УДК 517.5

А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ СУМАМИ ФУР'Є В МЕТРИЦІ ПРОСТОРУ L_p

Asymptotic equalities are established for upper bounds of approximants by Fourier partial sums in a metric of spaces L_p, $1 \le p \le \infty$, on classes of the Poisson integrals of periodic functions belonging to the unit ball of the space L_1. The results obtained are generalized to the classes of $(\psi, \bar{\beta})$-differentiable functions (in the Stepanets sense) that admit the analytical extension to a fixed strip of the complex plane.

Встановлено асимптотичні рівності для верхніх меж наближень частинними сумами Фур'є в метриці просторів L_p, $1 \le p \le \infty$, на класах інтегралів Пуассона періодичних функцій, що належать одиничній кулі простору L_1. Отримані результати узагальнено на класи $(\psi, \bar{\beta})$-диференційовних (у сенсі Степанця) функцій, які допускають аналітичне продовження у фіксовану смугу комплексної площини.

Дана робота тісно пов'язана з роботою автора [1]. В ній продовжуються дослідження апроксимативних властивостей запроваджених О. І. Степанцем [2 – 4] класів 2π-періодичних функцій $L^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$ та $L^{\bar{\Psi}}\mathfrak{N}$. У роботі [3] було показано, що якщо пара $\bar{\Psi} = (\psi_1, \psi_2)$ числових послідовностей $\psi_1 = \psi_1(k)$ і $\psi_2 = \psi_2(k)$ $(\psi_1(k) \in \mathbb{R},\ i = 1, 2)$ така, що

$$\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)} \ne 0, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_1(k) \cos kx + \psi_2(k) \sin kx$$

є рядом Фур'є деякої сумовної 2π-періодичної функції $\Psi(x)$ $(\Psi(x) \in L)$, то класи $L^{\bar{\Psi}}\mathfrak{N}$ складаються з елементів f, які майже скрізь можуть бути зображені у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi(t)\,dt, \tag{2}$$

де a_0 — вільний член розкладу Фур'є функції $f(\cdot)$, $\varphi \in \mathfrak{N} \subset L$.

У роботах [2, 4] показано, що якщо послідовності $\psi(k)$ і β_k дійсних чисел такі, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kx - \frac{\beta_k \pi}{2}\right) \tag{3}$$

є рядом Фур'є деякої функції $\Psi_{\bar{\beta}}$ із L, то класи $L^{\psi}_{\bar{\beta}}\mathfrak{N}$ складаються із функцій f, які майже скрізь можна подати у вигляді

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi_{\bar{\beta}}(t)\,dt, \tag{4}$$

де a_0 — вільний член розкладу Фур'є функції $f(\cdot)$, а $\varphi \in \mathfrak{N} \subset L$.

Зрозуміло, що якщо компоненти $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$ та $\psi(k)$ і β_k класів $L^{\bar{\Psi}}\mathfrak{N}$

і $L^{\psi}_{\bar\beta}\mathfrak{N}$ підібрано у відповідності з рівностями

$$\psi_1(k) = \psi(k)\cos\frac{\beta_k\pi}{2}, \qquad \psi_2(k) = \psi(k)\sin\frac{\beta_k\pi}{2}, \tag{5}$$

то такі класи $L^{\bar\psi}\mathfrak{N}$ і $L^{\psi}_{\bar\beta}\mathfrak{N}$ збігаються між собою. Якщо $\beta_k \equiv \beta$, $\beta\in\mathbb{R}$, то класи $L^{\psi}_{\bar\beta}\mathfrak{N}$ позначають через $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$.

При кожному фіксованому $q\in[0,1)$ через $\mathcal{D}_q$ позначимо множину послідовностей $\psi(k)$, $k\in\mathbb{N}$, для яких

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q. \tag{6}$$

Важливим прикладом ядер $\Psi_{\bar\beta}$ виду

$$\Psi_{\bar\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta_k\pi}{2}\right), \qquad \beta_k\in\mathbb{R}, \tag{7}$$

коефіцієнти $\psi(k)$ яких задовольняють умову (6) при $0<q<1$, є ядра

$$P_{q,\bar\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}q^k\cos\left(kt-\beta_k\frac{\pi}{2}\right), \qquad q\in(0,1), \qquad \beta_k\in\mathbb{R}, \tag{8}$$

котрі при $\beta_k\equiv\beta$ є відомими ядрами Пуассона

$$P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}q^k\cos\left(kt-\beta\frac{\pi}{2}\right), \qquad q\in(0,1), \qquad \beta\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

Класи $L^{\psi}_{\bar\beta}\mathfrak{N}$ і $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, породжені ядрами (8) і (9), будемо позначати відповідно через $L^{q}_{\bar\beta}\mathfrak{N}$ і $L^{q}_{\beta}\mathfrak{N}$.

Якщо параметри $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$ ядра

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi_1(k)\cos kx + \psi_2(k)\sin kx \tag{10}$$

такі, що послідовності $\psi(k)$ виду (1) задовольняють умову (6) $(\psi\in\mathcal{D}_q)$ при деякому $q\in[0,1)$ (див., наприклад, [4, с. 139 – 141]), то класи згорток виду (2) складаються із 2π-періодичних функцій $f(x)$, які допускають регулярне продовження у смугу $\left|\operatorname{Im} z\right| \le \ln\frac{1}{q}$ комплексної площини.

Через L_p, $1\le p\le\infty$, як зазвичай прийнято, позначатимемо простори функцій $f\in L$ зі скінченними нормами $\|f\|_p$, де при $p\in[1,\infty)$

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p} = \left(\int_0^{2\pi}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p},$$

так що $L_1 = L$, а при $p=\infty$

$$\|f\|_\infty = \|f\|_M = \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|.$$

У даній роботі в якості $\mathfrak{N}$ будемо використовувати множину $U_1^0 = \left\{\varphi\in L_1 : \|\varphi\|_1\le 1,\ \varphi\perp 1\right\}$. При цьому для зручності покладемо

$$L_1^{\overline{\psi}} = L^{\overline{\psi}} U_1^0, \qquad L_{\overline{\beta},1}^{\psi} = L_{\overline{\beta}}^{\psi} U_1^0, \qquad L_{\overline{\beta},1}^{q} = L_{\overline{\beta}}^{q} U_1^0.$$

Якщо $f \in L$, то через $S_n(f; x) = S_n(f)$ позначимо частинні суми Фур'є функції f порядку n:

$$S_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

У роботі досліджуються величини

$$\mathcal{E}_n\left(L_{\overline{\beta},1}^{\psi}\right)_p = \sup_{f \in L_{\overline{\beta},1}^{\psi}} \| f - S_{n-1}(f) \|_p, \qquad 1 \le p \le \infty, \tag{11}$$

з метою одержання для них асимптотичних рівностей при умові, що $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 \le q < 1$. При $p = 1$ асимптотичні формули для величин вигляду (11) у ряді важливих випадків були одержані у роботі О. І. Степанця і автора [5] (див. також [4, 6]). Там же було показано, що залишки $\rho_n\left(\Psi_{\overline{\beta}}\right) = \Psi_{\overline{\beta}} - S_{n-1}\left(\Psi_{\overline{\beta}}\right)$ ядра $\Psi_{\overline{\beta}}$ вигляду (7) при $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, при $n \to \infty$ поводять себе приблизно так само, як і залишки $\rho_n\left(P_{\overline{\beta}}^{q}\right)$ ядра $P_{\overline{\beta}}^{q}$ вигляду (8). Це дозволило зводити задачі про одержання асимптотичних рівностей для величин $\mathcal{E}_n\left(L_{\overline{\beta}}^{\psi} \mathfrak{N}\right)_s$ $\left(\mathcal{E}_n\left(C_{\overline{\beta}}^{\psi} \mathfrak{N}\right)_C\right)$ до аналогічних задач для величин $\mathcal{E}_n\left(L_{\overline{\beta}}^{q} \mathfrak{N}\right)_s$ $\left(\mathcal{E}_n\left(C_{\overline{\beta}}^{q} \mathfrak{N}\right)_C\right)$ (тут і в подальшому $C_{\overline{\beta}}^{\psi} \mathfrak{N} = C \cap L_{\overline{\beta}}^{\psi} \mathfrak{N}$). У роботі автора [1] знайдено асимптотичні формули для величин $\mathcal{E}_n\left(C_{\overline{\beta},p}^{q}\right)_C$ при довільних $1 \le p \le \infty$, а потім на основі основних тверджень роботи [5] отриманий результат поширено на функціональні класи $C_{\overline{\beta},p}^{\psi}$ та $C_p^{\overline{\psi}}$, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 \le q < 1$.

У даній роботі (теорема 1) знайдено асимптотичні формули для величин $\mathcal{E}_n\left(L_{\overline{\beta},1}^{q}\right)_p$ при довільних $q \in (0, 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $1 \le p \le \infty$. Тим самим доповнено відомі результати С. М. Нікольського [7] та С. Б. Стєчкіна [8], у працях яких було розглянуто випадок $p = 1$. Крім цього у даній роботі встановлено асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}_n\left(L_{\overline{\beta},1}^{\psi}\right)_p$ при будь-яких $1 \le p \le \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$ за умови, що $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 \le q < 1$. Одержані результати у ряді випадків поширено і на класи $L_1^{\overline{\psi}}$.

Виявлено, що в усіх випадках, у яких вдалось одержати асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}_n\left(C_{\overline{\beta},p}^{\psi}\right)_C$ і $\mathcal{E}_n\left(L_{\overline{\beta},1}^{\psi}\right)_q$, $1 \le p,\ q \le \infty$, мають місце асимптотичні рівності

$$\mathcal{E}_n\left(C_{\overline{\beta},p}^{\psi}\right)_C \sim \mathcal{E}_n\left(L_{\overline{\beta},1}^{\psi}\right)_{p'}, \qquad 1 \le p \le \infty,$$

де параметр p' пов'язаний із p співвідношенням

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

а запис $A(n) \sim B(n)$ передбачає виконання граничного співвідношення

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A(n)}{B(n)} = 1.$$

1. Наближення сумами Фур'є на класах інтегралів Пуассона $L^q_{\beta,1}$ в метриках просторів L_p. Основним результатом даної роботи є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $q \in (0, 1)$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $n \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}_n\left(L^q_{\beta,1}\right)_p = q^n\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p}}\|\cos t\|_p K(p,q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p)}}\right), \tag{12}$$

у якій

$$\sigma(p) = \begin{cases} 1, & p = 1, \\ 2, & p \in (1, \infty], \end{cases} \tag{13}$$

$$K(p,q) = \frac{1}{2^{1+1/p}}\left\|(1-2q\cos t + q^2)^{-1/2}\right\|_p, \tag{14}$$

а величина $O(1)$ *рівномірно обмежена по* n, p, q *і* β.

Доведенню теореми передуватиме наступна лема.

Лема 1. *Нехай* $K(t) \in L_p$, $1 \le p \le \infty$. *Тоді для величини*

$$\mathcal{E}(K)_p = \sup_{\varphi \in U_1^0}\left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)K(t)\,dt\right\|_p \tag{15}$$

виконуються співвідношення

$$\frac{1}{2\pi}\sup_{h\in\mathbb{R}}\|K(\cdot) - K(\cdot + h)\|_p \le \mathcal{E}(K)_p \le \frac{1}{\pi}\|K\|_p. \tag{16}$$

Доведення. Позначивши згортку функцій $K(\cdot)$ і $\varphi(\cdot)$ через $(K*\varphi)(\cdot)$:

$$(K*\varphi)(\cdot) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K(t)\varphi(x-t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K(x-t)\varphi(t)\,dt$$

і використавши твердження 1.5.5 із роботи [9, с. 43], згідно з яким

$$\left\|K*\varphi\right\|_p \le \frac{1}{\pi}\|K\|_p\|\varphi\|_1, \quad 1 \le p \le \infty, \tag{17}$$

одержимо

$$\mathcal{E}(K)_p = \sup_{\varphi\in U_1^0}\|K*\varphi\|_p \le \frac{1}{\pi}\|K\|_p. \tag{16$'$}$$

Отже, для завершення доведення леми 1 досить встановити необхідну оцінку знизу величини $\mathcal{E}(K)_p$:

$$\mathcal{E}(K)_p \ge \frac{1}{2\pi}\sup_{h\in\mathbb{R}}\|K(\cdot) - K(\cdot+h)\|_p, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{16$''$}$$

При доведенні останньої будемо використовувати схему доведення леми 3.12.1 та наслідку 3.12.1 із роботи [2]. Покажемо спочатку справедливість нерівності (16$''$) при умові неперервності ядра $K(\cdot)$, $K \in C$. З цією метою для будь-якої нескінченно малої додатної величини δ і для довільного числа h, $h \in (0, 2\pi - \delta)$, $|h| > \delta$, розглянемо 2π-періодичну функцію $\varphi_{h,\delta}$, що означається на $\left[-\frac{\delta}{2}, 2\pi - \frac{\delta}{2}\right]$ за допомогою рівностей

$$\varphi_{h,\delta}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\delta}, & t \in \left(-\dfrac{\delta}{2}, \dfrac{\delta}{2}\right), \\ -\dfrac{1}{2\delta}, & t \in \left(h - \dfrac{\delta}{2}, h + \dfrac{\delta}{2}\right), \\ 0, & t \in \left[-\dfrac{\delta}{2}, 2\pi - \dfrac{\delta}{2}\right] \setminus \left\{\left(-\dfrac{\delta}{2}, \dfrac{\delta}{2}\right) \cup \left(h - \dfrac{\delta}{2}, h + \dfrac{\delta}{2}\right)\right\}. \end{cases} \tag{18}$$

Згідно з означенням $\|\varphi_{h,\delta}\|_1 = 1$ і $\varphi_{h,\delta} \perp 1$. Крім того,

$$(K * \varphi_{h,\delta})(x) = \frac{1}{2\pi\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} K(x-t)\,dt - \frac{1}{2\pi\delta} \int_{h-\delta/2}^{h+\delta/2} K(x-t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi\delta} \int_{x-\delta/2}^{x+\delta/2} (K(t) - K(t-h))\,dt. \tag{19}$$

Застосовуючи до правої частини формули (19) теорему про середнє (з урахуванням неперервності ядра $K(\cdot)$), одержуємо

$$(K * \varphi_{h,\delta})(x) = \frac{1}{2\pi}(K(x) - K(x-h)) + \alpha_\delta(x), \tag{20}$$

де при $\delta \to 0$ величина $\alpha_\delta(x)$ рівномірно прямує до 0. Із (20) випливає нерівність

$$\mathscr{E}(K)_p \geq \|K * \varphi_{h,\delta}\|_p \geq \frac{1}{2\pi}\|K(x) - K(x-h)\|_p + \varepsilon_\delta, \tag{21}$$

у якій $\varepsilon_\delta \to 0$ при $\delta \to 0$. Перейшовши у формулі (21) до границі при $\delta \to 0$, одержимо (16″) за умови, що $K \in C$. Покажемо, що нерівність (16″) залишається вірною для будь-якої функції $K \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Для цього зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і через $K_\varepsilon(t)$ позначимо неперервну 2π-періодичну функцію, для якої

$$\frac{1}{\pi}\|K(t) - K_\varepsilon(t)\|_p < \varepsilon, \qquad 1 \leq p \leq \infty \tag{22}$$

(існування такої функції K_ε випливає із властивості щільності простору C в L_1). Тоді з урахуванням (17), (22) і нерівності (16″), застосованої для функції K_ε, маємо

$$\mathscr{E}(K)_p = \sup_{\varphi \in U_1^0} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\big(K(t) - K_\varepsilon(t) + K_\varepsilon(t)\big)\,dt \right\|_p \geq$$

$$\geq \sup_{\varphi \in U_1^0} \left\{ \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) K_\varepsilon(t)\,dt \right\|_p - \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\big(K(t) - K_\varepsilon(t)\big)\,dt \right\|_p \right\} \geq$$

$$\geq \sup_{\varphi \in U_1^0} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) K_\varepsilon(t)\,dt \right\|_p - \varepsilon \geq$$

$$\geq \frac{1}{2\pi} \sup_{h \in \mathbb{R}} \|K_\varepsilon(t) - K_\varepsilon(t+h)\|_p - \varepsilon =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sup_{h\in\mathbb{R}}\| K(t)-K(t+h)+K_\varepsilon(t)-K(t)+K(t+h)-K_\varepsilon(t+h)\|_p - \varepsilon \geq$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sup_{h\in\mathbb{R}}\Big\{\| K(t)-K(t+h)\|_p - \| K_\varepsilon(t)-K(t)+K(t+h)-K_\varepsilon(t+h)\|_p\Big\} - \varepsilon \geq$$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\sup_{h\in\mathbb{R}}\| K(t)-K(t+h)\|_p - 2\varepsilon. \qquad (23)$$

З огляду на довільність величини ε із (23) випливає (16′′) для будь-якої функції K із L_p.

Лему доведено.

Зазначимо, що при $p = 1$ твердження леми 1 випливає з роботи С. М. Нікольського [7] (див. також [2, с. 149, 150]).

***Доведення теореми* 1.** На підставі формули (4), застосованої при $\psi(k) = q^k$, $q \in (0, 1)$ і $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, для будь-якої $f \in L^q_{\beta,1}$ майже для усіх $x \in \mathbb{R}$ виконуються рівності

$$f(x) - S_{n-1}(f; x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)P_{q,\beta,n}(t)\,dt, \qquad (24)$$

де

$$P_{q,\beta,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} q^k\cos\left(kt-\beta\frac{\pi}{2}\right), \quad q\in(0,1), \quad \beta\in\mathbb{R}. \qquad (25)$$

Тому

$$\mathscr{E}_n\left(L^q_{\beta,1}\right)_p = \sup_{\varphi\in U_1^0}\left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)P_{q,\beta,n}(t)\,dt\right\|_p. \qquad (26)$$

Покладаючи в умовах леми 1 $K(t) = P_{q,\beta,n}(t)$ і враховуючи рівність (26), одержуємо співвідношення

$$\frac{1}{2\pi}\sup_{h\in\mathbb{R}}\left\|P_{q,\beta,n}(\cdot)-P_{q,\beta,n}(\cdot+h)\,dt\right\|_p \leq \mathscr{E}_n\left(L^q_{\beta,1}\right)_p \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\left\|P_{q,\beta,n}(\cdot)\right\|_p, \quad 1\leq p\leq\infty. \qquad (27)$$

Із співвідношень (57) – (60) роботи [1] та леми 1 тієї ж роботи випливають асимптотичні при $n\to\infty$ рівності, що виконуються при довільних $q\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$ і $1\leq p\leq\infty$:

$$\frac{1}{\pi}\left\|P_{q,\beta,n}(t)\right\|_p = \frac{q^n}{\pi}\left(\frac{\|\cos t\|_p}{(2\pi)^{1/p}}\|Z_q\|_p + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p)}}\right), \qquad (28)$$

$$\frac{1}{\pi}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|P_{q,\beta,n}(t)-\lambda\right\|_p = \frac{q^n}{\pi}\left(\frac{\|\cos t\|_p}{(2\pi)^{1/p}}\|Z_q\|_p + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p)}}\right), \qquad (29)$$

$$\frac{1}{2\pi}\sup_{h\in\mathbb{R}}\left\|P_{q,\beta,n}(t)-P_{q,\beta,n}(t+h)\right\|_p = \frac{q^n}{\pi}\left(\frac{\|\cos t\|_p}{(2\pi)^{1/p}}\|Z_q\|_p + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p)}}\right), \qquad (30)$$

у яких

$$\sigma(p) = \begin{cases} 1, & p = 1, \\ 2, & p \in (1, \infty], \end{cases}$$

$$Z_q(t) = (1 - 2q\cos t + q^2)^{-1/2}, \tag{31}$$

а величина $O(1)$ рівномірно обмежена по n, p, q і β.

Співставлення формул (27), (28) і (30) дозволяє записати (12).

Теорему доведено.

Із рівності (12) та формули (14) роботи [1] одержуємо співвідношення

$$\mathcal{E}_n\left(C^q_{\beta,p'}\right)_C \sim \mathcal{E}_n\left(L^q_{\beta,1}\right)_p, \qquad 1 \le p \le \infty,$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \qquad q \in (0, 1), \qquad \beta \in \mathbb{R},$$

яке при $p = 1$ випливає з роботи С. М. Нікольського [7].

На основі відомої формули (див., наприклад, [10, с. 383])

$$\|\cos t\|_q^q = 2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma((q+1)/2)}{\Gamma(q/2+1)}, \qquad q \in [1, \infty),$$

де $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція, при $p \in [1, \infty)$ рівність (12) можна записати у вигляді

$$\mathcal{E}_n\left(L^q_{\beta,1}\right)_p = q^n\left(\frac{2^{1+1/p}}{\pi^{1+1/2p}}\left(\frac{\Gamma((p+1)/2)}{\Gamma(p/2+1)}\right)^{1/p} K(p,q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p)}}\right). \tag{32}$$

Розглянемо деякі часткові випадки теореми 1. При $p = \infty$, як безпосередньо випливає з (12),

$$\mathcal{E}_n\left(L^q_{\beta,1}\right)_\infty = q^n\left(\frac{1}{n(1-q)} + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right). \tag{33}$$

Формулу (33) раніше одержано у роботі автора [1].

При $p = 1$

$$K(p,q) = K(1,q) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{1 - 2q\cos t + q^2}} = K(q)$$

(див. [10, с. 401]), де $K(q)$ — повний еліптичний інтеграл першого роду, і тому на підставі (12)

$$\mathcal{E}_n\left(L^q_{\beta,1}\right)_1 = q^n\left(\frac{8}{\pi^2}K(q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)}\right). \tag{34}$$

Асимптотична рівність (34) відтворює результат С. М. Нікольського [7, с. 222, 223] із залишковим членом, уточненим С. Б. Стєчкіним [8, с. 139].

При $p/2 \in \mathbb{N}$

$$K(p,q) = \frac{\pi^{1/p}}{2\sqrt{1-q^2}}\left(\sum_{k=0}^{p/2-1}\frac{(p/2+k-1)!}{(k!)^2(p/2-k-1)!}\left(\frac{q^2}{1-q^2}\right)^k\right)^{1/p}$$

(див. [10, с. 382]),

$$\|\cos t\|_p^p = \frac{2\pi(p-1)!!}{(p!!)}$$

(див. [10, с. 383]), і тому внаслідок (12) для усіх парних p $(p = 2l,\ l \in \mathbb{N})$

$$\mathcal{E}_n\left(L^q_{\beta,1}\right)_p = q^n\left(\frac{2^{1/p}}{\pi^{1/p'}\sqrt{1-q^2}}\left(\frac{(p-1)!!}{(p!!)}\sum_{k=0}^{p/2-1}\frac{(p/2+k-1)!}{(k!)^2(p/2-k-1)!}\left(\frac{q^2}{1-q^2}\right)^k\right)^{1/p} + \right.$$

$$\left. + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right), \qquad (35)$$

де $p' = p/(p-1)$.

Зокрема, при $p = 2$

$$\mathcal{E}_n\left(L^q_{\beta,1}\right)_2 = \frac{q^n}{\pi^{1/2}\sqrt{1-q^2}} + O(1)\frac{q^{n+1}}{n(1-q)^2}, \qquad (35')$$

при $p = 4$

$$\mathcal{E}_n\left(L^q_{\beta,1}\right)_4 = q^n\left(\frac{3^{1/4}}{2^{1/2}\pi^{3/4}\sqrt{1-q^2}}\left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right)^{1/4} + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right), \qquad (35'')$$

при $p = 6$

$$\mathcal{E}_n\left(L^q_{\beta,1}\right)_6 = q^n\left(\frac{5^{1/6}}{2^{1/2}\pi^{5/6}\sqrt{1-q^2}}\left(\frac{1+4q^2+q^4}{1-2q^2+q^4}\right)^{1/6} + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right) \qquad (35''')$$

і т. д.

2. Наближення в метриці L_p сумами Фур'є на класах аналітичних функцій. У даному пункті встановлюються точні асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}_n\left(L^\psi_{\beta,1}\right)_p$ на класах $L^\psi_{\beta,1}$, породжених послідовностями $\psi(k)$, що задовольняють умову $\mathcal{D}_q$ при $0 < q < 1$.

Теорема 2. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *а послідовності* $\psi(k) > 0$, *що породжують класи* $L^\psi_{\beta,1}$, *задовольняють умову* (6) $($*тобто* $\psi \in \mathcal{D}_q)$ *при* $0 <$ $< q < 1$. *Тоді при* $n \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}_n\left(L^\psi_{\beta,1}\right)_p = \psi(n)\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p}}\|\cos t\|_p K(p,q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p)}} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \quad (36)$$

у якій

$$\varepsilon_n = \sup_{k\ge n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|, \qquad (37)$$

характеристики $\sigma(p)$ *і* $K(p,q)$ *означені формулами* (13) *і* (14) *відповідно, а величина* $O(1)$ *рівномірно обмежена по* n, p, q, β *і* $\psi(k)$.

Доведення. Якщо $\psi(k) > 0$, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < \infty$, то згідно з теоремою 2 роботи [5] при $1 \le p \le \infty$ для довільної послідовності $\overline{\beta} = \beta_k$ дійсних чисел виконується рівність

$$\mathcal{E}_n\left(L^\psi_{\overline{\beta},1}\right)_p = \psi(n)\left(q^{-n}\mathcal{E}_n\left(L^q_{\overline{\beta},1}\right)_p + O(1)\frac{\varepsilon_n}{n(1-q)^2}\right), \qquad (38)$$

де величина ε_n означена рівністю (37), а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n, p, q, $\psi(k)$ і β_k. Застосовуючи рівність (38) при $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, і використовуючи формулу (12), одержуємо (36).

Теорему доведено.

Як зазначалося в [1, 5], умову $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < \infty$, задовольняють, зокрема, бігармонічні ядра Пуассона

$$B_{q,\beta}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1-q^2}{2}k\right)q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad 0 < q < 1, \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{39}$$

а також ядра Неймана

$$N_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k}\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad 0 < q < 1, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{40}$$

Для коефіцієнтів $\psi(k)$ ядер $B_{q,\beta}(t)$ і $N_{q,\beta}(t)$, як неважко перевірити,

$$\varepsilon_k = \left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right| \le \frac{q}{k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{41}$$

Із теореми 2 і співвідношень (41) одержуємо наступні твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $1 \le p \le \infty$ *і класи* $L^{\psi}_{\beta,1}$ *породжені ядрами* $B_{q,\beta}(t)$ *вигляду* (39), $n \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $n \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}_n\left(L^{\psi}_{\beta,1}\right)_p = q^n\left(1 + \frac{1-q^2}{2}n\right)\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p}}\|\cos t\|_p K(p,q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right),$$

де $K(p,q)$ *означені рівністю* (14), *а величина* $O(1)$ *рівномірно обмежена по* n, p, q *і* β.

***Наслідок* 2.** *Нехай* $1 \le p \le \infty$ *і класи* $L^{\psi}_{\beta,1}$ *породжені ядрами* $N_{q,\beta}(t)$ *вигляду* (40), $n \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $n \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}_n\left(L^{\psi}_{\beta,1}\right)_p = \frac{q^n}{n}\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p}}\|\cos t\|_p K(p,q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right),$$

де $K(p,q)$ *означені рівністю* (14), *а величина* $O(1)$ *рівномірно обмежена по* n, p, q *і* β.

Аналізуючи доведення теореми 1, легко бачити, що використовувані у ньому методи дозволяють отримувати асимптотичні оцінки величин $\mathcal{E}_n\left(L^{q}_{\beta,1}\right)_p$, $1 \le p \le \infty$, для класів $L^{q}_{\beta,1}$, породжуваних ядрами $P_{q,\bar{\beta}}(t)$ вигляду (8), у яких $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. При цьому форма одержуваних оцінок у порівнянні з випадком $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, не зміниться. А саме, має місце таке твердження.

Теорема 1′. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $0 < q < 1$, $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$\mathcal{E}_n\left(L^{q}_{\beta,1}\right)_p = q^n\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p}}\|\cos t\|_p K(p,q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p)}}\right),$$

де характеристики $\sigma(p)$ *і* $K(p,q)$ *означені формулами* (13) *і* (14) *відповідно, а величина* $O(1)$ *рівномірно обмежена по* n, p, q *і* β.

Співставлення теореми 1′ та рівності (38) дозволяє сформулювати наступний аналог теореми 2.

Теорема 2′. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $n \in \mathbb{N}$, *а класи* $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$ *породжені ядрами* $\Psi_{\bar\beta}$ *виду* (7), *у яких* $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, *а* $\psi(k) > 0$ *задовольняють умову* (6) $(\psi \in \mathcal{D}_q)$ *при* $0 < q < 1$. *Тоді при* $n \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}_n\left(L^{\psi}_{\bar\beta,1}\right)_p =$$

$$= \psi(n)\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p}}\|\cos t\|_p K(p,q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p)}} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \qquad (36')$$

де характеристики ε_k, $\sigma(p)$ *і* $K(p,q)$ *означені відповідно формулами* (37), (13) *і* (14), *а величина* $O(1)$ *рівномірно обмежена по* n, p, q, β *і* $\psi(k)$.

Теорему 2 можна узагальнити на класи $L_1^{\bar\psi}$ таким чином.

Теорема 3. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $n \in \mathbb{N}$, *а клас* $L_1^{\bar\psi}$ *породжений парою* $\bar\psi = (\psi_1(k), \psi_2(k))$ *систем чисел, що задовольняють умови*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi_i(k+1)}{\psi_i(k)} = q_i, \quad 0 < q_i < 1, \quad i = 1, 2 \qquad (42)$$

$(\psi \in \mathcal{D}_{q_i})$. *Тоді при* $n \to \infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}_n\left(L_1^{\bar\psi}\right)_p =$$

$$= \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p}}\|\cos t\|_p K(p,q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p)}} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \qquad (43)$$

у якій $q = \max\{q_1, q_2\}$,

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \max\limits_{i=1,2}\left\{\varepsilon_n^{(i)}\right\}, & \text{якщо } q_1 = q_2, \\ \varepsilon_n^{(1)}, & \text{якщо } q_1 > q_2, \\ \varepsilon_n^{(2)}, & \text{якщо } q_1 < q_2, \end{cases}$$

$$\varepsilon_n^{(i)} = \lim_{k\ge n}\left|\frac{\psi_i(k+1)}{\psi_i(k)} - q_i\right|, \quad i = 1, 2, \qquad (44)$$

характеристики $\sigma(p)$ *і* $K(p,q)$ *означені відповідно формулами* (13) *і* (14), *а величина* $O(1)$ *рівномірно обмежена по* n, p, q, ψ_1 *і* ψ_2.

Доведення теореми 3 по суті повторює усі основні етапи доведення теореми 3 із [1]. Нехай $f \in L_1^{\bar\psi}$. Тоді на підставі (2) майже для усіх $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - S_{n-1}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_n(t)\varphi(x-t)\,dt, \quad \varphi \in U_1^0, \qquad (45)$$

де

$$\Psi_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty}\left(\psi_1(k)\cos kt + \psi_2(k)\sin kt\right) = G_n(t) + H_n(t), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$G_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty}\psi_1(k)\cos kt, \quad H_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty}\psi_2(k)\sin kt.$$

Розглянемо спочатку випадок $q_1 = q_2 = q$. Згідно з рівностями (47) роботи [5]

$$\Psi_n(t) = \psi(n)\left(q^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta_n \pi}{2} \right) + O(1) \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right), \tag{46}$$

де $\varepsilon_n = \max\limits_{i=1,2}\left\{ \varepsilon_n^{(i)} \right\}$, $\varepsilon_n^{(i)} = \sup\limits_{k \ge n}\left| \dfrac{\psi_i(k+1)}{\psi_i(k)} - q_i \right|$, $i = 1, 2$, $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, а β_n — числа із проміжку $[0, 4)$, що означаються рівностями

$$\cos\frac{\beta_n\pi}{2} = \frac{\psi_1(n)}{\psi(n)}, \qquad \sin\frac{\beta_n\pi}{2} = \frac{\psi_2(n)}{\psi(n)}.$$

На підставі (45) і (46) одержуємо

$$\mathscr{E}_n\left(L_1^{\psi}\right)_p =$$

$$= \sup_{\varphi \in U_1^0} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(n)\left(q^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta_n\pi}{2} \right) + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right) \varphi(x-t)\,dt \right\|_p =$$

$$= \psi(n)\left(\sup_{\varphi \in U_1^0} q^{-n} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{q,\beta_n,n}(t)\varphi(x-t)\,dt \right\|_p + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right) =$$

$$= \psi(n)\left(q^{-n}\, \mathscr{E}\left(L_{\beta_n,1}^{\psi}\right)_p + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right). \tag{47}$$

З урахуванням рівномірної обмеженості величини $O(1)$ в рівності (12) відносно параметра β цю рівність можна записати у вигляді

$$\mathscr{E}\left(L_{\gamma_n,1}^{q}\right)_p = q^n\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p}} \|\cos t\|_p K(p,q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p)}} \right), \tag{12'}$$

де γ_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — довільна послідовність дійсних чисел.

Поклавши у рівності (12′) $\gamma_n = \beta_n$, із (47) одержимо (43).

Нехай, наприклад, $q_1 < q_2 = q$. Згідно з формулою (51) роботи [5] у цьому випадку ядро $\Psi_n(t)$ можна записати у вигляді

$$\Psi_n(t) = \psi(n)\left(q_2^{-n} P_{q_2,1,n}(t) \operatorname{sign}\psi_2(n) + O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{\alpha_n}{1-q} \right) \right), \tag{48}$$

де $\varepsilon_n = \varepsilon_n^{(2)}$, $\alpha_n = \max\limits_{i=1,2}\left\{ \alpha_n^{(i)} \right\}$, $\alpha_k^{(1)} = \left| \dfrac{\psi_1(k)}{\psi(k)} \right|$, $\alpha_k^{(2)} = 1 - \left| \dfrac{\psi_2(k)}{\psi(k)} \right|$.

Об'єднуючи співвідношення (45) і (48) і враховуючи, що $q_2 = q$, одержуємо

$$\mathscr{E}_n\left(L_1^{\overline{\psi}}\right)_p =$$

$$= \sup_{\varphi \in U_1^0} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(n)\left(q^{-n} P_{q,1,n}(t) \operatorname{sign}\psi_2(n) + O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{\alpha_n}{1-q} \right) \right) \varphi(x-t)\,dt \right\|_p =$$

$$= \psi(n)\left(\sup_{\varphi \in U_1^0} q^{-n} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{q,1,n}(t)\varphi(x-t)\,dt \right\|_p + O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{\alpha_n}{1-q} \right) \right) =$$

$$= \psi(n)\left(q^{-n}\mathscr{E}_n\left(L^q_{1,1}\right)_p + O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{\alpha_n}{1-q}\right)\right). \tag{49}$$

У розглядуваному випадку, як показано у роботі [5] (співвідношення (50)),

$$\alpha_k^{(i)} = O(1)\left(\frac{q_1}{q_2} + \varepsilon\right)^k, \quad 0 < \varepsilon < 1 - \frac{q_1}{q_2}, \quad i = 1, 2. \tag{50}$$

Беручи до уваги рівність (12) при $\beta = 1$ і враховуючи, що на підставі (50) $\alpha_n = o(1/n)$, із (49) знаходимо

$$\mathscr{E}_n\left(L_1^{\overline{\psi}}\right)_p =$$

$$= \psi(n)\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p}}\|\cos t\|_p K(p,q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p)}} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{\alpha_n}{1-q}\right)\right) =$$

$$= \psi(n)\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p}}\|\cos t\|_p K(p,q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p)}} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right).$$

Тим самим співвідношення (43) доведено у випадку $q_1 < q_2$. Зрозуміло, що тими ж міркуваннями (43) доводиться і для $q_1 > q_2$.

Теорему доведено.

Зазначимо, що при $p = 1$ теореми 2 і 3 було доведено у роботі [5], а при $p = \infty$ — у роботі автора [1]. Співставляючи теореми 2 і 3 з теоремами 2 і 3 роботи [1], легко помітити, що при виконанні всіх умов будь-якої із вказаних теорем величини $\mathscr{E}_n\left(C_{p'}^{\overline{\psi}}\right)_\infty$ та $\mathscr{E}_n\left(L_1^{\overline{\psi}}\right)_p$ при $1 \le p \le \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, асимптотично збігаються між собою.

3. Наближення в метриці L_p сумами Фур'є на класах цілих функцій. У даному пункті знайдено асимптотичні рівності величин $\mathscr{E}_n\left(L^\psi_{\overline{\beta},1}\right)_p$ у випадку, коли функціональні класи $L^\psi_{\overline{\beta},1}$ породжуються додатними послідовностями $\psi(k)$, що задовольняють умову

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0. \tag{51}$$

У цьому випадку елементи множин $L^\psi_{\overline{\beta},1}$ еквівалентні відносно міри Лебега до функцій, що є звуженнями на дійсну вісь функцій, регулярних в усій комплексній площині, тобто цілих функцій (див., наприклад, [4, с. 139 – 141]).

Теорема 4. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\overline{\beta} = \beta_k$, $k \in \mathbb{N}$, — *довільна послідовність дійсних чисел, а послідовність* $\psi(k) > 0$, $k \in \mathbb{N}$, *задовольняє умову* (51). *Тоді при* $n \to \infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathscr{E}_n\left(L^\psi_{\overline{\beta},1}\right)_p = \psi(n)\frac{\|\cos t\|_p}{\pi} + O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k), \tag{52}$$

у якій $O(1)$ — *величина, що рівномірно обмежена відносно усіх розглядуваних параметрів.*

Доведення. На підставі (4) для довільної функції $f \in L^\psi_{\overline{\beta},1}$ майже скрізь

$$\rho_n(f;x) = f(x) - S_{n-1}(f;x) =$$

$$= \frac{\psi(n)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\cos\left(nt - \frac{\beta_n\pi}{2}\right)dt + \rho_{n+1}(f;x). \quad (53)$$

Внаслідок нерівності (17)

$$\|\rho_{n+1}(f;x)\|_p \leq \frac{1}{\pi}\|\varphi\|_1 \left\|\Psi_{\bar\beta,n+1}\right\|_p \leq \frac{2^{1/p}}{\pi^{1-1/p}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k), \qquad 1 \leq p \leq \infty, \quad (54)$$

де

$$\Psi_{\bar\beta,n+1}(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta_k\pi}{2}\right).$$

Із (53) і (54) одержуємо рівності

$$\mathcal{E}_n\left(L^{\psi}_{\bar\beta,1}\right)_p = \frac{\psi(n)}{\pi}\sup_{\varphi\in U_1^0}\left\|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\cos\left(nt - \frac{\beta_n\pi}{2}\right)dt\right\|_p +$$

$$+ O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k). \quad (55)$$

Застосовуючи до першого доданка у рівності (55) лему 1 і покладаючи в її умовах $K(t) = \cos\left(nt - \frac{\beta_n\pi}{2}\right)$, одержуємо

$$\frac{\psi(n)}{\pi}\sup_{\varphi\in U_1^0}\left\|\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\cos\left(nt - \frac{\beta_n\pi}{2}\right)dt\right\|_p = \frac{\psi(n)}{\pi}\|\cos t\|_p. \quad (56)$$

Об'єднавши рівності (55) і (56), одержимо (52). На завершення зазначимо, що, як показано в [4, с. 300, 301], умова (51) гарантує виконання співвідношення

$$\psi(n) = o(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k).$$

Теорему доведено.

При $p = \infty$ справедливість асимптотичної рівності (52) випливає з теореми 4 роботи автора [1], а при $p = 1$ — із теореми 7 роботи О. І. Степанця [3].

Співставлення рівності (52) з рівністю (82) роботи [1] дозволяє стверджувати, що при виконанні умови (51) має місце співвідношення

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\psi}_{\bar\beta,p'}\right)_C = \mathcal{E}_n\left(L^{\psi}_{\bar\beta,1}\right)_p, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

яке справджується при будь-яких $1 \leq p \leq \infty$, $\beta_k \in \mathbb{R}$.

Типовими представниками послідовностей $\psi(k)$, що задовольняють умову (51), є послідовності

$$\psi(k) = e^{-\alpha k^r}, \qquad \alpha > 0, \qquad r > 1. \quad (57)$$

Позначаючи функціональні класи $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$, породжені послідовностями $\psi(k)$ виду (57), через $L^{\alpha,r}_{\bar\beta,1}$ і враховуючи оцінку із [2, с. 130]

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\alpha k^2} < e^{-\alpha n^r}\left(1+\frac{1}{\alpha r n^{r-1}}\right)e^{-\alpha r n^{r-1}}, \quad r > 1, \quad \alpha > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

із теореми 4 отримуємо таке твердження.

Наслідок 3. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\alpha > 0$, $r > 1$ *і* $\bar{\beta} = \beta_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *— довільна послідовність дійсних чисел. Тоді при* $n \to \infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathscr{E}_n\left(L^{\alpha,r}_{\bar{\beta},1}\right)_p = e^{-\alpha n^r}\left(\frac{\|\cos t\|_p}{\pi} + O(1)\left(1+\frac{1}{\alpha r n^{r-1}}\right)e^{-\alpha r n^{r-1}}\right),$$

у якій величина $O(1)$ *рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.*

При $p = 1$ асимптотичну формулу для величин $\mathscr{E}_n\left(L^{\alpha,r}_{\bar{\beta},1}\right)_p$ одержав О. І. Степанець [2, с. 155]. Зауважимо також, що наслідок 3 при $\beta_k \equiv \beta$ доповнює (на випадок $r > 1$) теорему 1, яка охоплює випадок $r = 1$.

1. *Сердюк А. С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 8. – С. 1079–1096.
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 286 с.
3. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\bar{\psi}$-интегралов // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1069–1113.
4. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**. – Ч. 1. – 427 с.
5. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Приближение суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 3. – С. 375–395.
6. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Приближение суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Приближение аналитических периодических функций. – Киев, 2000. – С. 60–92. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2000.1).
7. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207–256.
8. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 126–151.
9. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
10. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

Одержано 10.09.2004