УДК 517.5

М. Р. Лангаршоев (Тадж. нац. ун-т, Душанбе)

О НАИЛУЧШИХ ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

We find the exact values of the series of n-widths for the classes of functions from the Hardy and Bergman spaces whose averaged moduli of continuity are majored by a given function satisfying certain restrictions.

Обчислено точні значення ряду n-поперечників класу функцій, що належать просторам Гарді і Бергмана, усереднені модулі неперервності яких мажоруються заданою функцією, що задовольняє деякі обмеження.

1. Вопросы вычисления точных значений n-поперечников классов аналитических в круге функций и построения наилучших линейных методов приближения в пространствах Харди H_q и Бергмана $B_{q,\gamma}$, $q \geq 1$, с весом $\gamma \geq 0$ рассматривались во многих работах (см., например, [1–23] и приведенную там библиографию).

В данной работе продолжаются эти исследования, и здесь для классов аналитических в круге функций $W_a^{(r)}X(\Phi)$, $r \in \mathbb{N}$ (X — пространство Харди H_q, $q \geq 1$, либо весовое пространство Бергмана $B_{q,\gamma}$, $q \geq 1$), у которых усредненные модули непрерывности r-х производных мажорируются заданной функцией Φ, удовлетворяющей некоторым ограничениям, построены наилучшие линейные методы приближения. Вычислены точные значения бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских и линейных n-поперечников.

Предварительно введем некоторые необходимые для дальнейшего обозначения и понятия. Пусть $U_\rho := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < \rho\}$, где $0 < \rho \leq 1$, $U_1 = U$, $A(U_\rho)$ — множество функций, аналитических в круге U_ρ. Для произвольной функции $f \in A(U_\rho)$ при $0 < \rho \leq 1$ положим

$$M_q(f,\rho) = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt\right)^{1/q}, \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. При $q = \infty$ дополнительно будем предполагать функцию $f \in A(U)$ непрерывной в замкнутом круге $\overline{U} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 1\}$.

Через H_q, $1 \leq q \leq \infty$, обозначим банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U)$, для которых

$$\|f\|_{H_q} = \lim_{\rho \to 1-0} M_q(f,\rho) < \infty, \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

Известно, что норма функции $f \in H_q$ реализуется на угловых граничных значениях, которые далее обозначим $f(t) := f(e^{it})$. При этом

$$\|f\|_{H_q} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(e^{it})|^q dt\right)^{1/q}, \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

Через $\mathscr{L}_q := \mathscr{L}_q(U)$, $1 \leq q \leq \infty$, обозначим банахово пространство комплекснозначных в U функций f, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{\mathscr{L}_q}=\left(\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(U)}|f(z)|^q dxdy\right)^{1/q}=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\rho|f(\rho e^{it})|^q d\rho dt\right)^{1/q},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Пусть $\gamma(|z|)$ — некоторая неотрицательная не эквивалентная нулю интегрируемая в круге U функция, $\mathscr{L}_{q,\gamma}:=\mathscr{L}_q(U,\gamma)$, $1\le q\le\infty$, — множество комплекснозначных в U функций f, для которых $\gamma^{1/q}f\in\mathscr{L}_q(U)$, $\|f\|_{\mathscr{L}_{q,\gamma}}=\|\gamma^{1/q}f\|_{\mathscr{L}_q}$. Под $B_{q,\gamma}:=B_q(U,\gamma)$, $1\le q<\infty$, понимаем банахово пространство функций $f\in A(U)$, для которых $f\in\mathscr{L}_{q,\gamma}$. При этом

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}}=\left(\int\limits_0^1\rho\gamma(\rho)M_q^q(f,\rho)d\rho\right)^{1/q}.$$

Если, в частности, $\gamma(\rho)\equiv 1$, то $B_q=B_{q,1}$ является обычным пространством Бергмана. Для любого $r\in\mathbb{N}$ производную r-го порядка функции $f(z)$ по аргументу переменной $z=\rho\exp(it)$ обозначим через $f_a^{(r)}(z):=\dfrac{\partial^r f(\rho e^{it})}{\partial t^r}$, причем $f_a^{(1)}(z)=\dfrac{df}{dz}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial t}=f'(z)\cdot zi$ и $f_a^{(r)}(z)=\left\{f_a^{(r-1)}(z)\right\}_a'$, если $r\ge 2$. Понимая под $X(U)$ любое из приведенных функциональных пространств H_q или $B_{q,\gamma}$, через $X_\rho:=X_\rho(U)$, $0<\rho\le 1$, обозначим пространство функций $f\in A(U_\rho)$, для которых $\|f(z)\|_{X_\rho(U)}:=\|f(\rho z)\|_{X(U)}<\infty$. Очевидно, что $X_\rho(U)$ — банахово пространство, $X_1(U)=X(U)$. Через $\mathscr{P}_{n-1}$ обозначим подпространство алгебраических полиномов комплексной переменной z, степень которых не превышает $n-1$. Через $X_a^{(r)}(U)$ $\big(r\in\mathbb{Z}_+, X_a^{(0)}(U)\equiv X(U)\big)$ обозначим множество функций $f\in A(U)$, у которых $f_a^{(r)}\in X(U)$. В соответствии с принятыми обозначениями, например, $\mathscr{B}_{q,\gamma,\rho}^{(r)}$ означает множество функций $f\in A(U_\rho)$, у которых $f_a^{(r)}\in B_{q,\gamma,\rho}$. Для произвольной функции $f(z)\in X(U)$ запишем модуль непрерывности в виде

$$\omega(f,t)_{X(U)}=\sup\left\{\left\|f\left(ze^{ih/2}\right)-f\left(ze^{-ih/2}\right)\right\|_{X(U)}:|h|\le t\right\}.$$

Пусть $\Phi(u)$ — неотрицательная неубывающая функция, определенная для $u\ge 0$ и удовлетворяющая условию

$$\lim\{\Phi(u)\colon u\to 0\}=\Phi(0)=0.$$

Принимая Φ в качестве заданной мажоранты, введем в рассмотрение класс функций

$$W_a^{(r)}X(\Phi)=\left\{f\in X_a^{(r)}(U)\colon\frac{1}{h}\int\limits_0^h\omega\left(f_a^{(r)},2t\right)_{X(U)}dt\le\Phi(h)\ \ \forall h\in(0,2\pi]\right\}.$$

2. Пусть X — произвольное банахово пространство, $L_n\subset X$ — подпространство размерности n, $\Lambda(f,L_n)$ — линейный непрерывный оператор, переводящий X в L_n. Наилучшее приближение функции $f\in X$ элементами $\varphi\in L_n$ определим равенством

$$E(f,L_n)_X:=\inf\left\{\|f-\varphi\|_X:\varphi\in L_n\right\},$$

а уклонение функции $f \in X$ от линейного непрерывного оператора $\Lambda(f, L_n)$ в метрике пространства X обозначим

$$\mathcal{E}\big(f, \Lambda(f, L_n)\big)_X = \big\|f - \Lambda(f, L_n)\big\|_X.$$

Для центрально-симметричного множества $\mathfrak{M} \subset X$ полагаем

$$E(\mathfrak{M}, L_n)_X := \sup\big\{E(f, L_n)_X : f \in \mathfrak{M}\big\},$$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \Lambda, L_n)_X := \sup\big\{\mathcal{E}\big(f, \Lambda(f, L_n)\big)_X : f \in \mathfrak{M}\big\}.$$

Величины

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{E(\mathfrak{M}, L_n)_X : L_n \subset X\Big\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\inf\big\{\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \Lambda, L_n)_X : \Lambda\colon X \to L_n\big\} : L_n \subset X\Big\},$$

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\Big\{\sup\big\{\varepsilon > 0\colon \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M}\big\} : L_{n+1} \subset X\Big\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\sup\big\{\|f\|_X : f \in \mathfrak{M} \cap L^n\big\} : L^n \subset X\Big\},$$

где S — единичный шар в X, а L^n — линейное подпространство коразмерности n из X, называют соответственно колмогоровским, линейным, бернштейновским, гельфандовским n-поперечниками. Указанные выше n-поперечники монотонно убывают по n и удовлетворяют соотношениям [4, 7]

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \le \begin{matrix} d_n(\mathfrak{M}, X) \\ d^n(\mathfrak{M}, X) \end{matrix} \le \delta_n(\mathfrak{M}, X). \tag{1}$$

Если существует линейный оператор $\Lambda^*\colon X \to L_n^*$, для которого

$$\delta_n(\mathfrak{M}, X) = \mathcal{E}(\mathfrak{M}, \Lambda^*, L_n^*),$$

то его называют наилучшим линейным методом приближения множества $\mathfrak{M}$ в пространстве X.

Если существует подпространство $L_{n+1}^0 \subset X$, для которого

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\{\varepsilon > 0\colon \varepsilon S \cap L_{n+1}^0 \subset \mathfrak{M}\},$$

то оно является экстремальным для бернштейновского n-поперечника. Аналогично, если существуют подпространства $L_n \subset X$, на которых достигаются внешние нижние грани в определении остальных n-поперечников, то указанные подпространства называются экстремальными.

3. В работах [22] (случай $X = H_q$) и [23] (случай $X = B_{q,\gamma}$) доказано, что если мажоранта Φ при любом $n \in \mathbb{N}$ и $h \in (0, 2\pi]$ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/(2n))} \ge \frac{\pi}{2nh} \int\limits_0^{nh} (\sin t)_* dt, \tag{2}$$

где

$$(\sin t)_* := \big\{ \sin t, \text{ если } 0 < t \le \pi/2;\ 1, \text{ если } t \ge \pi/2 \big\},$$

то для произвольного $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$b_n\left(W_a^{(r)} X(\Phi), X(U)\right) = d_n\left(W_a^{(r)} X(\Phi), X(U)\right) =$$

$$= E\left(W_a^{(r)} X(\Phi), \mathscr{P}_{n-1}\right)_{X(U)} = \frac{\pi}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{3}$$

Там же доказано, что условию (2) удовлетворяет, например, $\Phi_*(u) = u^{\pi/2-1}$. Наша цель состоит в распространении результата (3) на более общее пространство $X_\rho(U)$, $0 < \rho \le 1$, а именно справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}_+$ *и мажоранта* Φ *удовлетворяет ограничению* (2). *Тогда для произвольной* $n \in \mathbb{N}$ *и* $0 < \rho \le 1$ *имеют место равенства*

$$b_n\left(W_a^{(r)} X(\Phi), X_\rho(U)\right) = d_n\left(W_a^{(r)} X(\Phi), X_\rho(U)\right) =$$

$$= E\left(W_a^{(r)} X(\Phi), \mathscr{P}_{n-1}\right)_{X_\rho(U)} = \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{4}$$

Доказательство. Действительно, воспользуемся тем фактом, что для произвольной функции $f \in X_\rho(U)$ при любых $n \in \mathbb{N}$ и $0 < \rho \le 1$ выполняется неравенство [12] (случай $X = H_q$), [19] (случай $X = B_{q,\gamma}$)

$$E\left(f, \mathscr{P}_{n-1}\right)_{X_\rho(U)} \le \rho^n E\left(f, \mathscr{P}_{n-1}\right)_{X(U)}. \tag{5}$$

Если функция f принадлежит $W_a^{(r)} X(\Phi)$, то, переходя в обеих частях неравенства (5) к верхним граням по всем функциям класса, с учетом (3) получаем

$$E\left(W_a^{(r)} X(\Phi), \mathscr{P}_{n-1}\right)_{X_\rho(U)} \le \rho^n E\left(W_a^{(r)} X(\Phi), \mathscr{P}_{n-1}\right)_{X(U)} \le \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Учитывая полученное неравенство и соотношения (1) между n-поперечниками для бернштейновского и колмогоровского n-поперечников, записываем оценки сверху

$$b_n\left(W_a^{(r)} X(\Phi), X_\rho(U)\right) \le d_n\left(W_a^{(r)} X(\Phi), X_\rho(U)\right) \le$$

$$\le E\left(W_a^{(r)} X(\Phi), \mathscr{P}_{n-1}\right)_{X_\rho(U)} \le \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{6}$$

С целью получения оценки снизу указанных n-поперечников в множестве $\mathscr{P}_n \cap X_\rho(U)$ введем в рассмотрение шар

$$S_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathscr{P}_n \colon \|p_n\|_{X_\rho(U)} \le \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\} \tag{7}$$

и докажем включение $S_{n+1} \subset W_a^{(r)} X(\Phi)$. Воспользуемся неравенством

$$\omega\left((p_n)_a^{(r)};2t\right)_{X(U)}\leq 2n^r(\sin nt)_*\|p_n\|_{X(U)}, \tag{8}$$

справедливым для произвольного полинома $p_n\in\mathscr{P}_n$, которое в случае $X=H_q$ доказано в [5], а в случае $X=B_{q,\gamma}$ — в [19]. Для произвольных $0<\rho\leq 1$ и полинома $p_n(z)\in\mathscr{P}_n$ запишем равенство [16]

$$p_n(\rho e^{it})=\frac{1}{2\pi\rho^n}\int\limits_0^{2\pi}p_n\left(R\rho e^{i(t-\tau)}\right)e^{in\tau}\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos k\tau\right)d\tau, \tag{9}$$

которое легко получить непосредственной проверкой. Применив интегральное неравенство Минковского с учетом определения норм в $X_\rho(U)$, из (9) получим неравенство [16, с. 1163]

$$\|p_n\|_{X(U)}\leq\rho^{-n}\|p_n\|_{X_\rho(U)}. \tag{10}$$

Используя неравенство (10), записываем (8) в виде

$$\omega\left((p_n)_a^{(r)};2t\right)_{X(U)}\leq 2n^r(\sin nt)_*\rho^{-n}\|p_n\|_{X_\rho(U)}. \tag{11}$$

Учитывая определение класса $W_a^{(r)}X(\Phi)$ и ограничение (2), из неравенства (11) для произвольного $p_n\in S_{n+1}$ имеем

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h\omega\left((p_n)_a^{(r)};2t\right)_{X(U)}dt\leq 2n^r\rho^{-n}\|p_n\|_{X_\rho(U)}\frac{1}{h}\int\limits_0^h(\sin nt)_*dt\leq$$

$$\leq\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\frac{\pi}{2nh}\int\limits_0^{nh}(\sin t)_*dt\leq\Phi(h),$$

откуда и следует включение $S_{n+1}\subset W_a^{(r)}X(\Phi)$. Из этого включения и определения бернштейновского n-поперечника следуют оценки снизу

$$d_n\left(W_a^{(r)}X(\Phi),X_\rho(U)\right)\geq b_n\left(W_a^{(r)}X(\Phi),X_\rho(U)\right)\geq$$

$$\geq b_n\left(S_{n+1},X_\rho(U)\right)\geq\frac{\pi\rho^n}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{12}$$

Сопоставляя оценки сверху (6) и оценки снизу (12), получаем требуемые равенства (4).

Теорема 1 доказана.

Далее мы докажем, что теорема 1 справедлива также для гельфандовского и линейного n-поперечников. Для доказательства этого факта нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть мажоранта* Φ *удовлетворяет условию* (2). *Тогда для произвольной функции* $f(z)\in W_a^{(r)}X(\Phi)$, $r\in\mathbb{N}$, *при любом* $n\in\mathbb{N}$ *и* $0<\rho\leq 1$ *выполняется неравенство*

$$\|f-\mathscr{L}_{\rho,r-1}(f,\mathscr{P}_{n-1})\|_{X_\rho(U)}\leq\frac{\pi\rho^n}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right), \tag{13}$$

в котором линейный полиномиальный оператор $\mathscr{L}_{\rho,r-1}(f,\mathscr{P}_{n-1})$ *определяется равенством* [16, с. 1158]

$$\mathscr{L}_{\rho,r-1}(f,\mathscr{P}_{n-1};z)=$$

$$=c_0+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{1+\left(\frac{k}{2n-k}\right)^{r-1}\rho^{2(n-k)}\left[\gamma_{k,n}\left(1-\left(\frac{k}{2n-k}\right)^2\right)-1\right]\right\}c_kz^k,$$

$$\gamma_{k,n}=n\int\limits_0^{\pi/(2n)}\cos kt\cos nt dt,\quad k=1,2,\ldots,n-1, \tag{14}$$

и является наилучшим линейным методом приближения класса $W_a^{(r)}X(\Phi)$ *в метрике пространства* $X_\rho(U)$. *При этом существует функция* $f_0(z)\in W_a^{(r)}X(\Phi)$, *удовлетворяющая условию* (2), *для которой неравенство* (13) *обращается в равенство.*

Доказательство. В [16] (случай $X=H_q$), [23] (случай $X=B_{q,\gamma}$) доказано, что для произвольной функции $f\in X_a^{(r)}(U)$ выполняется неравенство

$$\left\|f-\mathscr{L}_{\rho,r-1}(f,\mathscr{P}_{n-1})\right\|_{X_\rho(U)}\le\frac{\rho^n}{2n^{r-1}}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega\left(f_a^{(r)};2t\right)_{X(U)}dt, \tag{15}$$

обращающееся в равенство для функции $f_0(z)=az^n$, $a\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$. Если предположить, что $f\in W_a^{(r)}X(\Phi)$, то из правой части (15) непосредственно получаем

$$\frac{\rho^n}{2n^{r-1}}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega\left(f_a^{(r)};2t\right)_{X(U)}dt=\frac{\pi\rho^n}{4n^r}\left(\frac{2n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega\left(f_a^{(r)};2t\right)_{X(U)}dt\right)\le\frac{\pi\rho^n}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{16}$$

Из соотношений (15) и (16) следует неравенство (13). Для завершения доказательства леммы остается показать, что в классе $W_a^{(r)}X(\Phi)$ существует функция, удовлетворяющая ограничению (2), для которой неравенство (13) обращается в равенство. Рассмотрим функцию

$$f_0(z)=\frac{\pi\rho^n}{4(in)^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\frac{z^n}{\|z^n\|_{X_\rho(U)}},\quad 0<\rho\le1.$$

Поскольку $\|f_0\|_{X_\rho(U)}=\dfrac{\pi\rho^n}{4n^r}\Phi\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$, то функция f_0 принадлежит S_{n+1}, где шар S_{n+1} определен соотношением (7) и, следовательно, функция $f_0(z)$ удовлетворяет ограничению (2) и принадлежит классу $W_a^{(r)}X(\Phi)$, и, кроме того, в силу вида оператора (14) выполняется равенство $\mathscr{L}_{\rho,r-1}(f_0,\mathscr{P}_{n-1})\equiv0$. Поэтому имеем

$$\left\|f_0-\mathscr{L}_{\rho,r-1}(f_0,\mathscr{P}_{n-1})\right\|_{X_\rho(U)}=\|f_0\|_{X_\rho(U)}=\frac{\pi\rho^n}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{17}$$

Лемма доказана.

Отметим, что равенство (17) означает, что линейный полиномиальный оператор (14) является наилучшим линейным методом приближения класса $W_a^{(r)}X(\Phi)$ в метрике пространства $X_\rho(U)$.

Теорема 2. *Если мажоранта* Φ *удовлетворяет условию* (2), *то при любых* $n, r \in \mathbb{N}$ *и* $0 < \rho \le 1$ *справедливы равенства*

$$d^n\left(W_a^{(r)}X(\Phi), X_\rho(U)\right) = \delta_n\left(W_a^{(r)}X(\Phi), X_\rho(U)\right) =$$

$$= \mathcal{E}\left(W_a^{(r)}X(\Phi), \Lambda_{\rho,r-1}, \mathscr{P}_{n-1}\right)_{X_\rho(U)} = \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{18}$$

Доказательство. Заметим, что из неравенство (13) и равенства (17) получаем

$$\mathcal{E}\left(W_a^{(r)}X(\Phi), \Lambda_{\rho,r-1}, \mathscr{P}_{n-1}\right)_{X_\rho(U)} =$$

$$= \sup\left\{\left\|f - \mathscr{L}_{\rho,r-1}(f, \mathscr{P}_{n-1})\right\|_{X_\rho(U)} : f \in W_a^{(r)}X(\Phi)\right\} =$$

$$= \left\|f_0 - \mathscr{L}_{\rho,r-1}(f_0, \mathscr{P}_{n-1})\right\|_{X_\rho(U)} = \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{19}$$

Из неравенства (13) и равенства (19) следует, что если мажоранта Φ удовлетворяет ограничению (2), то для линейного n-поперечника справедлива оценка сверху

$$\delta_n\left(W_a^{(r)}X(\Phi), X_\rho(U)\right) \le$$

$$\le \mathcal{E}\left(W_a^{(r)}X(\Phi), \Lambda_{\rho,r-1}, \mathscr{P}_{n-1}\right)_{X_\rho(U)} = \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{20}$$

Аналогичную оценку получим для гельфандовского n-поперечника. Действительно, для произвольной функции $f \in W_a^{(r)}X(\Phi) \cap L_*^n$ из соотношений $c_k(f) = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0, k = 0, 1, \ldots, n-1$, в силу представления линейного полиномиального оператора (14) следует, что $\mathscr{L}_{\rho,r-1}(f, \mathscr{P}_{n-1}; z) \equiv 0$. Поэтому из неравенства (13) и определения гельфандовского n-поперечника получаем

$$d^n\left(W_a^{(r)}X(\Phi), X_\rho(U)\right) \le$$

$$\le \sup\left\{\|f\|_{X_\rho(U)} : f \in W_a^{(r)}X(\Phi) \cap L_*^n\right\} \le \frac{\pi\rho^n}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{21}$$

Сопоставляя неравенства (20) и (21) с неравенствами (12), в силу (1) получаем требуемые равенства (18), что и завершает доказательство теоремы 2.

4. Следуя С. Б. Вакарчуку [9], символом $\widetilde{\mathscr{P}}_{n-1}$ обозначим n-мерное подпространство, порожденное базисом

$$\widetilde{\varphi}_k(z) = \left\{1 - \big(k/(2n-k)\big)^{r-1}\big[1 - \gamma_{n,k}(1 - k^2/(2n-k)^2)\big]|z|^{2(n-k)}\right\} z^k, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Для произвольной функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k \in X(U)$, где $c_k(f)$ — ее коэффициенты Тейлора, полагаем

$$\widetilde{V}_{r-1}\left(f, \widetilde{\mathscr{P}}_n; z\right) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f)\widetilde{\varphi}_k(z).$$

Теорема 3. *Пусть мажоранта Φ удовлетворяет условию* (2). *Тогда для любых $n, r \in \mathbb{N}$ выполнены соотношения*

$$\lambda_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi), \mathscr{L}_{q,\gamma}\right) = \overline{\lambda}_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi), B_{q,\gamma}\right) =$$

$$= E\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi), \widetilde{\mathscr{P}}_{n-1}\right)_{\mathscr{L}_{q,\gamma}} = \mathcal{E}\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi), \widetilde{V}_{r-1}, \widetilde{\mathscr{P}}_{n-1}\right)_{\mathscr{L}_{q,\gamma}} =$$

$$= \frac{\pi}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}, \tag{22}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$ или $\delta_n(\cdot)$, а $\overline{\lambda}_n(\cdot)$ — один из поперечников $d^n(\cdot)$ либо $b_n(\cdot)$.

Доказательство. Отметим, что для произвольной функции $f(z) \in H_{q,a}^{(r)}$ выполняется неравенство [16, с. 1164]

$$M_q\left(f - \widetilde{V}_{r-1}(f, \widetilde{\mathscr{P}}_{n-1}); \rho\right) \le \frac{\rho^n}{2n^{r-1}} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega\left(f_a^{(r)}, 2t\right)_{H_q} dt. \tag{23}$$

В силу определения нормы пространства $\mathscr{L}_{q,\gamma}$ из (23) получаем

$$\mathcal{E}\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi), \widetilde{V}_{r-1}, \widetilde{\mathscr{P}}_{n-1}\right)_{\mathscr{L}_{q,\gamma}} \le \frac{\pi}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}. \tag{24}$$

Учитывая соотношения (1) между n-поперечниками, с учетом (24) записываем оценки сверху

$$\lambda_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi), \mathscr{L}_{q,\gamma}\right) \le \frac{\pi}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}. \tag{25}$$

Заметим, что пространство $B_{q,\gamma}$ изоморфно и изометрично вложено в пространство $\mathscr{L}_{q,\gamma}$, поэтому на основании определения и свойств бернштейновского и гельфандовского n-поперечников запишем равенства [7] (гл. II)

$$b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi), B_{q,\gamma}\right) = b_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi), \mathscr{L}_{q,\gamma}\right), \tag{26}$$

$$d^n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi), B_{q,\gamma}\right) = d^n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi), \mathscr{L}_{q,\gamma}\right). \tag{27}$$

Из равенств (26), (27) и неравенства (25) следуют оценки сверху всех указанных выше n-поперечников.

Для получения оценки снизу введем в рассмотрение $(n+1)$-мерный шар полиномов

$$S_{n+1}^* = \left\{p_n(z) \in \mathscr{P}_n : \|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \le \frac{\pi}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}\right\}$$

и докажем, что $S_{n+1}^* \subset W_a^{(r)} H_q(\Phi)$.

Воспользуемся тем, что для произвольного полинома $p_n(z) \in \mathscr{P}_n$ при всех $1 \le q \le \infty$ и любых $n, r \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство [20]

$$\left\| (p_n)_a^{(r)} \right\|_{H_q} \le n^r \left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1/q} \|p_n\|_{B_{q,\gamma}}, \tag{28}$$

которое обращается в равенство для полинома $q_n(z) = az^n$, $a \in \mathbb{C}$. Л. В. Тайковым [5] доказано, что для произвольной $p_n(z) \in \mathscr{P}_n$ выполняется неравенство

$$\left\| (p_n)_a^{(r)}(x+t) - (p_n)_a^{(r)}(x-t) \right\|_{H_q} \le 2(\sin nt)_* \left\| (p_n)_a^{(r)} \right\|_{H_q},$$

из которого следует, что

$$\omega\left((p_n)_a^{(r)}, 2t \right)_{H_q} \le 2(\sin nt)_* \left\| (p_n)_a^{(r)} \right\|_{H_q}. \tag{29}$$

Учитывая неравенство (28), записываем (29) в виде

$$\omega\left((p_n)_a^{(r)}, 2t \right)_{H_q} \le 2n^r (\sin nt)_* \|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1/q}. \tag{30}$$

Используя неравенство (30) и определение класса $W_a^{(r)} H_q(\Phi)$, для произвольного полинома $p_n(z) \in S_{n+1}^*$ с учетом условия (2) получаем

$$\frac{1}{h} \int\limits_0^h \omega\left((p_n)_a^{(r)}, 2t \right)_{H_q} dt \le 2n^r \left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{-1/q} \|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \frac{1}{h} \int\limits_0^h (\sin nt)_* dt \le$$

$$\le \Phi\left(\frac{\pi}{2n} \right) \frac{\pi}{2nh} \int\limits_0^{nh} (\sin t)_* dt \le \Phi(h).$$

Последнее неравенство означает, что $S_{n+1}^* \subset W_a^{(r)} H_q(\Phi)$. Отсюда и из определения n-поперечника Бернштейна в силу (1) имеем

$$\lambda_n \left(W_a^{(r)} H_q(\Phi), B_{q,\gamma} \right) \ge b_n \left(W_a^{(r)} H_q(\Phi), B_{q,\gamma} \right) \ge$$

$$\ge b_n \left(S_{n+1}^*, B_{q,\gamma} \right) \ge \frac{\pi}{4n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2n} \right) \left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q}. \tag{31}$$

Требуемое равенство (22) получаем путем сопоставления оценок сверху (24), (25) и снизу (31), используя при этом формулы (26), (27).

Теорема 3 доказана.

5. В экстремальных задачах теории приближения часто возникает необходимость найти точное значение верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах периодических функций (см., например, [12]). Аналогичным образом определенный интерес представляет нахождение точных верхних граней модулей коэффициентов Тейлора на классах аналитических в круге функций, принадлежащих пространствам H_q и $B_{q,\gamma}$, $1 \le q \le \infty$.

Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций, принадлежащий пространствам H_q или $B_{q,\gamma}$, то положим

$$\mathcal{L}_n(\mathfrak{M}) := \sup\left\{|c_n(f)| : f \in \mathfrak{M}\right\}. \tag{32}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Для любых* $n, r \in \mathbb{N}$, $1 \le q \le \infty$ *при выполнении условия* (2) *справедливы равенства*

$$\mathcal{L}_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi)\right) = \frac{\pi}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right), \tag{33}$$

$$\mathcal{L}_n\left(W_a^{(r)} B_{q,\gamma}(\Phi)\right) = \frac{\pi}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{-1/q}. \tag{34}$$

Доказательство. Чтобы доказать равенство (33), коэффициенты Тейлора $c_n(f)$ произвольной функции $f \in A(U)$ представим в виде

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\varsigma|=\rho} f(\varsigma)\varsigma^{-n-1}d\varsigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi\rho^n}\int\limits_0^{2\pi}\left[f(\rho e^{it}) - \mathscr{L}_{\rho,r-1}(f, \mathscr{P}_{n-1}; \rho e^{it})\right]e^{-int}dt, \tag{35}$$

где $\mathscr{L}_{\rho,r-1}(f, \mathscr{P}_{n-1}; \rho e^{it})$ — линейный оператор, определенный равенством (14). Из соотношения (35) с помощью неравенства Гельдера и равенства (19) для произвольной функции $f(z) \in W_a^{(r)} H_q(\Phi)$ получаем

$$|c_n(f)| \le \rho^{-n}\mathcal{E}\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi), \mathscr{L}_{\rho,r-1}; \mathcal{P}_{n-1}\right)_{H_{q,\rho}} \le \frac{\pi}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

откуда, учитывая (32), записываем оценку сверху

$$\mathcal{L}_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi)\right) \le \frac{\pi}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{36}$$

Для получения оценки снизу величины $\mathcal{L}_n\left(W_a^{(r)} H_q(\Phi)\right)$ рассмотрим функцию

$$f_1(z) = \frac{\pi}{4(in)^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)z^n.$$

Поскольку $\|f_1\|_{H_q} = \dfrac{\pi}{4n^r}\Phi\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$, то с учетом доказательства теоремы 1 $f_1(z) \in S_n \subset W_a^{(r)} H_q(\Phi)$. Используя соотношение (32), отсюда получаем

$$\mathcal{L}_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi)\right) \geq |c_n(f_1)| = \frac{\pi}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{37}$$

Из сравнения неравенств (36) и (37) следует (33). Для доказательства равенства (34) воспользуемся равенством [16]

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi(\rho R)^n}\int\limits_0^{2\pi}\left[f(\rho Re^{i\tau}) - \mathscr{L}_{\rho,r-1}(f,\mathscr{P}_{n-1};\rho Re^{i\tau})\right]e^{-in\tau}d\tau, \tag{38}$$

где $0 < \rho < R \leq 1$. Из равенства (38), как и выше, используя неравенство Гельдера, имеем

$$(\rho R)^n|c_n(f)| \leq M_q\left(f - \mathscr{L}_{\rho,r-1}(f,\mathscr{P}_{n-1});\rho R\right). \tag{39}$$

В силу определения нормы в $B_{q,\gamma}$, из неравенств (39) и (13) для произвольной функции $f(z) \in$ $\in W_a^{(r)}B_{q,\gamma}(\Phi)$ находим

$$R^n\left(\int\limits_0^1\rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}|c_n(f)| \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_0^1\rho\gamma(\rho)M_q^q\big(f - \mathscr{L}_{\rho,r-1}(f,\mathscr{P}_{n-1});\rho R\big)d\rho\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \mathcal{E}\big(f,\mathscr{L}_{\rho,r-1}(f,\mathscr{P}_{n-1})\big)_{B_{q,\gamma,R}} \leq \frac{\pi R^n}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Отсюда получаем оценку сверху

$$\mathscr{L}_n\left(W_a^{(r)}B_{q,\gamma}(\Phi)\right) \leq \frac{\pi}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\left(\int\limits_0^1\rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{-1/q}. \tag{40}$$

Для получения оценки снизу введем в рассмотрение функцию

$$f_2(z) = \frac{\pi}{4(in)^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\left(\int\limits_0^1\rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{-1/q}z^n.$$

Простым подсчетом легко проверить, что функция $f_2(z) \in W_a^{(r)}B_{q,\gamma}(\Phi)$. Кроме того,

$$\mathscr{L}_n\left(W_a^{(r)}B_{q,\gamma}(\Phi)\right) \geq |c_n(f_2)| = \frac{\pi}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\left(\int\limits_0^1\rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{-1/q}. \tag{41}$$

Требуемое равенство (34) получаем, сравнивая неравенства (40) и (41).

6. Полученные в предыдущих пунктах результаты можно интерпретировать как задачи оптимального восстановления и кодирования в постановке Н. П. Корнейчука [25, с. 375 – 384].

Пусть в нормированном функциональном пространстве X задан набор $M_n := \{\mu_1, \mu_2, \ldots \ldots, \mu_n\}$ определенных на X функционалов μ_k, $k = \overline{1, n}$. Множество M_n можно рассматривать как метод кодирования, сопоставивший функции $f \in X$ вектор $T(f, M_n) = \{\mu_1(f), \ldots, \mu_n(f)\}$. Задачу восстановления функции f по информации T решают, сопоставляя вектору $T(f, M_n)$ функцию

$$A(f, M_n; G_n, \Gamma_n : z) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \mu_k(f) g_k(z), \tag{42}$$

где $G_n = \{g_k(z)\}_{k=1}^n$ и $\Gamma_n = \{\gamma_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$ — соответственно произвольные система линейно независимых функций из X и набор числовых коэффициентов, позволяющий наилучшим образом воспроизводить элементы класса $\mathfrak{M} \subset X$. Погрешность восстановления на классе $\mathfrak{M}$ считают равной

$$\mathscr{R}_n(\mathfrak{M}; M_n, G_n) =$$

$$= \inf\Big\{ \sup\big\{ \big\| f - A(f; M_n, G_n, \Gamma_n) \big\|_{B_{q,\gamma}} : f \in \mathfrak{M} \big\} : \Gamma_n \subset C^n \Big\} \tag{43}$$

и полагают

$$\mathscr{R}_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\big\{ \mathscr{R}(\mathfrak{M}; M_n, G_n) : M_n, G_n \big\}.$$

Пусть $M_n^{'}$ — набор заданных на X линейных ограниченных функционалов. Тогда рассматривают следующую характеристику:

$$\mathscr{R}_n^{'}(\mathfrak{M}, X) = \inf\{ \mathscr{R}(\mathfrak{M}; M_n^{'}, G_n) : M_n^{'}, G_n \}.$$

Метод восстановления $(\overset{o}{M}_n, \overset{o}{G}_n, \overset{o}{\Gamma}_n)$ $\{\overset{o}{M}{}_n^{'}, \overset{o}{G}_n, \overset{o}{\Gamma}_n\}$, для которого

$$\mathscr{R}_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\big\{ \| f - A(f, \overset{o}{M}_n, \overset{o}{G}_n, \overset{o}{\Gamma}_n) \|_X : f \in \mathfrak{M} \big\},$$

$$\Big\{ \mathscr{R}_n^{'}(\mathfrak{M}, X) = \sup\big\{ \| f - A(f, \overset{o}{M}{}_n^{'}, \overset{o}{G}_n, \overset{o}{\Gamma}_n) \|_X : f \in \mathfrak{M} \big\} \Big\},$$

называют оптимальным (оптимальным линейным) методом восстановления функций из класса $\mathfrak{M}$. Справедливы соотношения [25, с. 377]

$$\mathscr{R}_n^{'}(\mathfrak{M}, X) = \lambda_n(\mathfrak{M}, X), \qquad \mathscr{R}_n(\mathfrak{M}, X) \geq d_n(\mathfrak{M}, X), \tag{44}$$

причем если $\mathfrak{M} = \widetilde{\mathfrak{M}} \otimes L$, где $\widetilde{\mathfrak{M}}$ — компакт, а L — конечномерное подпространство, то в (44) везде имеет место знак равенства.

Наряду с (43) рассматривают также величину

$$\mathcal{K}(\mathfrak{M}, M_n) = \sup\big\{ \| f_1 - f_2 \|_X : f_1, f_2 \in \mathfrak{M}, T(f_1, M_n) = T(f_2, M_n) \big\},$$

которую можно интерпретировать как погрешность метода кодирования на классе $\mathfrak{M}$ с помощью фиксированного набора функционалов M_n.

Полагая

$$\nu^n(\mathfrak{M}, X) = \inf\{\mathcal{K}(\mathfrak{M}, M_n) \colon M_n\},$$

где нижняя грань берется по всем наборам M_n линейных функционалов, определенных на сопряженном пространстве X^*, получаем

$$\nu^n(\mathfrak{M}, X) \le 2\mathscr{R}_n'(\mathfrak{M}, X),$$

а если $\mathfrak{M}$ — центрально-симметричное и выпуклое множество, то

$$\nu^n(\mathfrak{M}, X) = 2d^n(\mathfrak{M}, X).$$

Теорема 5. *При выполнении условия* (2) *наилучший метод кодирования функций из класса* $W_a^{(r)}X(\Phi)$ *в банаховом пространстве* $X_\rho(U)$ *доставляет набор* $\overset{o}{M}_n$ *функционалов*

$$\overset{o}{\mu}_k(f) = c_k(f), \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{45}$$

Оптимальным линейным методом восстановления $\overset{o}{M}{}_n'$, $\overset{o}{G}_n$, $\overset{o}{\Gamma}_n$ *функций* $f(z)$ *из класса* $W_a^{(r)}X(\Phi)$ *в пространстве* $X_\rho(U)$ *является определенный в пункте* 4 *линейный метод* $\mathscr{L}_{\rho,r-1}(f, \mathscr{P}_{n-1}; z)$. *При этом для любого* $n \in \mathbb{N}$ *имеем*

$$\nu^n\left(W_a^{(r)}X(\Phi), X_\rho(U)\right) = \mathscr{R}_n\left(W_a^{(r)}X(\Phi), X_\rho(U)\right) =$$

$$= \mathscr{R}_n'\left(W_a^{(r)}X(\Phi), X_\rho(U)\right) = \frac{\pi\rho^n}{2n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Теорема 6. *При выполнении условия* (2) *оптимальным линейным методом восстановления элементов* $f(z) \in W_a^{(r)}H_q(\Phi)$ *в банаховом пространстве* $\mathscr{L}_{q,\gamma}$ *является определенный в пункте* 4 *линейный метод* $\widetilde{V}_{r-1}(f, \widetilde{\mathscr{P}}_n, z)$, *а наилучшим методом кодирования — набор функционалов* (45). *При этом для любого* $n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\frac{1}{2}\,\lambda^n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi), \mathscr{L}_{q,\gamma}\right) = \mathscr{R}_n\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi), \mathscr{L}_{q,\gamma}\right) =$$

$$= \mathscr{R}_n'\left(W_a^{(r)}H_q(\Phi), \mathscr{L}_{q,\gamma}\right) = \frac{\pi}{4n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\left(\int_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}.$$

1. *Бабенко К. И.* О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1958. – **22**. – С. 631 – 640.
2. *Тайков Л. В.* О наилучших линейных методах приближения функций классов B^r и H^r // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, № 4. – С. 183 – 189.
3. *Двейрин М. З.* Поперечники и ε-энтропия классов функций, аналитических в единичном круге // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1975. – Вып. 23. – С. 32 – 46.
4. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 324 с.
5. *Тайков Л. В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. – 1977. – **22**, № 2. – С. 285 – 294.

6. *Двейрин М. З., Чебаненко И. В.* О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 62 – 73.
7. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory – Berlin: Springer-Verlag, 1985. – 252 p.
8. *Айнуллоев Н., Тайков Л. В.* Наилучшее приближение в смысле Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Мат. заметки. – 1986. – **40**, № 3. – С. 341 – 351.
9. *Вакарчук С. Б.* О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространствах Харди H_2 // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 6. – С. 799 – 803.
10. *Фарков Ю. А.* Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // Успехи мат. наук. – 1990. – **45**, № 5. – С. 197 – 198.
11. *Fisher S. D., Stessin M. I.* The n-width of the unit ball of H^q // J. Approxim. Theory. – 1991. – **67**, № 3. – P. 347 – 356.
12. *Вакарчук С. Б.* Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Мат. заметки. – 1995. – **57**, № 1. – С. 21 – 27.
13. *Вакарчук С. Б.* Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Мат. заметки. – 1999. – **65**, № 2. – С. 186 – 193.
14. *Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш.* Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Мат. заметки. – 2000. – **68**, № 5. – С. 796 – 800.
15. *Вакарчук С. Б.* Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения // Мат. заметки. – 2002. – **72**, № 5. – С. 665 – 669.
16. *Вакарчук С. Б.* О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 9. – С. 1155 – 1171.
17. *Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш.* О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $B_{2,\gamma}$ // Докл. РАН. – 2007. – **412**, № 4. – С. 466 – 469.
18. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* О наилучших линейных методах приближения функций классов Л. В. Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$ // Мат. заметки. – 2009. – **85**, № 3. – С. 323 – 329.
19. *Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р.* Наилучшее приближение некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана // Изв. АН Респ. Таджикистан. Отд-ние физ.-мат., хим., геол. и техн. наук. – 2009. – **3(136)**. – С. 7 – 23.
20. *Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш.* О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Мат. сб. – 2010. – **201**, № 8. – С. 3 – 22.
21. *Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р.* О наилучших линейных методах и значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // Докл. РАН. – 2013. – **450**, № 5. – С. 518 – 521.
22. *Юсупов Г. А., Миркалонова М. М.* О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций // Докл. АН Респ. Таджикистан. – 2013. – **56**, № 11. – С. 869 – 876.
23. *Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р.* Наилучшие линейные методы и значения поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // Изв. АН Респ. Таджикистан. Отд-ние физ.-мат., хим., геол. и техн. наук. – 2011. – **2(143)**. – С. 53 – 62.
24. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 339 с.
25. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

Получено 31.10.14,
после доработки — 05.05.15