УДК 515.162, 517.51, 517.27

Е. А. Полулях (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ГРАФЫ КРОНРОДА – РИБА ФУНКЦИЙ НА НЕКОМПАКТНЫХ ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ. II

We consider continuous functions on two-dimensional surfaces satisfying the following conditions: they have a discrete set of local extrema and if a point is not a local extremum, then there exist its neighborhood and a number $n \in \mathbb{N}$ such that the function restricted to this neigbourhood is topologically conjugate to $\operatorname{Re} z^n$ in a certain neigbourhood of zero. Given $f\colon M^2 \to \mathbb{R}$, let $\Gamma_{K-R}(f)$ be a quotient space of M^2 with respect to its partition formed by the components of level sets of the function f. It is known that the space $\Gamma_{K-R}(f)$ is a topological graph if M^2 is compact. In the first part of the paper, we define the notion of graph with stalks that generalizes the notion of topological graph. For noncompact M^2, we present three conditions sufficient for $\Gamma_{K-R}(f)$ to be a graph with stalks. In the second part, we prove that these conditions are also necessary in the case $M^2 = \mathbb{R}^2$. In general case, one of our conditions is not necessary. We provide an appropriate example.

Розглянуто неперервні функції на двовимірних поверхнях, які відповідають наступним умовам: множина їх локальних екстремумів дискретна; якщо точка не є локальним екстремумом, то існують її окіл і число $n \in \mathbb{N}$ такі, що функція в цьому околі топологічно спряжена до $\operatorname{Re} z^n$ в околі нуля. Нехай для кожної $f\colon M^2 \to \mathbb{R}$ $\Gamma_{K-R}(f)$ є фактор-простором M^2 по розбиттю, що утворене компонентами множин рівня функції f. Відомо, що для компактного M^2 простір $\Gamma_{K-R}(f)$ є топологічним графом. У першій частині статті визначено поняття графа з черенками, яке є узагальненням топологічного графа. Для некомпактного M^2 наведено три умови, при виконанні яких простір $\Gamma_{K-R}(f)$ є графом з черенками. У другій частині доведено, що у випадку $M^2 = \mathbb{R}^2$ ці умови є також необхідними. У загальному випадку одна з умов не є необхідною. Наведено відповідний приклад.

Данная статья является продолжением работы [1].

1. Определения и формулировки результатов. Пусть f — непрерывная функция на двумерной поверхности M^2, удовлетворяющая следующим свойствам:

(f_1) множество локальных экстремумов f дискретно;

(f_2) если точка $x \in M^2$ не является локальным экстремумом f, то существует ее окрестность U_x, в которой f топологически сопряжена с функцией $\operatorname{Re} z^n$ в окрестности нуля для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Определение 1. *Назовем точки, в окрестности которых f сопряжена с $\operatorname{Re} z$, регулярными точками f. Точки, для которых f сопряжена с z^n, $n > 1$, назовем точками ветвления множества уровня. Точки плоскости, которые не являются регулярными, будем называть сингулярными точками f.*

Рассмотрим разбиение $\mathfrak{F}$ поверхности на компоненты множеств уровня f. Элементы разбиения $\mathfrak{F}$ будем называть *регулярными*, если они не содержат сингулярных точек f. Элементы разбиения $\mathfrak{F}$, которые не являются регулярными, назовем *сингулярными*.

Фактор-пространство поверхности по разбиению $\mathfrak{F}$ дальше будет обозначаться через $\Gamma_{K-R}(f)$. Обозначим через $\pi_f\colon M^2 \to \Gamma_{K-R}(f)$ отображение проекции.

Поскольку f отображает элементы разбиения $\mathfrak{F}$ в точки пространства $\mathbb{R}$, существует (см. [2]) непрерывное фактор-отображение $\hat{f}\colon \Gamma_{K-R}(f) \to \mathbb{R}$ такое, что $f = \hat{f} \circ \pi_f$.

Наша цель — выделить условия, при которых для некомпактного M^2 пространство $\Gamma_{K-R}(f)$ имеет простое строение.

Рассмотрим следующие условия:

(k_1) Компоненты множества уровня f могут содержать не более конечного количества сингулярных точек.

(k_2) Пусть K — объединение всех компонент множеств уровня f, которые содержат сингулярные точки. Для любого компакта $C \subset M^2$ множество $f(C \cap K)$ конечно.

(k_3) Пусть для $a \in f(M^2)$ точки $x_1, x_2 \in M^2$ принадлежат разным компонентам множества уровня $f^{-1}(a)$. Тогда найдутся открытые окрестности $U_1 \ni x_1$ и $U_2 \ni x_2$ такие, что для каждого $b \in f(M^2)$ и компоненты F_b множества уровня $f^{-1}(b)$ выполняется соотношение $(F_b \cap U_1 = \varnothing) \vee (F_b \cap U_2 = \varnothing)$.

Определение 2. *Скажем, что непрерывная функция* $f: M^2 \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющая условиям* (f_1) *и* (f_2), *является K-R–простой, если она удовлетворяет также условиям* (k_1) – (k_3).

Напомним некоторые определения и конструкции.

Скажем, что граф *локально конечен*, если каждая его вершина инцидентна конечному числу ребер. Другие определения из теории графов можно найти, например, в [3].

Пусть G — локально конечный (не обязательно конечный) граф без петель. Рассмотрим G как одномерный предсимплициальный комплекс, нульмерными симплексами которого являются вершины, а одномерными симплексами — ребра (см. [4]). Отметим, что если граф не содержит кратных ребер, то он является симплициальным комплексом. Рассмотрим абстрактный полиэдр $|G|$, соответствующий этому комплексу. Топология на $|G|$ порождается покрытием, состоящим из замкнутых симплексов комплекса G (подмножество $A \subset |G|$ является замкнутым, если и только если его пересечение с любым ребром G замкнуто). Далее, говоря о топологии на графе G, будем подразумевать топологическое пространство $|G|$.

Граф G, на котором задана описанная выше структура топологического пространства, называется *топологическим графом*.

Определение 3. *Пусть* V_0 — *подмножество множества листьев* V_l *графа* G (*случай* $V_0 = \varnothing$ *не исключается*).

Пусть $e \subset G$ — (*замкнутое*) *ребро* G, *инцидентное некоторому листу из* V_0. *Множество* $e \setminus V_0$ *назовем черенком. Пространство* $G_0 = G \setminus V_0$ *называется топологическим графом с черенками.*

В первой части данной статьи была доказана такая основная теорема.

Пусть непрерывная функция f, *удовлетворяющая условиям* (f_1) *и* (f_2), *является K-R-простой. Тогда пространство* $\Gamma_{K-R}(f)$ *является графом с черенками.*

В этой части статьи мы докажем следующие утверждения.

Предложение 1. *Пусть* $f: M^2 \to \mathbb{R}$ — *непрерывная функция, удовлетворяющая условиям* (f_1) *и* (f_2).

Условия (k_2) *и* (k_3) *функции* f *являются необходимыми для того, чтобы пространство* $\Gamma_{K-R}(f)$ *было графом с черенками.*

Условие (k_1) не является необходимым для того, чтобы пространство $\Gamma_{K-R}(f)$ было графом с черенками. В подпункте 2.2 построен соответствующий пример.

Если функция f задана *на плоскости*, то согласно теореме Жордана о кривой *функция будет K-R-простой тогда и только тогда, когда* $\Gamma_{K-R}(f)$ *является графом с черенками.* Это утверждение следует из основной теоремы в первой части статьи, предложения 1 и следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — *непрерывная функция, удовлетворяющая условиям* (f_1) *и* (f_2).

Если Γ_{K-R} *является графом с черенками, то* f *удовлетворяет условию* (k_1).

2. Условия, необходимые для того, чтобы пространство $\Gamma_{K-R}(f)$ было графом с черенками. ***2.1. Доказательство предложения* 1.** Как известно, полиэдр предсимплициального комплекса является хаусдорфовым пространством (см. [2]). Вследствие этого топологические графы и графы с черенками являются хаусдорфовыми пространствами.

Пусть $\Gamma_{K-R}(f)$ — граф с черенками.

Предположим, что для некоторого компакта $C \subset M^2$ множество $f(K \cap C)$ бесконечно. Тогда множество $\pi_f(K \cap C)$ также бесконечно. Действительно, по определению пространства $\Gamma_{K-R}(f)$ для любых $x_1, x_2 \in M^2$ из неравенства $f(x_1) \neq f(x_2)$ следует $\pi_f(x_1) \neq \pi_f(x_2)$.

Снова по определению выполнено равенство $V = \pi_f(K)$, где V — множество вершин графа с черенками $\Gamma_{K-R}(f)$. Поэтому $\pi_f(K \cap C) \subset V$.

С другой стороны, так как пространство $\Gamma_{K-R}(f)$ хаусдорфово, образ $\pi_f(C)$ компакта C сам является компактом. Следовательно, подмножество $\pi_f(K \cap C)$ множества вершин V имеет предельную точку, но это невозможно, так как V — замкнутое дискретное подмножество $\Gamma_{K-R}(f)$.

Полученное противоречие доказывает, что функция f удовлетворяет свойству (k_2).

Пусть $x_1, x_2 \in M^2$ и $\pi_f(x_1) \neq \pi_f(x_2)$. Предположим, что для любой пары окрестностей $U_1 \ni x_1$, $U_2 \ni x_2$ существует $F \in \mathfrak{F}$ такое, что $F \cap U_1 \neq \varnothing$ и $F \cap U_2 \neq \varnothing$. Тогда любые окрестности $V_1 \ni \pi_f(x_1)$, $V_2 \ni \pi_f(x_2)$ имеют непустое пересечение.

Действительно, множества $\pi_f^{-1}(V_1)$ и $\pi_f^{-1}(V_2)$ являются окрестностями точек x_1 и x_2 соответственно. Следовательно, существует $F \in \mathfrak{F}$, для которого $F \cap \pi_f^{-1}(V_1) \neq \varnothing$ и $F \cap \pi_f^{-1}(V_2) \neq \varnothing$. Пусть $u = \pi_f(F)$. Тогда $u \in V_1 \cap V_2$.

Вследствие произвола в выборе окрестностей V_1 и V_2 пространство $\Gamma_{K-R}(f)$ не является хаусдорфовым и не может быть графом с черенками.

Полученное противоречие доказывает, что функция f удовлетворяет свойству (k_3).

2.2. Условие* ($\mathbf{k_1}$) *не является необходимым для того, чтобы пространство* $\Gamma_{K-R}(f)$ *было графом с черенками. Приведем пример функции $f\colon M^2 \to \mathbb{R}$, которая не является K-R-простой, но такая, что пространство $\Gamma_{K-R}(f)$ — граф с черенками.

Для того чтобы определить поверхность M^2 и функцию f на ней, нам понадобится ряд вспомогательных конструкций.

Рассмотрим непрерывные функции $x_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, $y^+, y^-\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$x_n(t) = \begin{cases} n + [t/2] + 2\{t/2\}, & \text{если } \{t/2\} \le 1/2, \\ n + [t/2] + 1, & \text{если } \{t/2\} > 1/2, \end{cases}$$

$$y^+(t) = \begin{cases} [t/2], & \text{при } \{t/2\} \le 1/2, \\ [t/2] + 2\{t/2\} - 1, & \text{при } \{t/2\} > 1/2, \end{cases}$$

$$y^-(t) = -y^+(t).$$

Здесь $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ обозначают целую и дробную части числа соответственно.

Рассмотрим следующие подмножества плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$Z = (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}),$$

$$Z_n^+ = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \big([k+n, k+n+1]\times\{k\}\big)\cup\big(\{k+n+1\}\times[k,k+1]\big),$$

$$Z_n^- = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \big([k+n, k+n+1]\times\{-k\}\big)\cup\big(\{k+n+1\}\times[-k-1,-k]\big), \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Здесь использованы обозначения $A\times\{s\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in A,\ y=s\}$, $\{s\}\times A = \{(x,y)\in \in\mathbb{R}^2 \mid x=s,\ y\in A\}$.

Z — сетка, узлы которой имеют целочисленные координаты, Z_n^+ — „восходящая лестница”, Z_n^- — „нисходящая лестница”. Легко видеть, что $Z = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} Z_n^+ = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} Z_n^-$.

Рассмотрим непрерывные кривые $\alpha_n^+ : \mathbb{R}\to Z_n^+$, $\alpha_n^- : \mathbb{R}\to Z_n^-$, $n\in\mathbb{Z}$,

$$\alpha_n^+(t) = (x_n(t), y^+(t)), \qquad \alpha_n^-(t) = (x_n(t), y^-(t)), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Простая непосредственная проверка показывает, что отображения α_n^+ и α_n^- являются вложениями.

Построим сначала вспомогательную поверхность $\hat{M}^2$ и функцию $\hat{f}\colon \hat{M}^2\to\mathbb{R}$.

Для этого рассмотрим множество $Z\subset\mathbb{R}^2$, а также два набора замкнутых полуплоскостей

$$B_n^+ = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\ge 0\}, \qquad B_n^- = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\le 0\}, \quad n\in\mathbb{Z},$$

и функции $f_n^+ : B_n^+\to\mathbb{R}$, $f_n^- : B_n^-\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}$,

$$f_n^+(x,y) = y, \qquad f_n^-(x,y) = y.$$

Обозначим

$$\partial B_n^+ = \{(x,y)\in B_n^+ \mid y=0\},$$

$$\partial B_n^- = \{(x,y)\in B_n^- \mid y=0\}, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Ясно, что $\partial B_n^+ = (f_n^+)^{-1}(0)$, $\partial B_n^- = (f_n^-)^{-1}(0)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Приклеим каждую B_n^+ к Z по отображению $\gamma_n^+ : \partial B_n^+\to Z_n^+\subset Z$,

$$\gamma_n^+(x,0) = \alpha_n^+(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Аналогично, приклеим каждую B_n^- к Z по отображению $\gamma_n^- : \partial B_n^-\to Z_n^-\subset Z$,

$$\gamma_n^-(x,0) = \alpha_n^-(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Получим пространство $\hat{M}^2$. Обозначим через $i_0\colon Z\to\hat{M}^2$, $i_n^+ : B_n^+\to\hat{M}^2$, $i_n^- : B_n^-\to\hat{M}^2$, $n\in\mathbb{Z}$, естественные вложения.

Определим функцию $\hat{f}\colon\hat{M}^2\to\mathbb{R}$ следующим образом:

$$\hat{f}(u) = \begin{cases} f_n^+((i_n^+)^{-1}(u)), & \text{если} \quad u\in i_n^+(B_n^+),\\ f_n^-((i_n^-)^{-1}(u)), & \text{если} \quad u\in i_n^-(B_n^-),\\ 0, & \text{если} \quad u\in i_0(Z). \end{cases}$$

Непосредственная проверка показывает, что пространство $\hat{M}^2$ является ориентируемой двумерной поверхностью. В частности, справедливо следующее.

Если $u = i_0(r+\tau, s) \in i_0(Z)$, где $r, s \in \mathbb{Z}$, $\tau \in (0,1)$, то

$$(r, r+1) \times \{s\} = \alpha^-_{r+s}\big((-2s, -2s+1)\big) = \alpha^+_{r-s}\big((2s, 2s+1)\big)$$

и окрестность точки u

$$U_u = i^-_{r+s}\big((-2s, -2s+1) \times (-1, 0]\big) \cup i^+_{r-s}\big((2s, 2s+1) \times [0, 1)\big)$$

гомеоморфна диску.

Аналогично, если $u = i_0(r, s+\tau)$, где $r, s \in \mathbb{Z}$, $\tau \in (0,1)$, то

$$\{r\} \times (s, s+1) = \alpha^-_{r+s}\big((-2s-1, -2s)\big) = \alpha^+_{r-s-1}\big((2s+1, 2s+2)\big)$$

и окрестность точки u

$$U_u = i^-_{r+s}\big((-2s-1, -2s) \times (-1, 0]\big) \cup i^+_{r-s-1}\big((2s+1, 2s+2) \times [0, 1)\big)$$

гомеоморфна диску.

Наконец, если $u = i_0(r, s)$, где $r, s \in \mathbb{Z}$, то

$$\{r\} \times (s, s+1) \cup (r, r+1) \times \{s\} = \alpha^-_{r+s}\big((-2s-1, -2s+1)\big),$$

$$(r-1, r) \times \{s\} \cup \{r\} \times (s, s+1) = \alpha^+_{r-s-1}\big((2s, 2s+2)\big),$$

$$(r-1, r) \times \{s\} \cup \{r\} \times (s-1, s) = \alpha^-_{r+s-1}\big((-2s, -2s+2)\big),$$

$$\{r\} \times (s-1, s) \cup (r, r+1) \times \{s\} = \alpha^+_{r-s}\big((2s-1, 2s+1)\big)$$

и окрестность

$$U_u = i^-_{r+s}\big((-2s-1, -2s+1) \times (-1, 0]\big) \cup i^+_{r-s-1}\big((2s, 2s+2) \times [0, 1)\big) \cup$$

$$\cup i^-_{r+s-1}\big((-2s, -2s+2) \times (-1, 0]\big) \cup i^+_{r-s}\big((2s-1, 2s+1) \times [0, 1)\big)$$

гомеоморфна диску.

Функция $\hat{f}$ корректно определена, непрерывна и удовлетворяет условиям (f_1) и (f_2). Ее единственным сингулярным множеством уровня является $\hat{f}^{-1}(0) = i_0(Z)$. Это множество связно.

Если $u \in i_0(Z \setminus (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}))$, то в окрестности U_u функция $\hat{f}$ топологически сопряжена с функцией $\operatorname{Re} z$ в окрестности нуля и u является регулярной точкой $\hat{f}$.

Если $u \in i_0(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, то в окрестности U_u функция $\hat{f}$ топологически сопряжена с функцией $\operatorname{Re} z^2$ в окрестности нуля и u является точкой ветвления своей компоненты уровня $\hat{f}$.

Поскольку

$$\hat{f}^{-1}(a) = \begin{cases} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} i^-_n(\mathbb{R} \times \{a\}) & \text{при} \quad a < 0, \\ i_0(Z) & \text{при} \quad a = 0, \\ \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} i^+_n(\mathbb{R} \times \{a\}) & \text{при} \quad a > 0, \end{cases}$$

то пространство $\Gamma_{K-R}(\hat{f})$ является объединением счетного числа полуинтервалов, которые имеют общий конец $\pi_{\hat{f}} \circ i_0(Z)$.

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$. Зададим на пространстве $\hat{M}^2$ следующее отношение $\sim$:

$i_n^-(x,y) \sim i_{n+km}^-(x,y)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, $y \leq 0$, $n, k \in \mathbb{Z}$;

$i_n^+(x,y) \sim i_{n+km}^+(x,y)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, $n, k \in \mathbb{Z}$;

$i_0(v,w) \sim i_0(v+km,w)$ для всех $(v,w) \in Z$, $k \in \mathbb{Z}$.

Поскольку для всех $\tau \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ по определению справедливы равенства

$$i_n^-(\tau,0) = \gamma_n^-(\tau,0) = i_0 \circ \alpha_n^-(\tau) = i_0(x_n(\tau), y^-(\tau)),$$

$$i_{n+km}^-(\tau,0) = i_0(x_{n+km}(\tau), y^-(\tau)) = i_0(x_n(\tau)+km, y^-(\tau)),$$

$$i_n^+(\tau,0) = \gamma_n^+(\tau,0) = i_0 \circ \alpha_n^+(\tau) = i_0(x_n(\tau), y^+(\tau)),$$

$$i_{n+km}^+(\tau,0) = i_0(x_{n+km}(\tau), y^+(\tau)) = i_0(x_n(\tau)+km, y^+(\tau)),$$

отношение $\sim$ определено корректно.

Легко видеть, что $\sim$ является отношением эквивалентности. Следовательно, оно порождает разбиение пространства $\hat{M}^2$ на классы эквивалентности и определяет фактор-пространство $M_m^2 = \hat{M}^2/\sim$. Пусть $\pi_m \colon \hat{M}^2 \to M_m^2$ — отображение проекции. По определению функции $\hat{f}$, если $u_1 \sim u_2$, то $\hat{f}(u_1) = \hat{f}(u_2)$ для всех $u_1, u_2 \in \hat{M}^2$. Поэтому определена и непрерывна функция $f_m \colon M_m^2 \to \mathbb{R}$, такая что $\hat{f} = f_m \circ \pi_m$.

Можно показать, что $\hat{M}^2$ является накрытием пространства M_m^2, а отображение π_m — локальным гомеоморфизмом. Вследствие этого M_m^2 является двумерной поверхностью.

Можно показать, что M_m^2 ориентируемо при четном m и неориентируемо при нечетном m.

Поскольку свойства (f$_1$) и (f$_2$) функции $\hat{f}$ являются локальными, функция $f_m \colon M_m^2 \to \mathbb{R}$ также им удовлетворяет. При этом регулярными точками функции f_m являются в точности проекции регулярных точек функции $\hat{f}$. Все точки $\pi_m \circ i_0(r,s)$, $(r,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, являются сингулярными.

Заметим, что $\pi_m \circ i_n^-(B_n^-) = \pi_m \circ i_s^-(B_s^-)$ при $n \equiv s \pmod{m}$ и $\pi_m \circ i_n^-(B_n^-) \cap \pi_m \circ i_s^-(B_s^-) = \varnothing$ при $n \not\equiv s \pmod{m}$.

Аналогично, $\pi_m \circ i_n^+(B_n^+) = \pi_m \circ i_s^+(B_s^+)$ при $n \equiv s \pmod{m}$ и $\pi_m \circ i_n^+(B_n^+) \cap \pi_m \circ i_s^+(B_s^+) = \varnothing$ при $n \not\equiv s \pmod{m}$.

Поэтому

$$f_m^{-1}(a) = \begin{cases} \bigcup_{n=0}^{m-1} \pi_m \circ i_n^-(\mathbb{R} \times \{a\}) & \text{при} \quad a < 0, \\ \pi_m \circ i_0(Z) & \text{при} \quad a = 0, \\ \bigcup_{n=0}^{m-1} \pi_m \circ i_n^+(\mathbb{R} \times \{a\}) & \text{при} \quad a > 0 \end{cases}$$

и пространство $\Gamma_{K-R}(f_m)$ является объединением $2m$ полуинтервалов с общим концом $\pi_{f_m} \circ \pi_m \circ i_0(Z)$, т. е. является графом с черенками.

С другой стороны, так как $\pi_m \circ i_0(r,s) \neq \pi_m \circ i_0(r,s+j)$, $j \in \mathbb{Z}$, то сингулярная компонента $\pi_m \circ i_0(Z)$ множества уровня $f_m^{-1}(0)$ имеет бесконечное число сингулярных точек и функция f_m не является K-R-простой.

2.3. Случай функции на плоскости $\mathbb{R}^2$. Для доказательства теоремы 1 нам понадобится техническое утверждение, которое мы сейчас рассмотрим.

Предположим, что непрерывная функция $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ удовлетворяет свойствам (f_1) и (f_2).

Пусть x_0 — точка ветвления множества уровня f. Обозначим $c = f(x_0)$.

Пусть U — открытая окрестность x_0, $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, $g = \mathrm{Re}(z^n): \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $n > 1$. Пусть $h: \overline{U} \to D$ и $h': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — такие гомеоморфизмы, что $h(x_0) = 0$, $h(\overline{U}) = D$ и $g \circ h = h' \circ f$.

Из свойства (f_2) функции f и определения 1 следует, что для точки x_0 такие U, $n > 1$, h и h' всегда существуют.

Множество

$$g^{-1}(0) = \big\{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \pi(2k+1)/2n,\ k = 0, \ldots, 2n-1\big\}$$

разбивает D на $2n$ секторов

$$W_k = \big\{z \in D \setminus \{0\} \mid \arg z \in \big(\pi(2k-1)/2n, \pi(2k+1)/2n\big)\big\}, \quad k = 0, \ldots, 2n-1.$$

На каждом из них функция g знакопостоянна: $g > 0$ на W_k при четном k и $g < 0$ на W_k при нечетном k.

Поскольку любой гомеоморфизм $h': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является строго монотонной функцией, то существует $\epsilon \in \{-1, 1\}$ такое, что

$$\mathrm{Sign}(g \circ h(x_1) - g \circ h(x_2)) = \epsilon\, \mathrm{Sign}(f(x_1) - f(x_2)), \quad x_1, x_2 \in \overline{U}.$$

В частности, $\mathrm{Sign}\, g \circ h(x) = \mathrm{Sign}(g \circ h(x) - g \circ h(x_0)) = \epsilon\, \mathrm{Sign}(f(x) - f(x_0)) = \epsilon\, \mathrm{Sign}(f(x) - c)$.

Таким образом, множество $f^{-1}(c)$ разбивает $\overline{U}$ на $2n$ компонент связности $E_k = h^{-1}(W_k)$, $k = 0, \ldots, 2n-1$, на каждой из которых разность $f(x) - c$, $x \in E_k$, знакопостоянна и имеет один знак при четных k и противоположный знак — при нечетных k.

Обозначим $S = \mathrm{Fr}\, U = \overline{U} \setminus U$, $\partial D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Поскольку множество ∂D гомеоморфно окружности, из теоремы Жордана о кривой (см. [5]) следует, что $\partial D = h(S)$.

Предложение 2. *Пусть $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ — простая замкнутая кривая, удовлетворяющая следующим условиям*:

$\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$;

либо $f \circ \gamma(t) \geq c = f(x_0)$ для всех $t \in I$, либо $f \circ \gamma(t) \leq c$ для всех $t \in I$;

$\gamma(I) \cap S = \{x_1, x_2\}$, $x_1 \neq x_2$;

$x_1 \in E_{k_1}$, $x_2 \in E_{k_2}$, $k_1 \neq k_2$.

Тогда существует $m \in \{0, \ldots, 2n-1\}$ такое, что E_m содержится в диске O_γ, который ограничивает кривая γ, и $(f(x) - c)(f(x_1) - c) < 0$ для всех $x \in E_m$.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений будем считать, что $f \circ \gamma(t) \geq 0$ для всех $t \in I$. Тогда $f \circ \gamma(x_i) > 0$, $i = 1, 2$.

Согласно теореме Жордана о кривой простая замкнутая кривая γ ограничивает множество O_γ, гомеоморфное открытому диску.

Заметим, что если $f(x) < 0$ для каждого $x \in E_s$ при некотором $s \in \{0, \ldots, 2n-1\}$, то $\gamma(I) \cap E_s = \varnothing$. А так как множество E_s связное, то либо $E_s \subset O_\gamma$, либо $E_s \cap O_\gamma$.

Обозначим $A_k = E_k \cap \mathrm{Fr}\, U = E_k \cap S$, $k = 0, \ldots, 2n-1$. По построению разность $f(x) - c$ знакопостоянна на каждом A_k, притом имеет один знак при четных k и противоположный — при нечетных k.

Легко видеть, что в зависимости от выбора направления при обходе окружности S множества A_k проходятся последовательно по возрастанию или убыванию индексов. Числа $f(x_1)$

и $f(x_2)$ по условию имеют один знак, поэтому индексы k_1 и k_2 имеют одинаковую четность. Следовательно, каждая из двух дуг L_1 и L_2, на которые окружность S разбивается множеством $\{x_1, x_2\}$, содержит по крайней мере одно A_i такое, что $f(x) - c < 0$ для всех $x \in A_i$. Пусть $A_r \subset L_1$, $A_s \subset L_2$ и $f(x) - c < 0$ для всех $x \in A_r \cup A_s$. Отметим, что тогда также $f(x) - c < 0$ и $(f(x) - c)(f(x_1) - c) < 0$ для всех $x \in E_r \cup E_s$.

Простая непосредственная проверка показывает, что множество $E_r \cup E_s \cup \{x_0\}$ разбивает $\overline{U}$ на две компоненты связности и точки x_1 и x_2 находятся в разных компонентах. Точки x_1 и x_2 разбивают кривую γ на две дуги Γ_1 и Γ_2. Пусть $x_0 \in \Gamma_1$. Поскольку по построению $\Gamma_2 \cap (E_r \cup E_s \cup \{x_0\}) = \varnothing$, то $\Gamma_2 \setminus \overline{U} \neq \varnothing$. Следовательно, $O_\gamma \setminus \overline{U} \neq \varnothing$.

Заметим, что хотя бы одна из дуг L_1 и L_2 содержится в O_γ. Действительно, в противном случае $S \cap O_\gamma = \operatorname{Fr} U \cap O_\gamma = \varnothing$. Тогда из $O_\gamma \setminus \overline{U} \neq \varnothing$ следует, что $U \cap O_\gamma = \varnothing$. Но это невозможно, так как U является окрестностью точки $x_0 \in \gamma(I) = \operatorname{Fr} O_\gamma$.

Пусть $L_1 \subset O_\gamma$. Тогда $A_r \subset O_\gamma$ и $E_r \subset O_\gamma$, так как множество E_r связно, $E_r \cap O_\gamma \neq \varnothing$ и $E_r \cap \operatorname{Fr} O_\gamma = \varnothing$.

Случай $L_2 \subset O_\gamma$ рассматривается аналогично.

Предложение 2 доказано.

***Доказательство теоремы* 1.** Пусть существует $F \in \mathfrak{F}$, $F \subset K$, такое, что F содержит бесконечно много сингулярных точек f. Пусть $u = \pi_f(F) \in V \subset \Gamma_{K-R}(f)$.

Согласно условию (f_1) локальные экстремумы f являются изолированными точками множеств уровня. Следовательно, все сингулярные точки, лежащие в F, являются точками ветвления. Обозначим

$$\mathcal{Q}_F = \{Q \in \mathcal{Q} \mid \overline{Q} \cap F \neq \varnothing\}.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\mathcal{Q}_F$ содержит бесконечное число элементов. Действительно, все множества $Q \in \mathcal{Q}_F$ связные и попарно не пересекаются. Поэтому все $\pi_f(Q)$, $Q \in \mathcal{Q}_F$, также связные и попарно не пересекаются. Кроме того, $\pi_f(Q) \cap V = \varnothing$, $Q \in \mathcal{Q}_F$, так как $V = \pi_f(K)$. Следовательно, каждое $\pi_f(Q)$ является связным подмножеством некоторого открытого ребра. Поскольку $u \in \overline{\pi_f(Q)} \cap V$, $Q \in \mathcal{Q}_F$, то для любых $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}_F$ при $Q_1 \neq Q_2$ множества $\pi_f(Q_1)$ и $\pi_f(Q_2)$ должны лежать на разных ребрах $\Gamma_{K-R}(f)$. Вследствие этого вершина u будет инцидентна бесконечному числу ребер и $\Gamma_{K-R}(f)$ не будет локально конечным графом.

Пусть Σ_F — множество всех сингулярных точек f, лежащих в F.

Легко видеть, что так как f удовлетворяет условиям (f_1), (f_2) и F — сингулярная компонента множества уровня, то $\overline{Q} \cap \Sigma_F \neq \varnothing$ для каждого $Q \in \mathcal{Q}_F$.

Обозначим через $\mathcal{Q}_F^{\mathrm{fin}}$ множество всех $Q \in \mathcal{Q}_F$, для которых множество $\overline{Q} \cap \Sigma_F$ конечно. Пусть $\mathcal{Q}_F^{\mathrm{inf}}$ — все $Q \in \mathcal{Q}_F$, для которых $\overline{Q} \cap \Sigma_F$ — бесконечное множество.

Введем еще обозначения

$$\Sigma_F^{\mathrm{fin}} = \{x \in \Sigma_F \mid \exists Q \in \mathcal{Q}_F^{\mathrm{fin}} : x \in \overline{Q}\},$$

$$\Sigma_F^{\mathrm{inf}} = \Sigma_F \setminus \Sigma_F^{\mathrm{fin}} = \{x \in \Sigma_F \mid (x \in \overline{Q} \Rightarrow Q \in \mathcal{Q}_F^{\mathrm{inf}}) \ \ \forall Q \in \mathcal{Q}_F\}.$$

Заметим, что в силу свойств (f_2) и (k_2) функции f каждая сингулярная точка F граничит с конечным числом множеств из $\mathcal{Q}$. Следовательно, множество Σ_F^{fin} конечно. В противном случае множество $\mathcal{Q}_F^{\mathrm{fin}} \subset \mathcal{Q}_F$ было бы бесконечным и пространство $\Gamma_{K-R}(f)$ не являлось бы графом с черенками.

Таким образом, согласно предположению о бесконечности множества Σ_F, множество $\Sigma_F^{\inf}$ также бесконечно.

Выберем $Q_0 \in \mathcal{Q}_F^{\inf}$. Пусть $\Sigma_0 = \overline{Q}_0 \cap \Sigma_F^{\inf}$. Тогда множество Σ_0 бесконечно.

Как известно, определено непрерывное фактор-отображение $\hat{f}\colon \Gamma_{K-R}(f) \to \mathbb{R}$ такое, что $f = \hat{f} \circ \pi_f$. Из свойства (f_2) функции f легко следует, что на ребрах и черенках графа $\Gamma_{K-R}(f)$ отображение $\hat{f}$ строго монотонно.

Связное множество $\pi_f(Q_0)$ содержится в некотором ребре или черенке графа $\Gamma_{K-R}(f)$. Поскольку $u \in \overline{\pi_f(Q_0)} \setminus \pi_f(Q_0)$, то Q_0 содержится в одном из множеств $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) > \hat{f}(u)\}$ или $H^- = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) < \hat{f}(u)\}$.

Не ограничивая общности рассуждений будем считать, что $Q_0 \subset H^+$ (в противном случае функцию f можно заменить на $-f$).

Проверим, что для каждого $x_0 \in \Sigma_0$ существует $Q(x_0) \in \mathcal{Q}_F^{\inf}$ такое, что $x_0 \in \overline{Q(x_0)}$, $Q(x_0) \neq Q_0$ и $Q(x_0) \subset H^+$.

Используя свойство (f_2) функции f, найдем такие окрестность U точки x_0, $n > 1$, и гомеоморфизмы $h\colon \overline{U} \to D$, $h'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $h(x_0) = 0$, $h(\overline{U}) = D$ и $g \circ h = h' \circ f$. Здесь $g = \operatorname{Re} z^n\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Обозначим $S = \operatorname{Fr} U$.

Из предложения 1 следует, что f удовлетворяет свойству (k_2). Поэтому окрестность U можно выбрать настолько малой, что $\overline{U} \cap K \subset F$.

Как известно, множество F разбивает диск $\overline{U}$ на $2n$ попарно непересекающихся связных множеств E_k, $k = 0, \ldots, 2n-1$, таких, что $x_0 \in \overline{E}_k$ для каждого k. На каждом из этих множеств разность $f(x) - f(x_0) = f(x) - \hat{f}(u)$ знакопостоянна и имеет один знак на множествах с четными номерами и противоположный — на множествах с нечетными номерами.

По выбору окрестности U выполняются соотношения $\bigcup_{k=0}^{2n-1} E_k \subset \mathbb{R}^2 \setminus K$. Следовательно, для каждого $k \in \{0, \ldots, 2n-1\}$ существует $Q(k) \in \mathcal{Q}_F$ такое, что $E_k \subset Q(k)$. Более того, $Q(k) \in \mathcal{Q}_F^{\inf}$, так как $x_0 \in \Sigma_F^{\inf}$.

Поскольку $x_0 \in \overline{Q}_0$, найдется $s \in \{0, \ldots, 2n-1\}$ такое, что $E_s \subset Q_0 \subset H^+$. Существует еще по крайней мере один индекс $r \neq s$, $r \in \{0, \ldots, 2n-1\}$, который имеет с s одинаковую четность. Тогда $E_r \subset H^+$. Выполняется ровно одна из двух возможностей: либо $E_r \subset Q_0$, либо $E_r \cap Q_0 = \varnothing$.

Предположим, что $E_r \subset Q_0$.

Очевидно, что точка x_0 достижима с помощью простой непрерывной кривой как из E_s, так и из E_r (см. [6]). Кроме того, Q_0 — открытое связное подмножество $\mathbb{R}^2$, следовательно, оно линейно связно и любую пару точек $x' \in E_r$, $x'' \in E_s$ можно соединить в Q_0 простой непрерывной кривой. Вследствие этого найдется простая замкнутая кривая $\alpha\colon I \to Q_0 \cup \{x_0\}$ такая, что $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ и для некоторых $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$ выполняются соотношения $\alpha(t) \in E_s$ $\forall t \in (0, \tau_1]$ и $\alpha(t) \in E_r$ $\forall t \in [\tau_2, 1)$.

Пусть $t_1 = \max\{t \leq \tau_2 \mid \alpha(t) \in \overline{E}_s\}$. Так как $\overline{E}_r \cap \overline{E}_s = \{x_0\}$, то $0 < t_1 < \tau_2$. Пусть $t_2 = \min\{t \geq t_1 \mid \alpha(t) \in \overline{E}_r\}$. По аналогичным соображениям $t_1 < t_2 < 1$. Из соотношений $\operatorname{Fr} E_s \subset F \cup \operatorname{Fr} U = F \cup S \subset (\mathbb{R}^2 \setminus Q_0) \cup S$ заключаем, что $\alpha(t_1) \in S$. Аналогично, $\alpha(t_2) \in S$.

Рассмотрим простые непрерывные кривые $\beta_i\colon I \to D$,

$$\beta_i(t) = t \cdot h \circ \alpha(t_i), \quad i = 1, 2.$$

Кривые $\alpha_i = h^{-1} \circ \beta_i\colon I \to \overline{U}$, $i = 1, 2$, соединяют x_0 с точками $\alpha(t_1)$ и $\alpha(t_2)$ соответственно. При этом $\alpha_1(t) \in E_s \cap U$ и $\alpha_2(t) \in E_r \cap U$ для каждого $t \in (0, 1)$.

По построению $\alpha(t) \notin \overline{E}_r \cup \overline{E}_s$ при всех $t \in (t_1, t_2)$, поэтому непрерывная кривая $\gamma\colon I \to Q_0 \cup \{x_0\}$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha_1(3t), & \text{если} \quad t \leq 1/3, \\ \alpha((2-3t)t_1 + (3t-1)t_2), & \text{если} \quad t \in (1/3, 2/3), \\ \alpha_2(3-3t), & \text{если} \quad t \geq 2/3, \end{cases}$$

является простой.

Очевидно, $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Поскольку $\gamma(t) \in Q_0$ при $t \in (0,1)$, то $f \circ \gamma(t) > f(x_0)$ при $t \in (0,1)$. Также по построению $\gamma(I) \cap S = \{\gamma(1/3), \gamma(2/3)\}$, причем $\gamma(1/3) \in E_s$, $\gamma(2/3) \in E_r$ и $r \neq s$.

Итак, выполнены условия предложения 2 и существует индекс $m \in \{0, \ldots, 2n-1\}$ такой, что E_m содержится в диске O_γ, который ограничивает кривая γ, и выполняется соотношение $E_m \subset H^-$.

Существует $Q \in \mathcal{Q}_F^{\inf}$ такое, что $E_m \subset Q$. Тогда $Q \in H^-$. Так как по построению $\gamma(I) \cap \cap H^- = \varnothing$, то $Q \subset O_\gamma$ и множество $\overline{Q}$ компактно. Функция f удовлетворяет свойству (f_2), поэтому из компактности $\overline{Q}$ следует, что $Q \in \mathcal{Q}_F^{\mathrm{fin}}$. Однако $x_0 \in \Sigma_0 \subset \Sigma_F^{\inf}$ и по определению $\mathcal{Q}_F^{\inf} \cap \mathcal{Q}_F^{\mathrm{fin}} = \varnothing$.

Полученное противоречие доказывает, что $E_r \cap Q_0 = \varnothing$.

Существует $Q(x_0) \in \mathcal{Q}_F^{\inf}$ такое, что $E_r \subset Q(x_0)$. Тогда $x_0 \in \overline{Q(x_0)}$, $Q(x_0) \neq Q_0$ и $Q(x_0) \subset H^+$.

Проверим, что $Q(x_0) \neq Q(x_1)$ при $x_0 \neq x_1$, $x_0, x_1 \in \Sigma_0$.

Предположим, что это не так, и для некоторых $x_0, x_1 \in \Sigma_0$, $x_0 \neq x_1$, имеем $Q(x_0) = Q(x_1)$.

Как и выше, использовав свойство (f_2) функции f, найдем открытую окрестность U точки x_0, $n > 1$, и гомеоморфизмы $h\colon \overline{U} \to D$, $h'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $h(x_0) = 0$, $h(\overline{U}) = D$ и $g \circ h = h' \circ f$. Пусть $S = \operatorname{Fr} U$.

Выберем U настолько малой, что $\overline{U} \cap K \subset F$ и $x_1 \notin \overline{U}$.

Как и выше, множество F разбивает диск $\overline{U}$ на $2n$ попарно непересекающихся связных множеств E_k, $k = 0, \ldots, 2n-1$, таких, что $x_0 \in \overline{E}_k$ для каждого k. На каждом из этих множеств разность $f(x) - f(x_0)$ знакопостоянна и имеет один знак на множествах с четными номерами и противоположный — на множествах с нечетными номерами.

Также согласно выбору окрестности U выполняются соотношения $\bigcup_{k=0}^{2n-1} E_k \subset \mathbb{R}^2 \setminus K$. Поэтому найдутся индексы $r, s \in \{0, 2n-1\}$, $r \neq s$, имеющие одинаковую четность и такие, что $E_r \subset Q(x_0)$, $E_s \subset Q_0$. Очевидно, что $E_r \cup E_s \subset H^+$.

Множества Q_0 и $Q(x_0)$ линейно связны, а точки x_0 и x_1 достижимы из каждого из этих множеств. Поэтому существуют простые непрерывные кривые $\mu_0 : I \to \mathbb{R}^2 \setminus H^-$ и $\mu_1 : I \to \to \mathbb{R}^2 \setminus H^-$, удовлетворяющие таким условиям:

$\mu_0(0) = \mu_1(0) = x_0$, $\mu_0(1) = \mu_1(1) = x_1$;

$\mu_0(t) \in Q_0$, $\mu_1(t) \in Q(x_0)$ при всех $t \in (0,1)$;

существуют $\tau_1, \tau_2 \in (0,1)$ такие, что $\mu_0(t) \in E_s$ при $t \in (0, \tau_1]$ и $\mu_1(t) \in E_r$ при $t \in (0, \tau_2]$.

Поскольку $Q_0 \cap Q(x_0) = \varnothing$, отображение $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2 \setminus H^-$,

$$\alpha(t) = \begin{cases} \mu_0(2t), & \text{если} \quad t \leq 1/2, \\ \mu_1(2-2t), & \text{если} \quad t > 1/2, \end{cases}$$

является простой замкнутой кривой, причем $\alpha(t) \in E_s$ при $t \in (0, \tau_1/2]$ и $\alpha(t) \in E_r$ при $t \in [1 - \tau_2/2, 1)$.

Применив рассуждения, аналогичные (с очевидными изменениями) приведенным выше, найдем простую замкнутую кривую $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2 \setminus H^-$, удовлетворяющую предложению 2.

Из предложения 2, как и выше, следует, что найдется $Q \in \mathcal{Q}_F$ такое, что $x_0 \in \overline{Q}$ и замыкание $\overline{Q}$ компактно. Вследствие этого $Q \in \mathcal{Q}_F^{\text{fin}}$, что противоречит выбору точки x_0, так как $x_0 \in \Sigma_F^{\text{inf}}$.

Итак, для каждого $x_0 \in \Sigma_0$ существует $Q(x_0) \in \mathcal{Q}_F^{\text{inf}}$, причем $Q(x_0) \neq Q(x_1)$ при $x_0 \neq x_1$, $x_0, x_1 \in \Sigma_0$.

Из этого следует, что множество $Q_F^{\text{inf}} \subset Q_F$ содержит бесконечное число элементов и $\Gamma_{K-R}(f)$ не является графом с черенками.

Теорема доказана.

1. *Полулях Е. А.* Графы Кронрода – Риба функций на некомпактных двумерных поверхностях. I // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 3. – С. 375 – 396.
2. *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. – М.: Наука, 1977. – 488 с.
3. *Берж К.* Теория графов и ее приложения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 320 с.
4. *Hilton P. J., Wylie S.* Homology theory. An introduction to algebraic topology. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1960. – xv+484 p.
5. *Kuratowski K.* Topology. Vol. II. – New York; London: Acad. Press, 1968. – xiv+608 p.
6. *Newman M. H. A.* Elements of the topology of plane sets of points. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1964. – 214 p.

Получено 21.07.14