підпослідовність $\{g_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (див., наприклад, [3, с. 21]). Беручи до уваги неперервність функції $\Phi_a(g)$ та рівність (2.3), отримуємо

$$\lim_{k\in\infty} \Phi_a(g_{m_k}) = \Phi_a(g^*) = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left\|g^*(s) - y\right\| = \alpha_a^*(V).$$

Це означає, що g^* є екстремальним елементом для величини (1.8).

Теорему доведено.

Наслідок **2.1.** *Будь-яка компактна множина V простору $C(S, X)$ є множиною існування екстремального елемента для задачі відшукання величини* (1.8).

Наслідок **2.2.** *Будь-який скінченновимірний підпростір V простору $C(S, X)$ є множиною існування екстремального елемента для величини* (1.8).

Справедливість наслідку випливає з теореми 2.1, оскільки скінченновимірний підпростір нормованого простору є локально компактною та замкненою множиною (див., наприклад, [3, с. 21]).

Розглянемо частковий випадок задачі відшукання величини (1.8), коли S є одноелементною множиною, а саме, задачу відшукання величини (1.5). Як зазначалось вище, в цьому випадку задача (1.8) є задачею відшукання чебишовського центра компакту K у множині V. У цьому випадку елемент g^* множини V є екстремальним елементом для величини (1.5), якщо

$$\max_{y\in K} \left\|g^* - y\right\| = \inf_{g\in V} \max_{y\in K} \|g - y\|.$$

Зрозуміло, що з теореми 2.1 випливає, що коли V є локально компактною замкненою множиною простору X, в тому числі і скінченновимірним підпростором простору X, то екстремальний елемент для величини (1.5) існує.

Теорема 2.2. *Якщо* X — *банахів простір, в якому для довільних* x, y *має місце „нерівність паралелограма" вигляду*

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 \geq c\|x-y\|^2, \quad c > 0, \tag{2.4}$$

і V — *замкнена опукла множина цього простору, то екстремальний елемент для величини* (1.5) *існує, причому єдиний.*

Доведення. Згідно з означенням інфімуму для будь-якого натурального n існує $g_n \in V$ таке, що

$$\alpha^*(V) \leq \max_{y\in K}\|g_n - y\| < \alpha^*(V) + \frac{1}{n}. \tag{2.5}$$

Переконаємося, що $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною послідовністю. Оскільки $g_n, g_m \in V$ для всіх натуральних n і m, а V є опуклою множиною простору X, то $(g_n + g_m)/2 \in V$. Нехай

$$\max_{y\in K}\left\|\frac{g_n+g_m}{2} - y\right\| = \left\|\frac{g_n+g_m}{2} - y_{(n,m)}\right\|, \quad \text{де} \quad y_{(n,m)} \in K.$$

Використаємо далі „нерівність паралелограма" (2.4), поклавши в ній $x = g_n - y_{(n,m)}$, $y = g_m - y_{(n,m)}$. Згідно з цією нерівністю

$$2\left\|g_n - y_{(n,m)}\right\|^2 + 2\left\|g_m - y_{(n,m)}\right\|^2 - \left\|g_n + g_m - 2y_{(n,m)}\right\|^2 \geq c\|g_n - g_m\|^2. \tag{2.6}$$

Оскільки $(g_n + g_m)/2 \in V$, то

$$\left\|g_n + g_m - 2y_{(n,m)}\right\|^2 = 4\left\|\frac{g_n+g_m}{2} - y_{(n,m)}\right\|^2 =$$

$$= 4\left(\max_{y\in K}\left\|\frac{g_n+g_m}{2} - y\right\|\right)^2 \geq 4(\alpha^*(V))^2.$$

Звідси та з нерівностей (2.5), (2.6) випливає

$$c\|g_n - g_m\|^2 \leq 2\left\|g_n - y_{(n,m)}\right\|^2 + 2\left\|g_m - y_{(n,m)}\right\|^2 - 4(\alpha^*(V))^2 \leq$$

$$\leq 2\left(\alpha^*(V) + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(\alpha^*(V) + \frac{1}{m}\right)^2 - 4(\alpha^*(V))^2 =$$

$$= 4(\alpha^*(V))\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}.$$

Тому

$$\|g_n - g_m\| \leq \left(\frac{4\alpha^*(V)}{c}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) + \frac{2}{cn^2} + \frac{2}{cm^2}\right)^{1/2}.$$

Враховуючи, що права частина останньої нерівності прямує до нуля при $n \to \infty$, $m \to \infty$, робимо висновок, що $\lim\limits_{\substack{n\to\infty,\\ m\to\infty}}\|g_n - g_m\| = 0$. Це означає, що $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною послідовністю. Внаслідок повноти простору X і замкненості V вона збігається до деякого $g^* \in V$. На підставі неперервності по g функції $\max\limits_{y\in K}\|g - y\|$ (див. твердження 2.1) звідси та з нерівності (2.5) одержуємо

$$\lim_{n\to\infty} \max_{y\in K} \| g_n - y \| = \max_{y\in K} \left\| g^* - y \right\| = \alpha^*(V).$$

Отже, g^* є екстремальним елементом для величини (1.5).

Переконаємось у єдиності цього елемента. Нехай для деякого $\bar{g} \in V$ також має місце рівність

$$\max_{y\in K} \| \bar{g} - y \| = \alpha^*(V). \tag{2.7}$$

Позначимо через y^* елемент компакту K, для якого

$$\max_{y\in K} \left\| \frac{g^* + \bar{g}}{2} - y \right\| = \left\| \frac{g^* + \bar{g}}{2} - y^* \right\|.$$

Оскільки $(g^* + \bar{g})/2 \in V$, то

$$\left\| \frac{g^* + \bar{g}}{2} - y^* \right\| \ge \alpha^*(V). \tag{2.8}$$

Поклавши в нерівності (2.4) $x = g^* - y^*$, $y = \bar{g} - y^*$, отримаємо

$$2\left\| g^* - y^* \right\|^2 + 2\left\| \bar{g} - y^* \right\|^2 - \left\| g^* + \bar{g} - 2y^* \right\|^2 \ge c\left\| g^* - \bar{g} \right\|^2.$$

Звідси, використавши (2.7), (2.8), одержимо

$$\left\| g^* - \bar{g} \right\| \le \left(\frac{1}{c}\left(2\left(\max_{y\in K} \left\| g^* - y \right\| \right)^2 + 2\left(\max_{y\in K} \| \bar{g} - y \| \right)^2 - 4\left\| \frac{g^* + \bar{g}}{2} - y^* \right\|^2 \right) \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{c}\left(4(\alpha^*(V))^2 - 4(\alpha^*(V))^2 \right) \right)^{1/2} = 0.$$

Отже, $\left\| g^* - \bar{g} \right\| = 0$. Тому $\bar{g} = g^*$.

Теорему доведено.

***Наслідок* 2.3.** *Якщо X — гільбертів простір, а V — замкнена опукла множина цього простору, то екстремальний елемент для величини* (1.5) *існує, причому єдиний.*

Справедливість цього наслідку випливає з того, що гільбертів простір є повним і в ньому виконується рівність паралелограма: для будь-яких $x, y \in X$

$$2\| x \|^2 + 2\| y \|^2 - \| x + y \|^2 = \| x - y \|^2$$

(див., наприклад, [44, с. 64]).

***Наслідок* 2.4.** *Якщо $X = l_p$, $1 < p \le 2$, і V — замкнена опукла множина простору X, то екстремальний елемент для величини* (1.5) *існує, причому єдиний.*

Справедливість наслідку випливає з того, що l_p, $1 < p \le 2$, є повним простором (див., наприклад, [45, с. 78]) і в ньому має місце „нерівність паралелограма” [46]: для будь-яких $x, y \in l_p$, $1 < p \le 2$,

$$2\| x \|^2 + 2\| y \|^2 - \| x + y \|^2 \ge (p-1)\| x - y \|^2.$$

3. Необхідні і достатні умови та критерій екстремального елемента для величини (1.8). Позначимо через X^* простір, спряжений з X, через B^* замкнену одиничну кулю простору X^*: $B^* = \left\{ f : f \in X^*, \| f \| \le 1 \right\}$, а через $E(B^*)$ множину крайніх точок B^*. При цьому $f \in B^*$ називається крайньою точкою

B^*, якщо із співвідношень $f_1, f_2 \in B^*$, $f = \alpha f_1 + (1-\alpha) f_2$, $0 < \alpha < 1$, випливає $f_1 = f_2$ (див., наприклад, [44, с. 497]).

Згідно з теоремою Крейна – Мільмана (див., наприклад, [44, с. 497]) $E(B^*) \neq \varnothing$.

Твердження 3.1. *Для будь-якого елемента* $z \in X$ *множина* $B_z^* = \{f : f \in \in B^*,\ f(z) = \|z\|\}$ *є опуклою слабко* компактною підмножиною* B^* *та існує функціонал* $f_z \in E(B^*)$ *такий, що*

$$f_z(z) = \|z\|.$$

Доведення. Як відомо (див., наприклад, [44, с. 156]), існує елемент $f \in B^*$ такий, що $f(z) = \|z\|$. Тому $B_z^* \neq \varnothing$. Опуклість множини B_z^* є очевидною.

Нехай $\bar{f}$ — гранична точка B_z^* в розумінні слабкої* топології простору X^*. Тоді околи $\bar{f}$ вигляду

$$O_\varepsilon(\bar{f}) = \left\{f : f \in X^*,\ |f(z) - \bar{f}(z)| < \varepsilon\right\},$$

де ε — довільне додатне число, містять елементи f_ε із B_z^*. Для цих елементів маємо

$$|f_\varepsilon(z) - \bar{f}(z)| = \big|\|z\| - \bar{f}(z)\big| < \varepsilon.$$

Внаслідок довільності ε звідси одержуємо $\bar{f}(z) = \|z\|$.

Оскільки $\bar{f}$ — гранична точка для множини B_z^*, що включається у B^*, то $\bar{f}$ є граничною точкою для B^*. Внаслідок слабкої* компактності B^* (див., наприклад, [23, с. 35]) $\bar{f} \in B^*$. Тоді $\bar{f} \in B_z^*$. Отже, B_z^* є слабко* замкненою підмножиною слабко* компактної множини B^*. Тому B_z^* є слабко* компактною підмножиною B^*. Врахувавши опуклість B_z^*, звідси можна зробити висновок, що B_z^* має принаймні одну крайню точку (див., наприклад, [44, с. 497]). Нехай далі

$$f = \alpha f_1 + (1-\alpha) f_2, \quad \text{де} \quad f \in B_z^*, \quad f_1, f_2 \in B^*, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Тоді

$$f(z) = \|z\| = \alpha f_1(z) + (1-\alpha) f_2(z) \le \alpha\|z\| + (1-\alpha)\|z\| = \|z\|.$$

Оскільки $\alpha \in (0, 1)$, то звідси одержуємо $f_1(z) = \|z\|$ і $f_2(z) = \|z\|$. Тому $f_1 \in B_z^*$, $f_2 \in B_z^*$. Це означає, що B_z^* є крайньою підмножиною B^*. Оскільки кожна крайня точка крайньої підмножини є крайньою точкою самої множини (див., наприклад, [4, с. 401]) і множина крайніх точок B_z^* непорожня, то існує $f_z \in E(B^*)$ такий, що $f_z(z) = \|z\|$.

Твердження доведено.

У подальшому будемо припускати, що обмеження $y \in V$ в задачі відшукання величини (1.8) є суттєвим, тобто

$$\alpha_a^* < \alpha_a^*(V), \tag{3.1}$$

де

$$\alpha_a^* = \inf_{g \in C(S,X)} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g(s) - y\|.$$

Для $a \in C(S, K(X))$ та $g^* \in V$ покладемо

$$\alpha_a^{g^*} = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\|,$$

$$C_a^{g^*} = \left\{ g : g \in C(S, X),\ \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \| g(s) - y \| < \alpha_a^{g^*} \right\},$$

$$S_a^{g^*} = \left\{ s : s \in S,\ \max_{y\in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\| = \alpha_a^{g^*} \right\},$$

$$a_s^{g^*} = \left\{ y : y \in a(s),\ \left\| g^*(s) - y \right\| = \max_{y\in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\| \right\}, \qquad s \in S_a^{g^*},$$

$$B_a^*(g^*, s, y) = \left\{ f : f \in B^*,\ f(g^*(s) - y) = \left\| g^*(s) - y \right\| \right\}, \qquad s \in S_a^{g^*}, \qquad y \in a_s^{g^*},$$

$$E(B_a^*(g^*, s, y)) = \left\{ f : f \in E(B^*),\ f(g^*(s) - y) = \left\| g^*(s) - y \right\| \right\}, \quad s \in S_a^{g^*}, \quad y \in a_s^{g^*}.$$

Крім того, згідно з [4, с. 12, 13] через $\Gamma(C_a^{g^*}, g^*)$ позначимо конус внутрішніх напрямків для $C_a^{g^*}$ із g^*, а через $\Gamma^*(V, g^*)$ — конус граничних напрямків для V із g^*. При цьому $g \in \Gamma(C_a^{g^*}, g^*)$, якщо існують окіл $O(g)$ точки g та дійсне число $\varepsilon > 0$ такі, що $g^* + th \in C_a^{g^*}$ для всіх $h \in O(g)$ і всіх $t \in (0, \varepsilon)$, а $g \in \Gamma^*(V, g^*)$, якщо для довільного околу $O(g)$ точки g та дійсного числа $\varepsilon > 0$ існують такі $h \in O(g)$ та $t \in (0, \varepsilon)$, що $g^* + th \in V$.

З умови (3.1) випливає, що $C_a^{g^*} \neq \varnothing$. Співвідношення $S_a^{g^*} \neq \varnothing$, $a_s^{g^*} \neq \varnothing$, $s \in S_a^{g^*}$, $B_a^*(g^*, s, y) \neq \varnothing$, $E(B_a^*(g^*, s, y)) \neq \varnothing$, $s \in S_a^{g^*}$, $y \in a_s^{g^*}$, мають місце на підставі твердження 1.1, неперервності функції $F_z(y) = \| z - y \|$, $z \in X$, на X і твердження 3.1 відповідно.

Твердження 3.2. *Функція* $\Phi_a(g) = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \| g(s) - y \|$, $g \in C(S, X)$, *є опуклою по* g *на* $C(S, X)$.

Твердження 3.3. *Нехай* $g^* \in V$. *Функції* $\varphi_s^a(g) = \max_{y\in a(s)} \| g(s) - y \| - \alpha_a^{g^*}$, $s \in S$, *є опуклими та неперервними на* $C(S, X)$.

Твердження 3.4. *Нехай* $g^* \in V$, $\varphi_s^a(g) = \max_{y\in a(s)} \| g(s) - y \| - \alpha_a^{g^*}$, $s \in S$. *Відображення* $T(g, s) = \varphi_s^a(g)$, $(g, s) \in C(S, X) \times S$, *є неперервним по* (g, s) *на* $C(S, X) \times S$.

Доведення. Зафіксуємо $(g_0, s_0) \in C(S, X) \times S$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки $a \in C(S, K(X))$, $g_0 \in C(S, X)$, то для околу $U_{\varepsilon/3}(0)$ нуля простору X радіуса $\varepsilon/3$ існує окіл $V(s_0)$ точки s_0 компакту S такий, що

$$a(s) \subset a(s_0) + U_{\varepsilon/3}(0), \qquad a(s_0) \subset a(s) + U_{\varepsilon/3}(0), \qquad \| g_0(s) - g_0(s_0) \| < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всіх $s \in V(s_0)$. Нехай, крім того,

$$A(g_0) = \left\{ g : g \in C(S, X),\ \| g - g_0 \| < \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

— окіл точки g_0 простору $C(S, X)$ радіуса $\varepsilon/3$. Для $(g, s) \in A(g_0) \times V(s_0)$ покладемо $\max_{y\in a(s)} \| g(s) - y \| = \| g(s) - y_s(g) \|$, де $y_s(g) \in a(s)$. Внаслідок співвідношення $a(s) \subset a(s_0) + U_{\varepsilon/3}(0)$ існують $y_{s_0}^s(g) \in a(s_0)$, $z^s(g) \in U_{\varepsilon/3}(0)$ такі, що $y_s(g) = y_{s_0}^s(g) + z^s(g)$. З урахуванням цього одержуємо

$$\varphi_s^a(g) - \varphi_{s_0}^a(g_0) = \max_{y \in a(s)} \|g(s) - y\| - \max_{y \in a(s_0)} \|g_0(s_0) - y\| =$$

$$= \|g(s) - y_s(g)\| - \max_{y \in a(s_0)} \|g_0(s_0) - y\| \le \|g(s) - y_s(g)\| - \left\|g_0(s_0) - y_{s_0}^s(g)\right\| \le$$

$$\le \|g(s) - g_0(s_0)\| + \left\|z^s(g)\right\| \le \|g(s) - g_0(s)\| + \|g_0(s) - g_0(s_0)\| + \left\|z^s(g)\right\| <$$

$$< \|g - g_0\| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Отже, для всіх $(g, s) \in A(g_0) \times V(s_0)$

$$\varphi_s^a(g) - \varphi_{s_0}^a(g_0) < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Нехай далі $\max_{y \in a(s_0)} \|g_0(s_0) - y\| = \left\|g_0(s_0) - y_{s_0}(g_0)\right\|$, де $y_{s_0}(g_0) \in a(s_0)$. Оскільки для $s \in V(s_0)$ $a(s_0) \subset a(s) + U_{\varepsilon/3}(0)$, то для кожного $s \in V(s_0)$ існують $y_s^{s_0}(g_0) \in a(s)$ та $z_s(g_0) \in U_{\varepsilon/3}(0)$ такі, що $y_{s_0}(g_0) = y_s^{s_0}(g_0) + z_s(g_0)$. Тоді для всіх $(g, s) \in A(g_0) \times V(s_0)$

$$\varphi_{s_0}^a(g_0) - \varphi_s^a(g) = \max_{y \in a(s_0)} \|g_0(s_0) - y\| - \max_{y \in a(s)} \|g(s) - y\| \le$$

$$\le \left\|g_0(s_0) - y_{s_0}(g_0)\right\| - \left\|g(s) - y_s^{s_0}(g_0)\right\| \le \|g_0(s_0) - g(s)\| + \|z_s(g_0)\| \le$$

$$\le \|g_0(s) - g_0(s_0)\| + \|g(s) - g_0(s)\| + \|z_s(g_0)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \|g - g_0\| + \frac{\varepsilon}{3} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Отже, для всіх $(g, s) \in A(g_0) \times V(s_0)$

$$\varphi_{s_0}^a(g_0) - \varphi_s^a(g) < \varepsilon. \tag{3.3}$$

З урахуванням (3.2) та (3.3) робимо висновок, що для всіх $(g, s) \in A(g_0) \times V(s_0)$ справджується нерівність

$$|T(g, s) - T(g_0, s_0)| = \left|\varphi_s^a(g) - \varphi_{s_0}^a(g_0)\right| < \varepsilon.$$

Це й означає неперервність відображення $T(g, s)$ на $C(S, X) \times S$.

Твердження доведено.

Аналогічно доводяться наступні твердження.

Твердження 3.5. *Нехай* $g^* \in V$, $s \in S$. *Відображення*

$$(g, y) \in C(S, X) \times a(s) \to \|g(s) - y\| - \alpha_a^{g^*}$$

є неперервним на $C(S, X) \times a(s)$.

Твердження 3.6. *Нехай* $g^* \in V$, $s \in S_a^{g^*}$, $y \in a_s^{g^*}$. *Відображення*

$$(g, f) \in C(S, X) \times B^* \to \operatorname{Re} f(g(s) - y) - \alpha_a^{g^*}$$

є неперервним на $C(S, X) \times B^*$, *якщо на* $C(S, X)$ *розглядати сильну, а на* B^* *— слабку* топології.*

Твердження 3.7. *Нехай* $f \in X^*$, $s \in S$, $g^* \in C(S, X)$,

$$\beta = \operatorname{Re} f(g^*(s)), \qquad \{g : g \in C(S, X),\ \operatorname{Re} f(g(s)) < \beta\} \neq \varnothing,$$
$$D = \{g : g \in C(S, X),\ \operatorname{Re} f(g(s)) \leq \beta\}.$$

Тоді

$$\Gamma(D, g^*) = \{g : g \in C(S, X),\ \operatorname{Re} f(g(s)) < 0\}.$$

Доведення. Переконаємося, що

$$\operatorname{Int} D = \{g : g \in C(S, X),\ \operatorname{Re} f(g(s)) < \beta\}, \tag{3.4}$$

де $\operatorname{Int} D$ — внутрішність множини D.

Справді, нехай $g_0 \in \operatorname{Int} D$. Тоді існує $\delta > 0$ таке, що $\operatorname{Re} f(g(s)) \leq \beta$ для всіх $g \in O(g_0, \delta) = \{g : g \in C(S, X),\ \|g - g_0\| < \delta\}$, в тому числі $\operatorname{Re} f(g_0(s)) \leq \beta$.

Якщо припустити, що $\operatorname{Re} f(g_0(s)) = \beta$, то для $\bar{g} \in C(S, X)$ такого, що $\operatorname{Re} f(\bar{g}(s)) < \beta$, та достатньо малих додатних чисел t маємо

$$g_0 + t(g_0 - \bar{g}) \in O(g_0, \delta)$$

і

$$\operatorname{Re} f\big((g_0 + t(g_0 - \bar{g}))(s)\big) = \operatorname{Re} f(g_0(s)) + t(\operatorname{Re} f(g_0(s)) -$$
$$- \operatorname{Re} f(\bar{g}(s))) = \beta + t(\beta - \operatorname{Re} f(\bar{g}(s))) > \beta,$$

що суперечить включенню $O(g_0, \delta) \subset D$.

Одержана суперечність дозволяє зробити висновок, що

$$\operatorname{Int} D \subset \{g : g \in C(S, X),\ \operatorname{Re} f(g(s)) < \beta\}. \tag{3.5}$$

Переконаємось у справедливості протилежного включення.

Оскільки відображення $g \in C(S, X) \to \operatorname{Re} f(g(s))$ є лінійним і неперервним на $C(S, X)$, то з нерівності $\operatorname{Re} f(g_0(s)) < \beta$, $g_0 \in C(S, X)$, випливає, що $\operatorname{Re} f(g(s)) < \beta$ для деякого околу $A(g_0)$ точки g_0. Тому

$$\{g : g \in C(S, X),\ \operatorname{Re} f(g(s)) < \beta\} \subset \operatorname{Int} D. \tag{3.6}$$

З (3.5) та (3.6) випливає рівність (3.4). З урахуванням (3.4) та твердження 1.2.5 [4, с. 16] робимо висновок, що

$$\Gamma(D, g^*) = \Gamma(\operatorname{Int} D, g^*) = \Gamma\big(\{g : g \in C(S, X),\ \operatorname{Re} f(g(s)) < \beta\}, g^*\big).$$

На підставі твердження 1.3.7 [4, с. 21]

$$\Gamma\big(\{g : g \in C(S, X),\ \operatorname{Re} f(g(s)) < \beta\}, g^*\big) = \{g : g \in C(S, X),\ \operatorname{Re} f(g(s)) < 0\}.$$

Твердження доведено.

Теорема 3.1. *Нехай* $g^* \in V$. *Має місце рівність*

$$\Gamma(C_a^{g^*}, g^*) = \bigcap_{s \in S_a^{g^*}} \bigcap_{y \in a_s^{g^*}} \bigcap_{f \in B_a^{g^*}(g^*, s, y)} \{g : g \in C(S, X),\ \operatorname{Re} f(g(s)) < 0\}. \tag{3.7}$$

Доведення. Нехай, як і вище, для $s \in S$

$$\varphi_s^a(g) = \max_{y \in a(s)} \|g(s) - y\| - \alpha_a^{g^*}.$$

Позначимо

$$C_{g^*}^a(s) = \{g : g \in C(S, X),\ \varphi_s^a(g) < 0\}, \qquad s \in S.$$

Маємо

$$\bigcap_{s\in S} C_a^{g^*}(s) = \bigcap_{s\in S}\left\{g : g \in C(S,X),\ \max_{y\in a(s)}\|g(s)-y\| < \alpha_a^{g^*}\right\} =$$

$$= \left\{g : g \in C(S,X),\ \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\|g(s)-y\| < \alpha_a^{g^*}\right\} = C_a^{g^*}. \qquad (3.8)$$

Оскільки $C_a^{g^*} \neq \varnothing$, то і $\bigcap_{s\in S} C_a^{g^*}(s) \neq \varnothing$.

Позначимо

$$C_{g^*}^a(s) = \left\{g : g \in C(S,X),\ \varphi_s^a(g) \le 0\right\}, \quad s \in S.$$

Внаслідок того, що функції $\varphi_s^a(g)$, $s \in S$, опуклі і неперервні на $C(S,X)$ (див. твердження 3.3), S — компакт, відображення $T(g,s) = \varphi_s^a(g)$, $(g,s) \in C(S,X) \times \times S$, є неперервним на $C(S,X) \times S$ (див. твердження 3.4), $\bigcap_{s\in S} C_a^{g^*}(s) \neq \varnothing$, за теоремою 1.8.8 [4, с. 40]

$$\Gamma\left(\bigcap_{s\in S} C_{g^*}^a(s), g^*\right) = \bigcap_{s\in S_a^{g^*}} \Gamma\left(C_{g^*}^a(s), g^*\right). \qquad (3.9)$$

На підставі твердження 1.8.6 [4, с. 39], неперервності й опуклості (див. твердження 3.3) функцій $\varphi_s^a(g)$, $s \in S$, на $C(S,X)$, співвідношення $\bigcap_{s\in S} C_a^{g^*}(s) \neq \varnothing$ та рівності (3.8) одержуємо

$$\operatorname{Int}\left(\bigcap_{s\in S} C_{g^*}^a(s)\right) = \bigcap_{s\in S}\operatorname{Int}\left(C_{g^*}^a(s)\right) = \bigcap_{s\in S} C_a^{g^*}(s) = C_a^{g^*}. \qquad (3.10)$$

Враховуючи (3.9), (3.10) та твердження 1.2.5 [4, с. 16], маємо

$$\Gamma(C_a^{g^*}, g^*) = \Gamma\left(\operatorname{Int}\left(\bigcap_{s\in S} C_{g^*}^a(s)\right), g^*\right) =$$

$$= \Gamma\left(\bigcap_{s\in S} C_{g^*}^a(s), g^*\right) = \bigcap_{s\in S_a^{g^*}} \Gamma\left(C_{g^*}^a(s), g^*\right). \qquad (3.11)$$

Охарактеризуємо тепер конуси $\Gamma(C_{g^*}^a(s), g^*)$, $s \in S_a^{g^*}$. Бачимо, що для $s \in S_a^{g^*}$, $y \in a(s)$ функції $g \in C(S,X) \to \|g(s)-y\| - \alpha_a^{g^*}$ є опуклими та неперервними на $C(S,X)$;

$$\bigcap_{y\in a(s)} \left\{g : g \in C(S,X), \|g(s)-y\| - \alpha_a^{g^*} < 0\right\} \neq \varnothing;$$

$a(s)$ — компакт; відображення $(g,y) \in C(S,X) \times a(s) \to \|g(s)-y\| - \alpha_a^{g^*}$ є неперервним на $C(S,X) \times a(s)$ (див. твердження 3.5). Тоді згідно з теоремою 1.8.8 [4, с. 40] для всіх $s \in S_a^{g^*}$ отримуємо

$$\Gamma(C_{g^*}^a(s), g^*) = \bigcap_{y\in a_s^{g^*}} \Gamma\left(\left\{g : g \in C(S,X), \|g(s)-y\| \le \alpha_a^{g^*}\right\}, g^*\right). \qquad (3.12)$$

Охарактеризуємо тепер для всіх $s \in S_a^{g^*}$, $y \in a_s^{g^*}$ конус

$$\Gamma\left(\left\{g : g \in C(S, X),\ \|g(s) - y\| \leq \alpha_a^{g^*}\right\}, g^*\right).$$

Бачимо, що для фіксованих $s \in S_a^{g^*}$, $y \in a_s^{g^*}$, $f \in B^*$ функції $g \in C(S, X) \to$ $\to \operatorname{Re} f(g(s) - y) - \alpha_a^{g^*}$ є опуклими та неперервними на $C(S, X)$;

$$\bigcap_{f \in B^*} \left\{g : g \in C(S, X),\ \operatorname{Re} f(g(s) - y) - \alpha_a^{g^*} < 0\right\} \supset C_a^{g^*} \neq \varnothing;$$

B^* — слабко* компактна множина простору X^*; відображення $(g, f) \in C(S, X) \times B^* \to \operatorname{Re} f(g(s) - y) - \alpha_a^{g^*}$ є неперервним на $C(S, X) \times B^*$ (див. твердження 3.6). Тоді на підставі теореми 1.8.8 [4, с. 40] та твердження 3.7 для всіх $s \in S_a^{g^*}$, $y \in a_s^{g^*}$ отримуємо

$$\Gamma\left(\left\{g : g \in C(S, X),\ \|g(s) - y\| \leq \alpha_a^{g^*}\right\}, g^*\right) =$$

$$= \Gamma\left(\bigcap_{f \in B^*} \left\{g : g \in C(S, X),\ \operatorname{Re} f(g(s) - y) \leq \alpha_a^{g^*}\right\}, g^*\right) =$$

$$= \bigcap_{f \in B_a^*(g^*, s, y)} \Gamma\left(\left\{g : g \in C(S, X),\ \operatorname{Re}(f(g(s)) - y) \leq \alpha_a^{g^*}\right\}, g^*\right) =$$

$$= \bigcap_{f \in B_a^*(g^*, s, y)} \left\{g \in C(S, X),\ \operatorname{Re} f(g(s)) < 0\right\}. \tag{3.13}$$

Із (3.11) – (3.13) робимо висновок про справедливість рівності (3.7).

Теорему доведено.

Теорема 3.2. *Нехай $g^* \in V$. Має місце рівність*

$$\Gamma(C_a^{g^*}, g^*) = \bigcap_{s \in S_a^{g^*}} \bigcap_{y \in a_s^{g^*}} \bigcap_{f \in E(B_a^*(g^*, s, y))} \left\{g : g \in C(S, X),\ \operatorname{Re} f(g(s)) < 0\right\}. \tag{3.14}$$

Доведення. Позначимо праву частину рівності (3.14) через $\Gamma_a^{g^*}$. Якщо $g \in$ $\in \Gamma(C_a^{g^*}, g^*)$, то згідно з теоремою 3.1 для всіх $s \in S_a^{g^*}$, $y \in a_s^{g^*}$, $f \in B_a^*(g^*, s, y)$ виконується нерівність $\operatorname{Re} f(g(s)) < 0$; ця нерівність виконується і для $f \in$ $\in E(B_a^*(g^*, s, y))$. Тому

$$\Gamma(C_a^{g^*}, g^*) \subset \Gamma_a^{g^*}.$$

Нехай тепер $g \in \Gamma_a^{g^*}$, $s \in S_a^{g^*}$, $y \in a_s^{g^*}$. Тоді $\operatorname{Re} f(g(s)) < 0$ для всіх $f \in$ $\in E(B_a^*(g^*, s, y))$. Згідно з твердженням 3.1 $B_a^*(g^*, s, y)$ є опуклою слабко* компактною підмножиною B^*. Функція $f \in X^* \to \operatorname{Re} f(g(s))$ є неперервною по f на X^* у слабкій* топології простору X^*. Тоді згідно з узагальненням теореми Вейєрштрасса (див., наприклад, [42, с. 28]) існує $\tilde{f} \in B_a^*(g^*, s, y)$ така, що

$$\max_{f \in B_a^*(g^*, s, y)} \operatorname{Re} f(g(s)) = \operatorname{Re} \tilde{f}(g(s)) = \tilde{c}.$$

Переконаємося, що множина

$$B_{\tilde{c}}^* = \left\{f : f \in B_a^*(g^*, s, y),\ \operatorname{Re} f(g(s)) = \tilde{c}\right\}$$

є опуклою слабко* замкненою крайньою підмножиною множини $B_a^*(g^*, s, y)$. Опуклість $B_{\tilde{c}}^*$ є очевидною.

Нехай f_0 — гранична точка $B_{\tilde{c}}^*$ у розумінні слабкої* топології простору X^*. Внаслідок слабкої* компактності множини $B_a^*(g^*, s, y)$ (див. твердження 3.1) $f_0 \in B_a^*(g^*, s, y)$. Крім того, для довільного $\varepsilon > 0$ окіл

$$\left\{ f : f \in X^*, \ \left| f(g(s)) - f_0(g(s)) \right| < \varepsilon \right\}$$

точки f_0 містить точки $f_\varepsilon \in B_{\tilde{c}}^*$. Для цих точок маємо

$$\left| \operatorname{Re} f_\varepsilon(g(s)) - \operatorname{Re} f_0(g(s)) \right| = \left| \tilde{c} - \operatorname{Re} f_0(g(s)) \right| \le \left| f_\varepsilon(g(s)) - f_0(g(s)) \right| < \varepsilon.$$

Звідси на підставі довільності $\varepsilon > 0$ робимо висновок, що $\operatorname{Re} f_0(g(s)) = \tilde{c}$. Отже, $f_0 \in B_{\tilde{c}}^*$. Слабку* замкненість $B_{\tilde{c}}^*$ встановлено.

Нехай $f \in B_{\tilde{c}}^*$ і $f = \alpha f_1 + (1-\alpha) f_2$, де $f_1, f_2 \in B_a^*(g^*, s, y)$, $\alpha \in (0, 1)$. Маємо

$$\operatorname{Re} f(g(s)) = \tilde{c} = \alpha \operatorname{Re} f_1(g(s)) + (1-\alpha) \operatorname{Re} f_2(g(s)) \le \alpha\tilde{c} + (1-\alpha)\tilde{c} = \tilde{c}.$$

Звідси випливає, що $\operatorname{Re} f_1(g(s)) = \tilde{c}$ і $\operatorname{Re} f_2(g(s)) = \tilde{c}$. Тому $f_1 \in B_{\tilde{c}}^*$, $f_2 \in B_{\tilde{c}}^*$. Це й означає, що $B_{\tilde{c}}^*$ є крайньою підмножиною $B_a^*(g^*, s, y)$.

Оскільки $B_a^*(g^*, s, y)$ є слабко* компактною множиною простору X^*, а $B_{\tilde{c}}^*$ — її слабко* замкнена підмножина, то $B_{\tilde{c}}^*$ є опуклою слабко* компактною множиною. Тоді $B_{\tilde{c}}^*$ містить принаймні одну крайню точку $\hat{f}$ (див., наприклад, [44, с. 497]). Оскільки $B_{\tilde{c}}^*$ є крайньою підмножиною множини $B_a^*(g^*, s, y)$, то

$$\hat{f} \in E\big(B_a^*(g^*, s, y)\big) \quad \text{і} \quad \operatorname{Re} \hat{f}(g(s)) = \tilde{c}.$$

Але ж для всіх $f \in E\big(B_a^*(g^*, s, y)\big)$

$$\operatorname{Re} f(g(s)) < 0.$$

Тому $\operatorname{Re} \hat{f}(g(s)) = \tilde{c} < 0$. Отже, $\max\limits_{f \in B_a^*(g^*, s, y)} \operatorname{Re} f(g(s)) = \tilde{c} < 0$.

Звідси випливає, що $\operatorname{Re} f(g(s)) < 0$ для всіх $f \in B_a^*(g^*, s, y)$. Згідно з теоремою 3.1 $g \in \Gamma(C_a^{g^*}, g^*)$. Тому $\Gamma_a^{g^*} \subset \Gamma(C_a^{g^*}, g^*)$, що разом із співвідношенням $\Gamma(C_a^{g^*}, g^*) \subset \Gamma_a^{g^*}$, встановленим раніше, дозволяє зробити висновок про справедливість рівності (3.14).

Теорему доведено.

Теорема 3.3. *Нехай V — довільна множина простору $C(S, X)$. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним для величини* (1.8), *необхідно, щоб не існувало такого елемента $z \in \Gamma^*(V, g^*)$, що для всіх $s \in S_a^{g^*}$, $y \in a_s^{g^*}$, $f \in E(B_a^*(g^*, s, y))$ справджується нерівність* $\operatorname{Re} f(z(s)) < 0$.

Доведення. Нехай g^* — екстремальний елемент для величини (1.8). Згідно з теоремою 1.4.1 [4, с. 22] має місце співвідношення $\Gamma(C_a^{g^*}, g^*) \cap \Gamma^*(V, g^*) = \varnothing$. Звідси, враховуючи (3.14), робимо висновок, що не існує $z \in \Gamma^*(V, g^*)$, для якого $\operatorname{Re} f(z(s)) < 0$ для всіх $s \in S_a^{g^*}$, $y \in a_s^{g^*}$, $f \in E(B_a^*(g^*, s, y))$.

У протилежному випадку отримали б, що $\Gamma(C_a^{g^*}, g^*) \cap \Gamma^*(V, g^*) \ne \varnothing$.

Теорему доведено.

Легко зрозуміти, що теорему 3.3 можна сформулювати у такій еквівалентній формі.

Теорема 3.4. *Нехай* V — *довільна множина простору* $C(S, X)$. *Якщо* $g^* \in V$ *є екстремальним елементом для величини* (1.8), *то для будь-якого* $z \in \Gamma^*(V, g^*)$ *існують такі елементи* $s_z \in S$, $y_z \in a(s_z)$, $f_z \in E(B^*)$, *що*

$$f_z(g^*(s_z) - y_z) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\|,$$

$$\operatorname{Re} f_z(z(s_z)) \geq 0.$$

Опис конуса $\Gamma^*(V, g^*)$ з урахуванням специфіки множини V дозволяє в окремих часткових випадках значно конкретизувати встановлені вище необхідні умови екстремального елемента для величини (1.8).

Проілюструємо це на окремих прикладах.

Теорема 3.5. *Нехай* $V = \bigcup_{i \in I} V_i$, *де* $(V_i)_{i \in I}$ — *сім'я опуклих множин із* $C(S, X)$, $g^* \in V$ *і* $V_{g^*} = \bigcup_{i \in I,\, g^* \in \overline{V_i}} V_i$. *Якщо* $g^* \in V$ *є екстремальним елементом для величини* (1.8), *то для будь-якого елемента* $g \in V_{g^*}$ *існують такі елементи* $s_g \in S$, $y_g \in a(s_g)$, $f_g \in E(B^*)$, *що*

$$f_g(g^*(s_g) - y_g) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\|, \tag{3.15}$$

$$\operatorname{Re} f_g(g(s_g) - g^*(s_g)) \geq 0. \tag{3.16}$$

Доведення. Нехай $g^* \in V$ — екстремальний елемент для величини (1.8). Згідно з твердженням 1.2.3 [4, с. 15]

$$\Gamma^*(V, g^*) \supset \bigcup_{i \in I} \Gamma^*(V_i, g^*) = \bigcup_{i \in I,\, g^* \in \overline{V_i}} \Gamma^*(V_i, g^*). \tag{3.17}$$

Нехай, крім того, $g \in V_{g^*}$. Тоді існує $i_g \in I$ таке, що $g^* \in \overline{V_{i_g}}$ та $g \in V_{i_g}$. Оскільки V_{i_g} є опуклою множиною, то згідно з теоремою 1.3.4 [4, с. 19] $g - g^* \in \Gamma^*(V_{i_g}, g^*)$. Звідси та з (3.17) робимо висновок, що $g - g^* \in \Gamma^*(V, g^*)$. Згідно з теоремою 3.4 існують такі елементи $s_g \in S$, $y_g \in a(s_g)$, $f_g \in E(B^*)$, для яких виконуються співвідношення (3.15), (3.16).

Теорему доведено.

Встановимо далі достатню умову того, що $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (1.8).

Теорема 3.6. *Нехай* V — *довільна множина простору* $C(S, X)$, $g^* \in V$. *Якщо для кожного елемента* $g \in V$ *існують елементи* $s_g \in S$, $y_g \in a(s_g)$, $f_g \in E(B^*)$ *такі, що мають місце рівності* (3.15), (3.16), *то* g^* *є екстремальним елементом для величини* (1.8).

Доведення. Нехай g — довільний елемент множини V. Згідно з умовою теореми існують елементи $s_g \in S$, $y_g \in a(s_g)$, $f_g \in E(B^*)$, для яких мають місце співвідношення (3.15), (3.16). З урахуванням цих співвідношень одержуємо

$$0 \leq \operatorname{Re} f_g(g(s_g) - g^*(s_g)) = \operatorname{Re} f_g(g(s_g) - y_g + y_g - g^*(s_g)) =$$

$$= \operatorname{Re} f_g(g(s_g) - y_g) - \operatorname{Re} f_g(g^*(s_g) - y_g) \le$$

$$\le \left| f_g(g(s_g) - y_g) \right| - \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\| \le$$

$$\le \left\| g(s_g) - y_g \right\| - \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\| \le$$

$$\le \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\| g(s) - y \right\| - \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\|.$$

Це й означає, що g^* є екстремальним елементом для величини (1.8).

Теорему доведено.

Зауважимо, що встановлена у теоремі 3.6 достатня умова екстремального елемента для величини (1.8) має місце у випадку найкращого рівномірного наближення багатозначного відображення $a \in C(S, K(X))$ будь-якою множиною $V \subset C(S, X)$.

Становлять інтерес множини, для яких ця умова є не лише достатньою, а й необхідною умовою екстремального елемента для величини (1.8).

Множину M нормованого лінійного простору Y будемо називати Γ^*-множиною відносно точки $y_0 \in M$, якщо $y - y_0 \in \Gamma^*(M, y_0)$ для всіх $y \in M$.

Теорема 3.7. *Нехай* $V \subset C(S, X)$, $g^* \in V$ *і* V *є* Γ^**-множиною відносно точки* g^*. *Для того щоб елемент* g^* *був екстремальним елементом для величини* (1.8), *необхідно і досить, щоб для кожного елемента* $g \in V$ *існували елементи* $s_g \in S$, $y_g \in a(s_g)$, $f_g \in E(B^*)$, *для яких виконуються умови* (3.15), (3.16).

Справедливість теореми випливає з означення Γ^*-множини відносно точки g^*, теорем 3.4 та 3.6.

Прикладами Γ^*-множин відносно точки g^* є, зокрема, зіркові відносно g^* (див., наприклад, [47, с. 16]), в тому числі опуклі, множини.

Справді, для таких множин V відрізок

$$\left[g^*, g\right] = \left\{z : z = g^* + t(g - g^*),\ t \in [0, 1]\right\} \subset V.$$

Звідси випливає, що $g - g^* \in \Gamma^*(V, g^*)$.

Із зазначеного та теореми 3.7 випливає таке твердження.

***Наслідок* 3.1.** *Нехай* $V \subset C(S, X)$, $g^* \in V$ *і* V *є зірковою відносно* g^* (*опуклою*) *множиною. Для того щоб елемент* g^* *був екстремальним елементом для величини* (1.8), *необхідно і досить, щоб для кожного елемента* $g \in V$ *існували елементи* $s_g \in S$, $y_g \in a(s_g)$, $f_g \in E(B^*)$, *для яких виконуються умови* (3.15), (3.16).

Конкретизуємо встановлені критерії екстремального елемента для величини (1.8) на випадок найкращого рівномірного наближення багатозначного відображення $a \in C(S, K(X))$ підпростором V простору $C(S, X)$.

***Наслідок* 3.2.** *Нехай* V *— підпростір простору* $C(S, X)$. *Для того щоб елемент* $g^* \in V$ *був екстремальним елементом для величини* (1.8), *необхідно і досить, щоб для будь-якого* $g \in V$ *існували елементи* $s_g \in S$, $y_g \in a(s_g)$, $f_g \in E(B^*)$ *такі, що*

$$f_g\left(g^*(s_g) - y_g\right) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\|, \tag{3.18}$$

$$\operatorname{Re} f_g(g(s_g)) \geq 0. \tag{3.19}$$

Доведення. Нехай $g^* \in V$ — екстремальний елемент для величини (1.8) і g — довільний елемент V.

Оскільки V — підпростір, то $(g + g^*) \in V$. Враховуючи опуклість V та застосовуючи наслідок 3.1 для елемента $(g + g^*) \in V$, робимо висновок про існування елементів $s_g \in S$, $y_g \in a(s_g)$, $f_g \in E(B^*)$, для яких виконуються умови (3.18), (3.19).

Навпаки, нехай для елемента $g^* \in V$ і довільного елемента $g \in V$ існують $s_g \in S$, $y_g \in a(s_g)$, $f_g \in E(B^*)$, для яких виконуються умови (3.18) та (3.19).

Записуючи ці умови для елемента $(g - g^*) \in V$, де g — довільний елемент підпростору V, на підставі наслідку 3.1 робимо висновок, що g^* — екстремальний елемент для величини (1.8).

Наслідок доведено.

Автор висловлює глибоку вдячність О. І. Степанцю за постановку задачі і всебічну допомогу в роботі.

1. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
2. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций. – М.: Наука, 1977. – 510 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
4. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. – М.: Мир, 1975. – 496 с.
5. *Степанец А. И.* Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.I. – 427 с.
6. *Степанец А. И.* Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.II. – 468 с.
7. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 307 с.
8. *Зуховицкий С. И., Крейн М. Г.* Замечание об одном возможном обобщении теоремы А. Хаара и А. Н. Колмогорова // Успехи мат. наук. – 1950. – **5**, № 1. – С. 217–229.
9. *Зуховицкий С. И., Стечкин С. Б.* О приближении абстрактных функций // Там же. – 1957. – **12**, № 1(73). – С. 187–191.
10. *Ярахмедов Г. Я.* Об одном обобщении теоремы А. Н. Колмогорова // Сиб. мат. журн. – 1972. – **13**, № 4. – С. 959.
11. *Смирнов Г. С.* О критерии элемента наилучшего приближения абстрактной функции со значениями в банаховом пространстве. – Киев, 1973. – 20 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 73-8).
12. *Opfer G.* An algorithm for the construction of best approximations based on Kolmogorov's criterion // J. Approxim. Theory. – 1978. – **23**. – P. 299 – 317.
13. *Warth W.* On the uniqueness of best uniform approximations in the presence of constraints // Ibid. – 1979. – **25**. – P. 1 – 11.
14. *Deutsch F.* Best approximation in the space of continuous vector-valued functions // Ibid. – 1988. – **53**. – P. 112 – 116.
15. *Тырыгин И. Я.* Критерий колмогоровского типа для оператора наилучшего приближения // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 1. – С. 114 – 119.
16. *Власов Л. П.* Существование элементов наилучшего приближения в $C(Q, X)$ // Мат. заметки. – 1995. – **58**, № 2. – С. 163 – 175.
17. *Smirnov G. S., Smirnov R. G.* Best uniform approximation of complex-valued functions by generalized polynomials having restricted ranges // J. Approxim. Theory. – 1999. – **100**, № 2. – P. 284 – 303.
18. *Smirnov G. S., Smirnov R. G.* Kolmogorov-type theory of best restricted approximations of complex-valued functions // E. J. Approxim. – 2000. – **6**, № 3. – P. 309 – 326.
19. *Коцюбинська Т. В.* Характеризація елемента найкращого наближення з обмеженнями // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Математика. Механіка. – 2003. – № 10. – С. 106 – 113.
20. *Klee V. L.* Circumspheres and inner products // Math. scand. – 1960. – **8**, № 2. – P. 363 – 370.
21. *Гаркави А. Л.* О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 6(120). – С. 139–145.

22. *Белобров П. К.* О чебышевской точке системы множеств // Изв. вузов. Математика. – 1966. – № 6. – С. 18 – 24.
23. *Гольштейн Е. Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
24. *Ward J. D.* Chebyshev centers in spaces of continuous functions // Pacif. J. Math. – 1974. – **52**, № 1. – P. 283 – 287.
25. *Mach J.* On the existence of best simultaneous approximation // J. Approxim. Theory. – 1979. – **25**. – P. 258 – 265.
26. *Pevae L.* Chebyshev centers in normed spaces // Publs Inst. Math. – 1989. – **45(59)**. – P. 109 – 112.
27. *Гнатюк Ю. В., Гнатюк У. В.* Найкраще одночасне наближення елементів збіжних за нормами послідовностей // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – 2002. – Вип. 8. – С. 228 – 238.
28. *Гаркави А. Л.* Об условном чебышевском центре компактного множества непрерывных функций // Мат. заметки. – 1973. – **14**, № 4. – С. 469 – 478.
29. *Fernandez M., Soriano M. L.* On the Chebyshev alternation theorem // Atti Semin. math. e fis. Univ. Modena. – 1997. – **45**. – P. 169 – 178.
30. *Tanimoto S. A.* On best simultaneous approximation // Math. Jap. – 1998. – **48**, № 2. – P. 275 – 279.
31. *Гнатюк Ю. В.* Найкраще рівномірне наближення сім'ї неперервних на компакті функцій // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 11. – С. 1574 – 1580.
32. *Гнатюк Ю. В.* Алгоритми найкращого одночасного рівномірного наближення сім'ї неперервних на компакті функцій чебишовським підпростором // Там же. – 2003. – **55**, № 2. – С. 291 – 307.
33. *Сендов Б.* Хаусдорфовы приближения. – София: БАН, 1979. – 372 с.
34. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* О новых результатах в теории многозначных отображений. I. Топологические характеристики и разрешимость операторных соотношений // Итоги науки и техники. Мат анализ / ВИНИТИ. – 1987. – **25**. – С. 123 – 197.
35. *Никольский М. С.* Аппроксимация выпуклозначных непрерывных многозначных отображений // Докл. АН СССР. – 1989. – **308**, № 5. – С. 1047 – 1050.
36. *Никольский М. С.* Об аппроксимации непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображениями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Вычислит. математика и кибернетика. – 1990. – № 1. – С. 76 – 80.
37. *Ипате Д. М., Чобан М. М.* Аппроксимация многозначных отображений непрерывными отображениями // Сердика Бълг. мат. спис. – 1991. – **17**. – P. 127 – 136.
38. *Выгодчикова И. Ю.* О наилучшем приближении непрерывного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. – 2000. – № 2. – С. 13 – 15.
39. *Выгодчикова И. Ю.* О наилучшем приближении дискретного мультиотображения алгебраическим полиномом // Там же. – 2001. – № 3. – С. 25 – 28.
40. *Выгодчикова И. Ю.* Об алгоритме решения задачи о наилучшем приближении дискретного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Там же. – 2002. – № 4. – С. 15 – 20.
41. *Колмогоров А. Н.* Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, № 1(23). – С. 216 – 221.
42. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
43. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
44. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
45. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 623 с.
46. *Bynum W. L.* Weak parallelogram lows for Banach spaces // Can. Math. Bull. – 1976. – **19**, № 3. – P. 269 – 275.
47. *Лейтхвейс К.* Выпуклые множества. – М.: Наука, 1985. – 335 с.

Одержано 11.06.2004,
після доопрацювання — 04.02.2005