УДК 517.518.8

О. Н. Нестеренко, Т. О. Петрова (Київ. нац. ун-т ім.Т. Шевченка)

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ КОМОНОТОННОГО НАБЛИЖЕННЯ

For a comonotone approximation, we prove that an analog of the second Jackson inequality with generalized Ditzian – Totik modulus of smoothness $\omega_{k,r}^{\varphi}$ is invalid for $(k, r) = (2, 2)$ even if the constant depends on a function.

Доведено, що для комонотонного наближення аналог другої нерівності Джексона з узагальненим модулем неперервності Діціана – Тотіка $\omega_{k,r}^{\varphi}$ при $(k, r) = (2, 2)$ є хибним навіть зі сталою, залежною від функції.

1. Нехай $C[-1, 1]$ — простір дійсних неперервних на $[-1, 1]$ функцій із рівномірною нормою $\|\cdot\|$, а $\mathbf{P}_n$ — сукупність алгебраїчних многочленів степеня не вище ніж $n-1$, $n \in \mathbf{N}$. Позначимо через $\mathbf{Y}_s$, де $s \in \mathbf{N}$, множину всіх наборів точок $Y_s := \{ y_j \,|\, j = 1, \ldots, s \}$, для яких $-1 < y_s < \ldots < y_1 < 1$, а через $\Delta^1(Y_s)$ сукупність неспадних на $[y_1, 1]$ функцій $f \in C[-1, 1]$, що змінюють напрямок монотонності в точках y_j. Зокрема, якщо $f \in C^1[-1, 1]$ та

$$\Pi(x) := \prod_{j=1}^{s} (x - y_j),$$

то $f \in \Delta^1(Y_s)$ тоді і тільки тоді, коли $\Pi(x) f'(x) \geq 0$, $x \in (-1, 1)$. Якщо $s = 0$, то вважаємо, що $Y_0 := \varnothing$, $\Delta^1(Y_0)$ — множина неспадних на $[-1, 1]$ функцій, а $\Pi(x) := 1$. Позначимо через

$$E_n^{(1)}(f, Y_s) := \inf\left\{ \| f - p_n \| \,\Big|\, p_n \in \mathbf{P}_n \cap \Delta^1(Y_s) \right\}$$

величину найкращого комонотонного наближення функції $f \in \Delta^1(Y_s) \cap C[-1, 1]$.

Покладемо $\varphi(x) := \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$, а також

$$\varphi_\delta(x) := \sqrt{\left(1 - x - \frac{\delta}{2}\varphi(x)\right)\left(1 + x - \frac{\delta}{2}\varphi(x)\right)}, \qquad x \pm \frac{\delta}{2}\varphi(x) \in [-1, 1], \quad \delta > 0.$$

Для $f \in C(-1, 1)$ і $r \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ позначимо через

$$\omega_{1,r}^{\varphi}(f, t) :=$$

$$:= \sup_{0 < h \leq t} \sup\left\{ \left| \varphi_h^r(x)\left(f\left(x + \frac{1}{2}h\varphi(x)\right) - f\left(x - \frac{1}{2}h\varphi(x)\right)\right)\right| \,\Bigg|\, \left| x \pm \frac{1}{2}h\varphi(x)\right| < 1 \right\}, \quad t > 0,$$

$$\omega_{2,r}^{\varphi}(f, t) :=$$

$$:= \sup_{0 < h \leq t} \sup\left\{ \left| \varphi_{2h}^r(x)(f(x + h\varphi(x)) - 2f(x) + f(x - h\varphi(x)))\right| \,\Big|\, |x \pm h\varphi(x)| < 1 \right\}, \quad t > 0,$$

узагальнені (при $r = 0$ — звичайні) модулі неперервності Діціана – Тотіка функції f першого і другого порядків відповідно. Визначимо підпростір

$$C_\varphi^r := \left\{ f \in C^r(-1, 1) \cap C[-1, 1] \,\Bigg|\, \lim_{|x| \to 1} \varphi^r(x) f^{(r)}(x) = 0 \right\}.$$

У роботах [1 – 3], зокрема, доведено: якщо $Y_s \in \mathbf{Y}_s$, $f \in C_\varphi^r \cap \Delta^1(Y_s)$, то

$$E_n^{(1)}(f, Y_s) \leq \omega_{1,r}^\varphi\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right) O\left(\frac{1}{n^r}\right), \qquad n \to \infty,$$

а також при $r \neq 2$

$$E_n^{(1)}(f, Y_s) \leq \omega_{2,r}^\varphi\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right) O\left(\frac{1}{n^r}\right), \qquad n \to \infty.$$

Питання про справедливість останнього співвідношення у випадку $r = 2$ залишалось відкритим (див. [3]). Основний результат даної роботи — теорема 1, в якій показано, що це співвідношення є хибним для $r = 2$. При цьому ми використали методи робіт [4, 5], де аналогічна задача розв'язана для опуклої та коопуклої апроксимації.

Теорема 1. *Нехай* $s \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $Y_s \in \mathbf{Y}_s$. *Тоді існує функція* $f \in C_\varphi^2 \cap \Delta^1(Y_s)$, *для якої*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{n^2 E_n^{(1)}(f, Y_s)}{\omega_{2,2}^\varphi(f'', 1/n)} = +\infty.$$

2. У подальшому через c будемо позначати додатні сталі, що можуть залежати лише від k, r та Y_s, причому константи, що позначаються цією літерою у різних частинах однієї нерівності, можуть бути, взагалі кажучи, різними.

Мають місце нерівності [3; 6, с. 165 – 167]

$$\omega_{2,2}^\varphi(f, t) \leq c\left\|\varphi^2 f\right\|, \qquad t > 0, \quad f \in C^2[-1, 1], \tag{1}$$

$$\omega_{2,2}^\varphi\left(f^{(2)}, t\right) \leq ct^2\left\|\varphi^4 f^{(4)}\right\|, \qquad t > 0, \quad f \in C^4[-1, 1]. \tag{2}$$

При $b \in (0, 1)$ покладемо

$$g_b(x) := \Pi(x) \ln\frac{b}{1 + x + b}, \quad G_b(x) := \int_{-1}^{x} g_b(u)\,du, \qquad x \in [-1, 1].$$

Тоді виконуються наступні оцінки:

$$\omega_{2,2}^\varphi(G_b'', t) \leq c\left(1 + t^2 \ln\frac{1}{b}\right), \qquad t > 0, \tag{3}$$

$$\left\|\varphi^2 G_b''\right\| \leq c\left(1 + \ln\frac{1}{b}\right), \tag{4}$$

$$b \ln\frac{1}{b}|g_b(x)| \leq |\Pi(x)|\,(1 + x) \ln\frac{3e^2}{1 + x}, \qquad x \in (-1, 1]. \tag{5}$$

Справді, покладемо

$$h_1(x) := \Pi'(x) \ln b, \quad h_2(x) := \Pi'(x) \ln(1 + x + b) + \Pi(x)\frac{1}{1 + x + b}, \quad x \in [-1, 1].$$

Тоді $G_b''(x) = h_1(x) - h_2(x)$. Позначивши через $\omega_2(h_1, \cdot)$ (звичайний) другий модуль неперервності функції h_1 і використавши його властивості, отримаємо

$$\omega_{2,2}^\varphi(h_1, t) \leq \omega_2(h_1, t) \leq ct^2\|h_1''\| \leq ct^2 \ln\frac{1}{b}.$$

Врахувавши формулу (1), знайдемо

$$\omega^{\varphi}_{2,2}(h_2, t) \ \le\ c\left\|\varphi^2 h_2\right\| \ \le$$

$$\le\ c \sup_{x\in[-1,1]}\left(|\Pi'(x)(1-x)(1+x)\ln(1+x+b)| + \left|\frac{1+x}{1+x+b}(1-x)\Pi(x)\right|\right) \ \le\ c.$$

Звідси, використовуючи нерівність трикутника, одержуємо оцінки (3) і (4). Оцінку (5) встановлено в [4] (нерівність (5.2)).

Позначимо через $\mathbf{P}_n^*$ множину таких многочленів p_n степеня не вище ніж $n-1$, що $\Pi(-1)p_n'(-1) \ge 0$. Зрозуміло, що $\mathbf{P}_n \cap \Delta^1(Y_s) \subset \mathbf{P}_n^*$. Наступна оцінка встановлюється дослівним повторенням міркувань з доведення леми 5.3 з [4]. Якщо $b \in \left(0, \dfrac{1}{n^2}\right)$, $p_n \in \mathbf{P}_n^*$, $n \ge s+1$, то

$$\| G_b - p_n \| \ \ge\ \frac{c}{n^2}\ln\frac{1}{n^2 b} - \frac{1}{n^2}. \tag{6}$$

3. ***Доведення теореми.*** Нехай $b_n \in \left(\dfrac{1}{n^4}, \dfrac{1}{n^2}\right)$, $n \ge 2$, таке, що $b_n \ln\dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{n^2}$. Покладемо

$$f_n(x) := \frac{c}{n^2} G_{b_n}(x), \qquad x \in [-1, 1], \quad n \ge 2,$$

де $0 < c < 1$ вибирається настільки малим, щоб виконувались нерівності (такий вибір c є можливим на підставі оцінок (3)–(5))

$$\omega^{\varphi}_{2,2}\left(f_n'', \frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n^2}, \tag{7}$$

$$\left\| f_n^{(j)} \right\| \ <\ 1, \quad j = 0, 1, \qquad \left\|\varphi^2 f_n''\right\| \ <\ 1. \tag{8}$$

Крім цього, $f_n \in C^\infty[-1, 1]$, $f_n(-1) = f_n'(-1) = 0$. З означення b_n отримуємо нерівності

$$\ln\ln n \ \le\ \ln\ln n^2 \ \le\ \ln\ln\frac{1}{b_n} \ =\ \ln\frac{1}{n^2 b_n},$$

звідки внаслідок (6) випливає існування сталої $c > 0$ і номера $n_1 \ge 2$ таких, що для всіх $n \ge n_1$ і кожного $p_n \in \mathbf{P}_n^*$

$$\| f_n - p_n \| \ge c\frac{\ln\ln n}{n^4}. \tag{9}$$

Покладемо $D_0 := 1$ і

$$D_\sigma := \frac{D_{\sigma-1}}{n_\sigma^4} = \frac{1}{n_1^4}\cdots\frac{1}{n_\sigma^4}, \qquad \sigma \in \mathbf{N},$$

де n_σ визначаються за індукцією таким чином. Припустимо, що $n_1, \ldots, n_{\sigma-1}$ вже побудовано. Позначимо

$$F_{\sigma-1}(x) := \sum_{j=1}^{\sigma-1} D_{j-1} f_{n_j}(x).$$

Виберемо $n_\sigma > n_{\sigma-1}$ настільки великим, щоб виконувались нерівності

$$\max\left\{\sigma, \left\|F_{\sigma-1}^{(4)}\right\|\right\} < D_{\sigma-1}\ln\ln\ln n_\sigma,$$
$$\left\|F_{\sigma-1}^{(6)}\right\| < D_{\sigma-1}\, n_\sigma. \tag{10}$$

На підставі нерівності типу Джексона та останньої оцінки отримуємо

$$\inf\left\{\left\|F'_{\sigma-1} - p_{n_\sigma-1}\right\| \,\middle|\, p_{n_\sigma-1} \in \mathbf{P}_{n_\sigma-1}\right\} \le \frac{c}{n_\sigma^5}\left\|F_{\sigma-1}^{(6)}\right\| < \frac{cD_{\sigma-1}n_\sigma}{n_\sigma^5} = cD_\sigma. \tag{11}$$

Покладемо

$$\Phi_\sigma(x) := \sum_{j=\sigma}^{\infty} D_{j-1} f_{n_j}(x), \qquad x \in [-1, 1].$$

Зауважимо, що цей ряд можна двічі почленно диференціювати на $(-1, 1)$; це випливає з нерівності (8) та оцінки

$$\sum_{j=\sigma}^{\infty} D_{j-1} = D_{\sigma-1}\left(1 + \sum_{j=\sigma+1}^{\infty}\frac{1}{n_\sigma^4\ldots n_{j-1}^4}\right) < D_{\sigma-1}\sum_{j=\sigma}^{\infty}\left(\frac{1}{n_\sigma^4}\right)^{j-\sigma} < 2D_{\sigma-1}. \tag{12}$$

При цьому

$$\|\Phi_\sigma\| < 2D_{\sigma-1}, \qquad \left\|\varphi^2\Phi''_\sigma\right\| < 2D_{\sigma-1}. \tag{13}$$

Тепер для великих σ маємо (пояснення див. нижче)

$$\omega_{2,2}^{\varphi}\left(\Phi''_1, \frac{1}{n_\sigma}\right) \le \omega_{2,2}^{\varphi}\left(F''_{\sigma-1}, \frac{1}{n_\sigma}\right) + \omega_{2,2}^{\varphi}\left(D_{\sigma-1}f''_{n_\sigma}, \frac{1}{n_\sigma}\right) + \omega_{2,2}^{\varphi}\left(\Phi''_{\sigma+1}, \frac{1}{n_\sigma}\right) \le$$
$$\le \frac{c}{n_\sigma^2}\left\|\varphi^4 F_{\sigma-1}^{(4)}\right\| + \frac{D_{\sigma-1}}{n_\sigma^2} + 2cD_\sigma \le$$
$$\le \frac{c}{n_\sigma^2}D_{\sigma-1}\ln\ln\ln n_\sigma + \frac{D_{\sigma-1}}{n_\sigma^2} + 2c\frac{D_{\sigma-1}}{n_\sigma^4} \le \frac{cD_{\sigma-1}}{n_\sigma^2}\ln\ln\ln n_\sigma. \tag{14}$$

У другій нерівності для оцінки першого доданка використано формулу (2), другого — формулу (7), а третього — формули (1) і (13). Третя та четверта нерівності випливають з (10).

Далі, на підставі (11) існує q_{n_σ} — многочлен степеня не вищого за $n_\sigma - 2$, для якого $q_{n_\sigma}(-1) = F'_{\sigma-1}(-1) = 0$ та $\left\|F'_{\sigma-1} - q_{n_\sigma}\right\| \le 2cD_\sigma$. Тому для многочлена

$$Q_{n_\sigma}(x) := \int_{-1}^{x} q_{n_\sigma}(u)\,du$$

виконується нерівність

$$\left\|F_{\sigma-1} - Q_{n_\sigma}\right\| = \max_{x\in[-1,1]}\left|\int_{-1}^{x}\left(F'_{\sigma-1}(u) - q_{n_\sigma}(u)\right)du\right| \le 4cD_\sigma. \tag{15}$$

Для $p_{n_\sigma} \in \mathbf{P}^*_{n_\sigma}$ покладемо $R_{n_\sigma} := \dfrac{1}{D_{\sigma-1}}\left(p_{n_\sigma} - Q_{n_\sigma}\right) \in \mathbf{P}^*_{n_\sigma}$. Тоді

$$\Phi_1 - p_{n_\sigma} = \left(F_{\sigma-1} - Q_{n_\sigma}\right) + D_{\sigma-1}\left(f_{n_\sigma} - R_{n_\sigma}\right) + \Phi_{\sigma+1},$$

звідки, послідовно використовуючи (9), (15), (13) та (10), для великих σ отримуємо

$$\left\|\Phi_1 - p_{n_\sigma}\right\| \geq D_{\sigma-1}\left\|f_{n_\sigma} - R_{n_\sigma}\right\| - \left\|F_{\sigma-1} - Q_{n_\sigma}\right\| - \left\|\Phi_{\sigma+1}\right\| \geq$$

$$\geq D_{\sigma-1}\frac{c}{n_\sigma^4}\ln\ln n_\sigma - cD_\sigma \geq \frac{c}{2}D_\sigma \ln\ln n_\sigma. \tag{16}$$

Покладемо

$$\bar f'(x) := 2\Pi(x)(1+x)\ln\frac{3e^2}{1+x}, \quad \bar f(x) := \int_{-1}^{x}\bar f'(u)\,du, \quad x \in (-1, 1], \quad \bar f(-1) := 0.$$

Інтегруванням частинами легко переконатись, що функція $\bar f$ має вигляд

$$\bar f(x) = \Pi_1(x)(1+x)^2\ln\frac{2}{x+1} + (1+x)^2\Pi_2(x), \quad x \in (-1, 1],$$

де Π_1, Π_2 — деякі многочлени степеня не вище за s. У роботі [7] встановлено, що для кожного $n \geq 1$ існує такий многочлен $\Omega_n \in \mathbf{P}_n$, що

$$\left\|\bar f - \Omega_n\right\| \leq \frac{c}{n^4}. \tag{17}$$

Розглядаючи многочлени виду

$$\Omega(x) = \Pi_1(x)(1+x)^2\int_x^1\left(1 - \frac{1}{n^4}\left(\frac{T_n(u)-(-1)^n}{u+1}\right)^2\right)\frac{du}{u+1} + (x+1)^2\Pi_2(x), \quad x \in [-1, 1],$$

де $T_n(u) = \cos n \arccos u$ — многочлен Чебишова, і міркуючи аналогічно до [8], легко показати, що многочлен $\Omega_n \in \mathbf{P}_n$ зі співвідношення (17) можна вибрати так, щоб $\Omega_n'(-1) = 0$.

Зауважимо також, що з формули (2) випливає оцінка

$$\omega_{2,2}^{\varphi}\left(\bar f'', \frac{1}{n}\right) \leq \frac{c}{n^2}\left\|\varphi^4 \bar f^{(4)}\right\| \leq \frac{c}{n^2}. \tag{18}$$

Покладемо

$$f(x) := \Phi_1(x) + \bar f(x), \quad x \in [-1, 1],$$

і покажемо, що функція f є шуканою. Включення $f \in \Delta^1(Y_s)$ є наслідком (5) і (12).

З нерівностей (14), (18) і (10) випливає, що для великих σ

$$\omega_{2,2}^{\varphi}\left(f'', \frac{1}{n_\sigma}\right) \leq$$

$$\leq \omega_{2,2}^{\varphi}\left(\Phi_1'', \frac{1}{n_\sigma}\right) + \omega_{2,2}^{\varphi}\left(\bar f'', \frac{1}{n_\sigma}\right) \leq \frac{cD_{\sigma-1}}{n_\sigma^2}\ln\ln\ln n_\sigma + \frac{c}{n_\sigma^2} \leq \frac{cD_{\sigma-1}}{n_\sigma^2}\ln\ln\ln n_\sigma. \tag{19}$$

Оскільки права частина цієї нерівності прямує до нуля при $\sigma \to +\infty$, то (див. [3]) $f \in C_\varphi^2$.

Використовуючи те, що для кожного $p_{n_\sigma} \in \mathbf{P}_{n_\sigma}^*$ справджується включення $p_{n_\sigma} - \Omega_{n_\sigma} \in \mathbf{P}_{n_\sigma}^*$, з урахуванням (16), (17) і (10) для великих σ маємо

$$\left\|f - p_{n_\sigma}\right\| \geq \left\|\Phi_1 - \left(p_{n_\sigma} - \Omega_{n_\sigma}\right)\right\| - \left\|\bar f - \Omega_{n_\sigma}\right\| \geq \frac{c}{2}D_\sigma \ln\ln n_\sigma - \frac{c}{n_\sigma^4} \geq \frac{c}{4}\frac{D_{\sigma-1}}{n_\sigma^4}\ln\ln n_\sigma. \tag{20}$$

Оскільки $E_n^{(1)}(f, Y_s) \geq \inf\left\{\|f - p_n\| \,\middle|\, p_n \in \mathbf{P}_n^*\right\}$, то з (19) і (20) випливає, що

$$\frac{n_\sigma^2 E_{n_\sigma}^{(1)}(f, Y_s)}{\omega_{2,2}^{\varphi}(f'', 1/n_\sigma)} \geq c \frac{\ln\ln n_\sigma}{\ln\ln\ln n_\sigma} \to +\infty, \qquad \sigma \to +\infty.$$

Теорему доведено.

Зауваження. Безпосереднім наслідком теореми є аналогічний результат для випадку $(k, r) = (3, 1)$ (означення модуля неперервності $\omega_{3,1}^{\varphi}$ та його властивості, з яких і випливає цей результат, див. в [3 – 5]).

Автори висловлюють щиру подяку професору І. О. Шевчуку за постановку задачі та цінні зауваження.

1. *Leviatan D.* Pointwise estimates for convex polynomial approximation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – **98**. – P. 471 – 474.
2. *Kopotun K. A.* Uniform estimates of monotone and convex approximation of smooth functions // J. Approxim. Theory. – 1995. – **80**. – P. 76 – 107.
3. *Leviatan D., Shevchuk I. A.* Some positive results and counterexamples in comonotone approximation // Ibid. – 1999. – **100**. – P. 113 – 143.
4. *Kopotun K. A., Leviatan D., Shevchuk I. A.* Convex polynomial approximation in the uniform norm: conclusion // Can. J. Math. – 2005. – **58**. – P. 407 – 430.
5. *Kopotun K. A., Leviatan D., Shevchuk I. A.* Coconvex approximation in the uniform norm – the final frontier // Acta math. hung. – 2005. – **108**. – P. 305 – 333.
6. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 225 с.
7. *Ибрагимов И. И.* О величине наилучшего приближения функций с вещественной особой точкой // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 5. – С. 429 – 456.
8. *Шевчук И. А.* К равномерному приближению функций на отрезке // Мат. заметки. – 1986. – **40**, № 1. – С. 36 – 48.

Одержано 08.06.2004