УДК 519.21

Д. В. Гусак (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ВИХІД З ІНТЕРВАЛУ ОДНОГО КЛАСУ ВИПАДКОВИХ БЛУКАНЬ

We consider the random walk $S_n = \sum_{k \le n} \xi_k$ $(S_0 = 0)$ whose characteristic function of jumps ξ_k satisfies the condition of almost semicontinuity. We investigate the problem of the exit of such S_n from a finite interval.

Розглядається випадкове блукання $S_n = \sum_{k \le n} \xi_k$ $(S_0 = 0)$, для якого характеристична функція (х. ф.) стрибків ξ_k задовольняє умову майже напівнеперервності. Досліджується задача виходу таких S_n із обмеженого інтервалу.

Для однорідних процесів $\xi(t)$ $(\xi(0) = 0,\ t \ge 0)$ з незалежними приростами задача виходу з інтервалу $[a, b]$, $a < 0 < b$, розглядалась в [1, с. 450 – 455], де досліджувався спільний розподіл екстремумів та значень процесу до виходу з інтервалу. Для вінерового процесу подібний розподіл визначається в термінах рядів експонент (див. [1, с. 463] та § 27 в [2]).

У монографіях [3 – 5] більш детально розглядались напівнеперервні процеси (процеси зі стрибками одного знаку), при цьому встановлено співвідношення для генератрис моментів першого виходу з інтервалу в термінах резольвент. У роботах [6, 7] при дослідженні напівнеперервних процесів із двостороннім відбиттям встановлено співвідношення для щільності розподілу напівнеперервного пуассонівського процесу до моменту виходу його з інтервалу.

В даній роботі розглядаються випадкові блукання, що мають властивість, близьку до напівнеперервності пуассонівських процесів $\xi(t)$. Позначимо для напівнеперервного зверху процесу з х. ф.

$$\mathrm{E}e^{i\alpha\xi(t)} = e^{t\psi(\alpha)}, \quad \xi^{\pm}(t) = \sup_{0 \le u \le t}(\inf)\xi(u), \quad \theta_s : \mathrm{P}\{\theta_s > t\} = e^{-st}, \quad s > 0.$$

Тоді х. ф. $\xi^+(\theta s)$ визначається дробово-лінійною функцією (відносно $i\alpha$)

$$\mathrm{E}e^{i\alpha\xi^+(\theta_s)} = \frac{\rho_+(s)}{\rho_+(s) - i\alpha} \qquad \left(\psi(-i\rho_+) = s;\ s > 0\right). \tag{1}$$

Для випадкових блукань властивість, близьку до напівнеперервності, ми називаємо властивістю майже напівнеперервності.

Випадкове блукання називається майже напівнеперервним зверху або знизу, якщо виконується відповідно одна з умов

$$\mathrm{E}\left[e^{i\alpha\xi_1} / \xi_1 > 0\right] = \frac{c}{c - i\alpha}, \qquad c > 0, \tag{2}$$

$$\mathrm{E}\left[e^{i\alpha\xi_1} / \xi_1 < 0\right] = \frac{b}{b + i\alpha}, \qquad b > 0. \tag{3}$$

Якщо для випадкового блукання S_n ввести позначення

$$S_n^{\pm} = \max_{0 \le k \le n}(\inf) S_k, \qquad S^{\pm} = \sup_{0 \le k < \infty}(\inf) S_k,$$

$$\tilde{\nu}(s) : \mathrm{P}\{\tilde{\nu}(s) = k\} = (1 - s)s^k, \quad k \ge 0,$$

то х. ф. $S^+_{\tilde{\nu}(s)}$ для майже напівнеперервного зверху блукання визначається подібним до (1) співвідношенням (див. [8, с. 203], § 4.1, формула (1.32))

$$\mathrm{E}e^{i\alpha S^+_{\tilde\nu(s)}} = \frac{p_+(s)(c-i\alpha)}{cp_+(s)-i\alpha}, \qquad p_+(s) = \mathrm{P}\left\{S^+_{\tilde\nu(s)} = 0\right\}. \tag{4}$$

Легко показати, що для довільного випадкового блукання S_n

$$\varphi(s,\alpha) := \mathrm{E}e^{i\alpha S_{\tilde\nu(s)}} = \frac{1-s}{1-s\varphi(\alpha)}, \qquad \varphi(\alpha) = \mathrm{E}e^{i\alpha\xi_1},$$

і при $s>0$ має місце основна факторизаційна тотожність (о. ф. т.)

$$\varphi(s,\alpha) = \varphi_+(s,\alpha)\varphi_-(s,\alpha), \qquad \operatorname{Im}\alpha = 0, \quad \varphi_\pm(s,\alpha) = \mathrm{E}e^{i\alpha S^\pm_{\tilde\nu(s)}}. \tag{5}$$

Завдяки властивості напівнеперервності пуассонівських процесів у вказаних роботах одержано співвідношення для розподілу функціоналів, пов'язаних з виходом з інтервалу, в термінах резольвенти (поняття якої вперше введено в [3]). Метою даної роботи є встановлення подібних співвідношень для майже напівнеперервних блукань і знаходження співвідношення для розподілу сум S_n до моменту першого їх виходу з інтервалу $[x-T, x]$ $(0<x<T)$.

Для функціоналів, пов'язаних із виходом із інтервалу, введемо позначення

$$\tau(x,T) = \inf\{n>0 : S_n \notin [x-T, x]\},$$

$$A_+(x) = \{\omega : S_{\tau(x,T)} > x\}, \qquad A_-(x) = \{\omega : S_{\tau(x,T)} < x-T\},$$

$$\tau(x,T) = \begin{cases} \tau^+(x,T),\ \omega\in A_+(x); & \gamma^+_T(x) = \xi(\tau^+(x,T)) - x, \\ \tau^-(x,T),\ \omega\in A_-(x); & \gamma^-_T(x) = x - \xi(\tau^-(x,T)). \end{cases}$$

Відповідно позначимо генератриси цих функціоналів:

$$Q^T(s,x) = \mathrm{E}\left[s^{\tau^+(x,T)}, A_+(x)\right], \qquad Q_T(s,x) = \mathrm{E}\left[s^{\tau^-(x,T)}, A_-(x)\right],$$

$$Q(T,s,x) = \mathrm{E}e^{-s\tau(x,T)} = Q^T(s,x) + Q_T(s,x),$$

$$V^\pm(s,\alpha,x,T) = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^+(x,T)+i\alpha\gamma^\pm_T(x)},\ A_\pm(x)\right],$$

$$V_\pm(s,\alpha,x,T) = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^+(x,T)+i\alpha\xi(\tau^\pm(x,T))},\ A_\pm(x)\right].$$

На основі стохастичних співвідношень для $\tau^+(x,T)$, $\gamma^+_T(x)$ виводимо інтегральні рівняння на відрізку для їх генератрис. При розв'язанні рівнянь будемо користуватися операціями проектування для функцій $g_c(\alpha) = c + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} G(x)\,dx$, $G(x)\in L_1$:

$$[g_c(\alpha)]^+ = \int_0^\infty e^{i\alpha x} G(x)\,dx, \qquad [g_c(\alpha)]^+_0 = c + \int_0^\infty e^{i\alpha x} G(x)\,dx,$$

$$[g_c(\alpha)]^- = \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x} G(x)\,dx, \qquad [g_c(\alpha)]^-_0 = c + \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x} G(x)\,dx,$$

$$R(I): \left\{\int_I e^{i\alpha x} G(x)\,dx\right\}, \quad I\in(-\infty,\infty),$$

$$[g_c(\alpha)]_I = c + \int_I e^{i\alpha x} G(x)\,dx.$$

Для майже напівнеперервних зверху S_n мають місце стохастичні співвідношення

$$\tau^+(x,T) \doteq \begin{cases} 1, & \xi > x, \\ 1+\tau^+(x-\xi, T), & x-T < \xi < x, \end{cases} \qquad \gamma_T^+(x) \doteq \begin{cases} \xi - x, & \xi > x, \\ \gamma_T^+(x-T), & x-T < \xi < x, \end{cases}$$

з яких випливають інтегральні рівняння для $Q^T(s,x)$ та $V^+(s,\alpha,x,T)$. А саме, враховуючи, що $\overline{F}(x) = pe^{-cx}$, $x>0$, $p = \overline{F}(0)$, одержуємо рівняння

$$Q^T(s,x) = s\overline{F}(x) + s\int_{x-T}^{x} Q^T(s, x-z)\,dF(z), \quad 0<x<T,$$
$$V^+(s,\alpha,x,T) = s\frac{c}{c-i\alpha}e^{-cx} + s\int_{x-T}^{x} V^+(s,\alpha,x-z,T)\,dF(x), \quad 0<x<T. \tag{6}$$

Для зручності розв'язання першого рівняння позначимо

$$\overline{Q}^T(s,x) = 1 - Q^T(s,x) = \begin{cases} 1, & x>T, \\ 0, & x<0, \end{cases}$$

тоді рівняння для $\overline{Q}^T(s,x)$ $(\overline{Q}^T(s,x) \neq 0,\ x>0)$ можна записати у термінах згортки

$$\overline{Q}^T(s,x) = 1 - s + s\int_{-\infty}^{\infty} \overline{Q}^T(s,z)F'(x-z)\,dz.$$

Це рівняння можна продовжити на піввісь $x>0$ з відповідною компенсуючою функцією $C_T^{>}(s,x)$, $x>T$:

$$\overline{Q}^T(s,x) = (1-s)C(x) + s\int_{-\infty}^{\infty} \overline{Q}^T(s,z)F'(x-z)\,dz + C_T^{>}(s,x), \quad x>0, \tag{7}$$

$$C(x) = I_{x>0}, \qquad C_T^{>}(s,x) = \overline{C}_T(s)e^{-cx}I_{x>T},$$

$$\overline{C}_T(s) = sp\left[e^{cT} - c\overline{Q}_s^*(T)\right], \qquad \overline{Q}_s^*(T) = \int_0^T e^{cz}\,\overline{Q}^T(s,z)\,dz.$$

Продовження на піввісь рівняння (7) змінимо за рахунок підстановки в нього функції $C_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x}I_{x>0}$ замість $C(x)$, де $\varepsilon>0$ — як завгодно мале. Тоді одержимо рівняння, подібне до (7), для деякої функції $Y_\varepsilon(s,x,T)$, $x>0$:

$$Y_\varepsilon(s,x,T) = (1-s)C_\varepsilon(x) + s\int_{-\infty}^{\infty} Y_\varepsilon(s,x,T)F'(x-z)\,dz + C_T^{>}(s,x), \quad x>0, \tag{8}$$

$$Y_\varepsilon(s,x,T) = 0, \qquad x<0.$$

Після одностороннього перетворення Фур'є для

$$y_\varepsilon(s,\alpha,T) = \int_0^{\infty} e^{i\alpha x}Y_\varepsilon(s,x,T)\,dx$$

будемо мати рівняння

$$y_\varepsilon(s,\alpha,T) - sy_\varepsilon(s,\alpha,T)\varphi(\alpha) = (1-s)\tilde{C}_\varepsilon(\alpha) + \tilde{C}_T^{>}(s,\alpha) - [\varphi(\alpha)y_\varepsilon(\alpha)]_-$$

або

$$(1-s)y_\varepsilon(s,\alpha,T)\varphi(s,\alpha)^{-1} = (1-s)\tilde{C}_\varepsilon(\alpha) + \tilde{C}_T^{>}(s,\alpha) - [\varphi(\alpha)y_\varepsilon(\alpha)]_-.$$

З останнього рівняння після застосування о. ф. т. та операції $[\ ]_+$ знаходимо

$$(1-s)y_\varepsilon(s,\alpha,T) = \varphi_+(s,\alpha)\Big[\varphi_-(s,\alpha)\Big(\tilde{C}_\varepsilon(\alpha)(1-s) + \tilde{C}_T^{>}(s,\alpha)\Big)\Big]_+. \tag{9}$$

Тоді з (9) після обернення по α одержимо розв'язок рівняння (8) при $x>0$:

$$(1-s)Y_\varepsilon(s,x,T) = \int_0^x B_\varepsilon(s,x-y)\,dP_+(s,y) + \int_0^x B(s,x-y,T)\,dP_+(s,y), \tag{10}$$

$$B_\varepsilon(s,x) = (1-s)\int_0^x e^{-\varepsilon(x-y)}dP_-(s,y) = (1-s)e^{-\varepsilon x}\,\mathrm{E}e^{\varepsilon\xi^-(\theta_s)},$$

$$B(s,x,T) = \overline{C}_T(s)\int_{-\infty}^{x-T} e^{-c(x-y)}dP_-(s,y), \quad x>0,$$

$$P_\pm(s,y) = \mathrm{P}\Big\{S^\pm_{\tilde{\nu}(s)} < y\Big\}, \quad \pm y>0.$$

При $\varepsilon\to 0$ $B_\varepsilon(s,x)\to 1-s$, тому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Y_\varepsilon(s,x,T) = Y_0(s,x,T) = \overline{Q}^{\,T}(s,x), \qquad 0<x<T. \tag{11}$$

Таким чином, справедливою є така теорема.

Теорема 1. *Для майже напівнеперервних зверху випадкових блукань генератриса* $Q^T(s,x)$ *при* $0<x<T$ *визначається співвідношенням*

$$Q^T(s,x) = q_+(s)e^{-\rho_+(s)x}\int_{x-T}^0 e^{-\rho_+(s)y}dP_-(s,y)\times$$

$$\times\left[e^{-\rho_+(s)T}\int_{-\infty}^{-T} e^{c(T+y)}dP_-(s,y) + \int_{-T}^0 e^{-\rho_+(s)y}dP_-(s,y)\right]^{-1}. \tag{12}$$

Для $V^+(s,\alpha,x,T)$ *має місце співвідношення*

$$V^+(s,\alpha,x,T) = \frac{c}{c-i\alpha}Q^T(s,x), \qquad 0<x<T. \tag{13}$$

Доведення. Внаслідок показникової властивості $P_+'(s,y)$, $y>0$, із (10) при $\varepsilon\to 0$ випливає

$$(1-s)Y_0(s,x,T) =$$

$$= (1-s)P_+(s,x) + p_+(s)B(s,x,T) + \int_{+0}^x B(s,x-y,T)P_+'(s,y)\,dy, \quad x>0.$$

Остання згортка зводиться до подвійного інтеграла, після обчислення якого виводиться співвідношення для $Y_0(s,x,T)$

$$\overline{Q}^{\,T}(s,x) = Y_0(s,x,T) = \mathrm{P}\Big\{S^+_{\tilde{\nu}(s)} < x\Big\} + \frac{p_+(s)}{1-s}\overline{C}_T(s)e^{-\rho_+(s)x}\times$$

$$\times\left[\int_{-\infty}^{-T} e^{cy}dP_-(s,y) + \int_{-T}^{x-T} e^{-cq_+(s)T+\rho_+(s)y}dP_-(s,y)\right],$$

з якого випливає

$$\overline{Q}^{\,T}(s,x) = \mathrm{P}\left\{S^{+}_{\tilde{\nu}(s)} > x\right\} - \frac{p_+(s)}{1-s}\overline{C}_T(s)e^{-\rho_+(s)x} \times$$

$$\times\left[\int_{-\infty}^{-T} e^{cy}\,dP_-(s,y) + \int_{-T}^{x-T} e^{-cq_+(s)T+\rho_+(s)y}\,dP_-(s,y)\right].$$

При інтегруванні останнього співвідношення по e^{cx}, $0 < x < T$, одержуємо рівняння для визначення коефіцієнтів $\overline{C}_T$ та $\overline{Q}_s^*(T)$, після підстановки яких у згадане співвідношення встановлюємо справедливість (12). Безпосередньою перевіркою після підстановки (13) у рівняння (6) для $V^+(s,\alpha,x,T)$ встановлюється його справедливість. Зауважимо, що при $T\to\infty$ $\overline{Q}^{\,T}(s,x)\to\overline{P}_+(s,x)$, $Q^T(s,x)\to P_+(s,x)$, а при $c\to\infty$ $Q^T(s,x)\to 0$, оскільки $q_+(s)\to 0$.

Як для пуассонівських процесів, так і для випадкових блукань, встановлюються факторизаційні тотожності для х. ф.:

$$V(s,\alpha,x) = \mathrm{E}\left[e^{i\alpha S_{\tilde{\nu}(s)}},\ \tau(x,T) > \tilde{\nu}(s)\right],$$

$$V_\pm(s,\alpha,x) = \mathrm{E}\left[e^{i\alpha S_{\tilde{\nu}(s)} - s\tau^{\pm}(x,T)},\ A_\pm(x)\right].$$

Теорема 2. *Для випадкового блукання* $S_n = \sum_{k\le n}\xi_k$ $(S_0 = \xi_0 = 0)$ *його х. ф.* $V(s,\alpha,x)$ *до виходу з інтервалу виражається через* $V_\pm(s,\alpha,x)$:

$$V(s,\alpha,x) = \varphi(s,\alpha)\left[1 - V_+(s,\alpha,x) - V_-(s,\alpha,x)\right]. \tag{14}$$

Крім того, справджуються проекційні тотожності

$$V_+(s,\alpha,x) = \varphi_+^{-1}(s,\alpha)\left[\varphi_+(s,\alpha)\left(1 - V_-(s,\alpha,x)\right)\right]_{[x,\infty)}, \qquad \operatorname{Im}\alpha \ge 0, \tag{15}$$

$$V(s,\alpha,x) = \varphi_-(s,\alpha)\left[\varphi_+(s,\alpha)\left(1 - V_-(s,\alpha,x)\right)\right]_{(-\infty,x]}, \qquad \operatorname{Im}\alpha = 0, \tag{16}$$

а також аналогічні тотожності

$$\begin{aligned} V_-(s,\alpha,x) &= \varphi_-^{-1}(s,\alpha)\left[\varphi_-(s,\alpha)\left(1 - V_+(s,\alpha,x)\right)\right]_{(-\infty,x-T]}, \qquad \operatorname{Im}\alpha \le 0,\\ V(s,\alpha,x) &= \varphi_+(s,\alpha)\left[\varphi_-(s,\alpha)\left(1 - V_+(s,\alpha,x)\right)\right]_{[x-T,\infty)}, \qquad \operatorname{Im}\alpha = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Доведення. У співвідношенні, що записується як різниця

$$\mathrm{E}\left[e^{i\alpha S_n},\ \tau(x,T) > n\right] = \mathrm{E}e^{i\alpha S_n} - \mathrm{E}\left[e^{i\alpha S_n},\ \tau(x,T)\le n\right], \tag{18}$$

останній доданок можна записати у вигляді суми

$$\mathrm{E}\left[e^{i\alpha S_n},\ \tau(x,T)\le n\right] = \mathrm{E}\left[e^{i\alpha S_n},\ \tau^+(x,T)\le n\right] + \mathrm{E}\left[e^{i\alpha S_n},\ \tau^-(x,T)\le n\right],$$

складові якої зводяться до вигляду

$$\mathrm{E}\left[e^{i\alpha S_n},\ \tau^{\pm}(x,T)\le n\right] = \sum_{k\le n}\mathrm{E}\left[e^{i\alpha(S_n-S_k)+i\alpha S_k},\ \tau_\pm(x,T) = k\right] =$$

$$= \sum_{k\le n}\varphi^{n-k}(\alpha)\,\mathrm{E}\left[e^{i\alpha S_k},\ \tau_\pm(x,T) = k\right] = I_n^{\pm}.$$

Після твірного перетворення, породженого геометричним розподілом із параметром $0 < s < 1$, з останнього співвідношення випливає

$$(1-s)\sum s^n I_n^{\pm} = \varphi(x,\alpha)\, V_{\pm}(s,\alpha,x).$$

Таким чином, із (18) шляхом твірного перетворення встановлюємо (14). Із (14) знаходимо співвідношення для $V_{\pm} = V_{\pm}(s,\alpha,x,T)$, $V(s,\alpha,x) = V(s,\alpha,x,T)$:

$$V(s,\alpha,x) = \varphi(s,\alpha)\,(1-V_-) - \varphi(s,\alpha)\,V_+,$$

з якого після підстановки о. т. ф. одержуємо

$$\varphi_+(s,\alpha)\,V_+(s,\alpha,x) = \varphi_+(s,\alpha)\,(1-V_-(s,\alpha,x)) - \varphi_+^{-1}(s,\alpha)V.$$

З умови $\varphi_-^{-1}(s,\alpha)V \in R((-\infty,x])$ після проектування $[\ ]_{[x,+\infty)}$ з останнього співвідношення випливає формула, аналогічна (15). Аналогічно із співвідношення

$$V(s,\alpha,x)\varphi_-^{-1}(s,\alpha) = \varphi_+(s,\alpha)\,(1-V_-) - \varphi_+(s,\alpha)\,V_+$$

після операції проектування $[\ ]_{(-\infty,x]}$ встановлюємо (16), оскільки $[\varphi_+(s,\alpha)V_+]_{(-\infty,x]} = 0$. Аналогічно встановлюється співвідношення (17). Має місце твердження для х. ф. розподілу випадкового блукання до моменту виходу з інтервалу $[x-T,x]$ та для щільності цього розподілу.

***Наслідок* 1.** *Для майже напівнеперервних зверху випадкових блукань S_n з х. ф. кроку*

$$\varphi(\alpha) = q\varphi_1(\alpha) + \frac{pc}{c-i\alpha}, \quad p+q=1, \quad \varphi_1(\alpha) = \int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x}\, dF_1(x), \tag{19}$$

х. ф. $V(s,\alpha,x,T)$ визначається проекційним співвідношенням при

$$V(s,\alpha,x,T) = \frac{p_+(s)(c-i\alpha)}{\rho_+(s)-i\alpha}\left[\varphi_-(s,\alpha)\left(1-\frac{c\,e^{i\alpha x}}{c-i\alpha}\,Q^T(s,x)\right)\right]_{[x-T,\infty)}. \tag{20}$$

Відповідно щільність розподілу блукання до виходу з інтервалу визначається співвідношенням

$$h_s(T,x,z) := \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{P}\{S_{\tilde\nu(s)} < z,\ \tau(x,T) > \tilde\nu(s)\} = \frac{\partial}{\partial z}H_s(T,x,z) =$$

$$= p_+(s)P_-'(s,z)I_{z<0} + p_+(s)\rho_+(s)\int_{x-T}^{z\wedge 0} e^{\rho_+(s)(y-z)}dP_-(s,y) - \rho_+(s)Q^T(s,x)e^{-\rho_+(s)(x-z)}\times$$

$$\times\left[e^{-\rho_+(s)T}\int_{-\infty}^{-T} e^{c(y+T)}dP_-(s,y) + \int_{-T}^{z-T} e^{\rho_+(s)y}dP_-(s,y)\right] \ \text{при}\ z\in(x-T,x), \quad z\neq 0. \tag{21}$$

Імовірність „невиходу” з інтервалу

$$P(T,s,x) = \mathrm{P}\{\tau(x,T) > \tilde\nu(s)\} = \int_{x-T}^{x} dH_s(T,x,z)dz$$

визначається співвідношенням

$$P(T,s,x) = \mathrm{P}\{x-T < S^-_{\tilde\nu(s)}\} - q_+(s)\int_{x-T}^{0} e^{-\rho_+(s)(x-z)}dP_-(s,z) -$$

$$- Q^T(s,x)\left[\left(1-e^{-\rho_+(s)T}\right)\int_{-\infty}^{-T} e^{c(z+T)}dP_-(s,z) + \int_{-T}^{0}\left(1-e^{-\rho_+(s)z}\right)dP_-(s,z)\right]. \tag{22}$$

Генератриси $\tau(x, T)$ *та* $\tau^-(x, T)$ *визначаються співвідношеннями*

$$Q(T, s, x) := \mathrm{E} e^{-s\tau(x,T)} = 1 - P(T, s, x),$$
$$Q_T(s, x) = Q(T, s, x) - Q^T(s, x), \quad 0 < x < T. \tag{23}$$

Доведення. Після підстановки (4) в (15) встановлюється (20). Обернувши (20) по α, одержимо співвідношення (21). Щоб довести (22), слід проінтегрувати (21) по інтервалу $[x - T, x]$. Після доведення (22) легко одержати (23), оскільки $\mathrm{P}\left\{S_{\tilde{\nu}(s)} = 0,\ \tau(x, T) > \tilde{\nu}(s)\right\} = 1 - s$.

Для визначення ймовірностей банкрутства $Q_T(s, x)$, $Q^T(s, x)$ та граничного значення $\lim_{s\to 1}(1-s)^{-1} h_s(T, s, x, z) = h_1'(T, x, z)$ нам знадобиться наступне твердження.

Лема. *Для майже напівнеперервних зверху блукань додатна компонента о. ф. т.* $\varphi_+(s, \alpha) = \dfrac{p_+(s)(c - i\alpha)}{\rho_+(s) - i\alpha}$ *є дробово-лінійною функцією, що визначається додатним коренем* $\rho_+(s) = c p_+(s)$ *рівняння Лундберга* $1 - s\varphi(-ir) = 0$. *При* $m > 0$

$$\lim_{s\to 1} \rho_+(s)(1-s)^{-1} = \frac{1}{m}, \qquad P_-(s, x) \to \mathrm{P}\{S^- < x\}, \qquad s \to 1, \quad x < 0. \tag{24}$$

При $m < 0$

$$\lim_{s\to 1} \rho_+(s) = \rho_+ > 0, \quad \lim_{s\to 1} \mathrm{P}\{\xi^-(\theta_s) > x\}(1-s)^{-1} = \mathrm{E}\tau^-(x), \quad x < 0. \tag{25}$$

При $m = 0$ $\left(m = pc^{-1} - q\int_{-\infty}^{0} F_1(x)\,dx\right)$, $\sigma_1^2 = D\xi_1 < \infty$

$$\lim_{s\to 1} \frac{\varphi_-(s, \alpha)}{\sqrt{1-s}} = \frac{c\sigma_1}{\sqrt{2}} \frac{1}{1 - \tilde{\varphi}_0(\alpha)}, \qquad \lim_{s\to 1} \frac{\rho_+(s)}{\sqrt{1-s}} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1}, \tag{26}$$

$$\tilde{\varphi}_0(\alpha) = p\tilde{F}_1^{-1}(0)\tilde{F}_1(\alpha) + q\varphi_1(\alpha).$$

Після обернення з (26) *випливає*

$$\lim_{s\to 1} (1-s)^{-1/2} P_-(s, x) = \frac{c\sigma_1}{\sqrt{2}} \tilde{H}_*(x), \quad x < 0, \tag{27}$$

де $\tilde{H}_*(x)$ — *функція відновлення для послідовності* $\left\{\tilde{\xi}_k^0\right\}_{k\ge 1}$ *незалежних однаково розподілених випадкових величин зі щільністю*

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{P}\left\{\tilde{\xi}_1^0 < x\right\} = p\,\tilde{F}_1^{-1}(0) F_1(x) + q\,F_1'(x), \quad x < 0,$$

тобто $\tilde{H}_*(x)$ *виражається через згортки розподілів*

$$F_*(x) = p\tilde{F}_1^{-1}(0) \int_{-\infty}^{x} F_1(y)\,dy + q\,F_1(x), \quad x < 0, \tag{28}$$

$$\tilde{H}_*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_*(x)^{*n}, \quad x > 0.$$

Доведення. Зупинимось лише на доведенні (26), (27). З умови $m = pc^{-1} + q\int_{-\infty}^{0} F_1(x)\,dx = 0$ випливає $p = cq\tilde{F}_1(0)$. Тому можна уточнити запис х. ф. $\varphi(\alpha)$ та $\varphi(s,\alpha)$. Справді,

$$\varphi(\alpha) = q\left(1 - i\alpha\tilde{F}_1(\alpha)\right) + p\left(1 + \frac{i\alpha}{c - i\alpha}\right) = 1 - i\alpha\left(q\tilde{F}_1(\alpha) - \frac{p}{c - i\alpha}\right),$$

отже, $\varphi(s,\alpha) = \dfrac{1-s}{1 - s\varphi(\alpha)}$ можна записати так:

$$\varphi(s,\alpha) = \frac{(1-s)(c - i\alpha)}{(1-s)(c-i\alpha) + si\alpha\left(q\tilde{F}_1(\alpha) - p\right)}. \tag{29}$$

Враховуючи о. ф. т. та дробово-лінійний вигляд $\varphi_+(s,\alpha)$, з (29) одержуємо співвідношення

$$\frac{\varphi_-(s,\alpha)}{\sqrt{1-s}} = \frac{\sqrt{1-s}}{p_+(s)}\,\frac{\rho_+(s) - i\alpha}{c - i\alpha}\,\frac{c - i\alpha}{(1-s)(c-i\alpha) + si\alpha\left(q\tilde{F}_1(\alpha)(c-i\alpha) - p\right)},$$

з якого при $m = 0$ випливає граничне співвідношення

$$\lim_{s\to 1}\frac{\varphi_-(s,\alpha)}{\sqrt{1-s}} = \frac{c\sigma_1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{1 - q\left(c\tilde{F}_1(\alpha) + \varphi_1(\alpha)\right)},$$

що після деяких перетворень зводиться до (26). Для цього слід використати х. ф. $\tilde{\varphi}_1(\alpha) = \tilde{F}_1(\alpha)\tilde{F}_1^{-1}(0)$ і умову $p = cq\tilde{F}_1(0)$. Після обернення (26) по α встановлюється (27).

На основі леми доводимо такий наслідок.

Наслідок 2. *В умовах леми ймовірності банкрутства* $Q^T(x) := \lim_{s\to 1} Q^T(s,x)$, $Q_T(x) := \lim_{s\to 1} Q_T(s,x) = 1 - Q^T(x)$ *та* $h_1'(T,x,z)$ *визначаються співвідношеннями*

$$Q^T(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{x-T}^{0} d\mathrm{P}\{S^- < y\}\left[\int_{-\infty}^{-T} e^{c(T+y)}\,d\mathrm{P}\{S^- < y\} + \mathrm{P}\{S^- \ge -T\}\right]^{-1}, & m>0,\\[2ex] \displaystyle -q_+ e^{-\rho_+ x}\int_{x-T}^{0} e^{-\rho_+ y}\,d\mathrm{E}\tau^-(y)\times \\ \displaystyle\qquad\times\left[\int_{-\infty}^{-T} e^{c(T+y)-\rho_+ T}\,d\mathrm{E}\tau^-(y) + \int_{-T}^{0} e^{\rho_+ y}\,d\mathrm{E}\tau^-(y)\right]^{-1}, & m<0,\\[2ex] \displaystyle\int_{x-T}^{0} d\tilde{H}_*(y)\left[\int_{-\infty}^{-T} e^{c(T+y)}\,d\tilde{H}_*(y) + \int_{-T}^{0} d\tilde{H}_*(y)\right]^{-1}, & m=0. \end{cases} \tag{30}$$

Залежно від знаку m *визначаються значення* $h_1'(T,x,z)$ $\left(z \in (x-T,x),\ z \ne 0\right)$:

при $m > 0$

$$h_1'(T,x,z) = \frac{1}{cm}\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{P}\{S^- < z\} + \frac{1}{m}\int_{x-T}^{z\wedge 0} d\mathrm{P}\{S^- < y\} -$$

$$- \frac{1}{m}Q^T(x)\left(\int_{-\infty}^{-T} e^{c(y+T)}\,d\mathrm{P}\{S^- < y\} + \int_{-T}^{z-x} d\mathrm{P}\{S^- < y\}\right); \tag{31}$$

при $m < 0$

$$h_1'(T,x,z) = -p_+ \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{E}\tau^-(z) I_{z<0} - q_+\rho_+ \int_{x-T}^{z\wedge 0} e^{\rho_+(y-z)} d\mathrm{E}\tau^-(y) +$$

$$+ \rho_+ Q^T(x) e^{-\rho_+(x-z)} \left[e^{-\rho_+ T} \int_{-\infty}^{-T} e^{c(y+T)} d\mathrm{E}\tau^-(y) + \int_{-T}^{z-x} e^{\rho_+ y} d\mathrm{E}\tau^-(y) \right]; \qquad (32)$$

при $m = 0$

$$h_1'(T,x,z) = \frac{\sqrt{2}}{c\sigma_1}\tilde{H}_*' I_{z<0} + \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1}\int_{x-T}^{z\wedge 0} d\tilde{H}_*(z) -$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1} Q^T(x) \left[\int_{-\infty}^{-T} e^{c(y+T)} d\tilde{H}_*(z) + \int_{-T}^{z-x} d\tilde{H}_*(z) \right]. \qquad (33)$$

Доведення. Співвідношення (30) випливають із (12) після граничного переходу $s \to 1$ з урахуванням співвідношень (24) – (27) залежно від знаку m. Так само співвідношення (31) – (33) випливають із (21).

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов: В 3 т. – М.: Наука, 1973. – Т. 2. – 635 с.
2. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. – М.: Наука, 1964. – 278 с.
3. *Королюк В.С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – Киев: Наук. думка, 1975. – 138 с.
4. *Королюк В. С., Братийчук Н. С., Пирджанов Б.* Граничные задачи для случайных блужданий. – Ашхабад: Ылым, 1987. – 250 с.
5. *Братийчук Н. С., Гусак Д. В.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. – Киев: Наук. думка, 1990. – 246 с.
6. *Гусак Д. В.* Складні пуассонівські процеси з двостороннім відбиттям // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1616 – 1625.
7. *Гусак Д. В.* Розподіл перестрибкових функціоналів напівнеперервного однорідного процесу з незалежними приростами // Там же. – № 3. – С. 303 – 322.
8. *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на скінченних ланцюгах Маркова та для напівмарковських процесів // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 1998. – **18**. – 320 с.

Одержано 17.06.2005