УДК 517.5

А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ СУМАМИ ФУР'Є В РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ

We find asymptotic equalities for upper bounds of approximations by Fourier partial sums in a uniform metric on classes of Poisson integrals of periodic functions belonging to unit balls of spaces L_p, $1 \leq \leq p \leq \infty$. We generalize the results obtained to classes of $(\psi, \overline{\beta})$-differentiable functions (in the Stepanets sense) that admit analytical extension to a fixed strip of the complex plane.

Знайдено асимптотичні рівності для верхніх меж наближень частинними сумами Фур'є в рівномірній метриці на класах інтегралів Пуассона періодичних функцій, що належать одиничним кулям просторів L_p, $1 \leq p \leq \infty$. Отримані результати узагальнено на класи $(\psi, \overline{\beta})$-диференційовних (у сенсі Степанця) функцій, які допускають аналітичне продовження у фіксовану смугу комплексної площини.

У цій роботі продовжуються дослідження апроксимативних властивостей запроваджених О. І. Степанцем [1, 2] класів $C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ 2π-періодичних неперервних функцій, котрі означаються таким чином.

Нехай $f(\cdot)$ — 2π-періодична сумовна на $[0, 2\pi)$ функція $(f \in L)$ з рядом Фур'є

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f, x), \tag{1}$$

$\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, $k = 0, 1, \ldots,$ — довільні системи дійсних чисел, $\psi_1(0) = 1$. Якщо для даної функції $f(\cdot)$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f, x) + \psi_2(k) \tilde{A}_k(f, x), \tag{2}$$

де $\tilde{A}_k(f, x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx$, є рядом Фур'є деякої функції $F(\cdot)$, то цю функцію, згідно з О. І. Степанцем [1], називають $\overline{\psi}$-інтегралом функції $f(\cdot)$ і позначають $F(x) = \mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f; x)$. Якщо $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина функцій з L, то через $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ позначають множину $\overline{\psi}$-інтегралів усіх функцій із $\mathfrak{N}$. Якщо C — підмножина неперервних 2π-періодичних функцій, то покладемо $C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N} = C \bigcap L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$.

Якщо $F(x) = \mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f; x)$, то функцію $f(\cdot)$ називають $\overline{\psi}$-похідною функції $F(\cdot)$ і записують $f(x) = F^{\overline{\psi}}(x)$.

В [1] показано, що якщо пара $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ така, що

$$\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)} \neq 0, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_1(k) \cos kx + \psi_2(k) \sin kx \tag{4}$$

є рядом Фур'є деякої функції $\Psi(x)$ із L, то майже для всіх x елементи f з класів $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ можна зобразити у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}}(x-t)\Psi(t)\,dt, \tag{5}$$

© А. С. СЕРДЮК, 2005

де a_0 — вільний член розкладу Фур'є функції $f(\cdot)$, а $f^{\overline{\Psi}}(\cdot)$ — $\overline{\Psi}$-похідна функції f. Якщо при цьому $f \in C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}$, то зображення (5) виконується для усіх $x \in \mathbb{R}$.

У даній роботі будемо використовувати також класи $L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$, що означаються таким чином (див., наприклад, [2, 3]).

Нехай $f \in L$, ряд (1) — її ряд Фур'є, а $\psi = \psi(k)$ і $\overline{\beta} = \beta_k$, $k \in \mathbb{N}$, — довільні послідовності дійсних чисел. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \beta_k \frac{\pi}{2} \right) + b_k \sin\left(kx + \beta_k \frac{\pi}{2} \right) \right) \tag{6}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції $f^{\psi}_{\overline{\beta}}(\cdot)$, то її називають $(\psi, \overline{\beta})$-похідною функції $f(\cdot)$. Множину усіх функцій із L, для яких існують $(\psi, \overline{\beta})$-похідні, позначають через $L^{\psi}_{\overline{\beta}}$. Якщо ж $f \in L^{\psi}_{\overline{\beta}}$ і, крім цього, $f^{\psi}_{\overline{\beta}} \in \mathfrak{N} \subset L^0$, де $L^0 = \{f : f \in L,\ f \perp 1\}$, то покладають, що $f \in L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$. У випадку, коли $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, $(\psi, \overline{\beta})$-похідна $f^{\psi}_{\overline{\beta}}$ позначається через f^{ψ}_{β}, а відповідні множини $L^{\psi}_{\overline{\beta}}$ і $L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$ — відповідно через L^{ψ}_{β} і $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Крім того, позначають

$$C^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N} = C \cap L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}, \qquad C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N} = C \cap L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}. \tag{7}$$

Зрозуміло, що будь-яка $(\psi, \overline{\beta})$-похідна функції $f \in L$ є і $\overline{\Psi}$-похідною, якщо системи чисел $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$ підібрано у відповідності з рівностями

$$\psi_1(k) = \psi(k)\cos\frac{\beta_k \pi}{2}, \qquad \psi_2(k) = \psi(k)\sin\frac{\beta_k \pi}{2},$$

і будь-яка $\overline{\Psi}$-похідна є $(\psi, \overline{\beta})$-похідною, якщо параметри $\psi(k)$ і $\beta(k)$ визначати формулами

$$\begin{gathered} \psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}, \\ \cos\frac{\beta_k \pi}{2} = \psi_1(k)/\psi(k), \qquad \sin\frac{\beta_k \pi}{2} = \psi_2(k)/\psi(k). \end{gathered} \tag{8}$$

В обох випадках для довільної множини $\mathfrak{N} \subset L^0$

$$L^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N} = L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}, \qquad C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N} = C^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}.$$

При кожному фіксованому $q \in [0, 1)$ через $\mathcal{D}_q$ позначимо множину послідовностей $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, для яких

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q. \tag{9}$$

Якщо параметри $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$ класів $C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}$ такі, що послідовності $\psi(k)$ виду (3) задовольняють умову (9) ($q \in \mathcal{D}_q$) при деякому $q \in [0, 1)$ (див., наприклад, [2, с. 139 – 141]), то такі класи $C^{\overline{\Psi}}\mathfrak{N}$ ($C^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$) складаються з 2π-періодичних функцій $f(x)$, які допускають регулярне продовження у смугу $|\operatorname{Im} z| \le \ln\frac{1}{q}$ комплексної площини.

Важливим прикладом ядер $\Psi_{\bar\beta}$ вигляду

$$\Psi_{\bar\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \beta_k \frac{\pi}{2}\right), \quad \beta_k \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

коефіцієнти $\psi(k)$ яких задовольняють умову (9) при $0 < q < 1$, є ядра

$$P_{q,\bar\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \beta_k \frac{\pi}{2}\right), \quad q \in (0, 1), \quad \beta_k \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

котрі при $\beta_k \equiv \beta$ є відомими ядрами Пуассона

$$P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \beta \frac{\pi}{2}\right), \quad q \in (0, 1), \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Класи $C^{\psi}_{\bar\beta}\mathfrak{N}$ і $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, породжені ядрами (11) і (12), будемо позначати відповідно через $C^{q}_{\bar\beta}\mathfrak{N}$ і $C^{q}_{\beta}\mathfrak{N}$, а $(\psi, \bar\beta)$- та (ψ, β)-похідні функції f — відповідно через $f^{q}_{\bar\beta}$ та f^{q}_{β}.

Через L_p, $1 \le p \le \infty$, як зазвичай прийнято, позначатимемо простори функцій $f \in L$ із скінченними нормами $\|f\|_p$, де при $p \in [1, \infty)$

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p} = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p},$$

так що $L_1 = L$, а при $p = \infty$

$$\|f\|_\infty = \|f\|_M = \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|.$$

Далі в якості $\mathfrak{N}$ будемо використовувати множини $U^0_p = \{\varphi \in L_p : \|\varphi\|_p \le 1, \varphi \perp 1\}$. При цьому для зручності покладемо

$$C^{\bar\psi}_p = C^{\bar\psi} U^0_p, \quad C^{\psi}_{\bar\beta,p} = C^{\psi}_{\bar\beta} U^0_p, \quad C^{q}_{\bar\beta,p} = C^{q}_{\bar\beta} U^0_p.$$

Якщо $f \in L$, то через $S_n(f; x) = S_n(f)$ позначимо частинні суми Фур'є функції f порядку n:

$$S_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

У роботі досліджуються величини

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,p})_C = \sup_{f \in C^{\psi}_{\bar\beta,p}} \|f - S_{n-1}(f)\|_C, \quad 1 \le p \le \infty, \tag{13}$$

з метою одержання для них асимптотичних рівностей за умови, що $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 \le q < 1$. При $p = \infty$ асимптотичні формули для величин вигляду (13) були одержані у роботі О. І. Степанця і автора [4]. Там же було показано, що залишки $\rho_n(\Psi_{\bar\beta}) = \Psi_{\bar\beta} - S_{n-1}(\Psi_{\bar\beta})$ ядра $\Psi_{\bar\beta}$ вигляду (10) за умови $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, при $n \to \infty$ поводять себе приблизно так само, як і залишки $\rho_n(P^{q}_{\bar\beta})$ ядра $P^{q}_{\bar\beta}$ вигляду (11). Це дозволило зводити задачі про одержання асимптотичних рівностей для величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\bar\beta}\mathfrak{N})_s$ $(\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,p})_C)$ до аналогічних задач для величин $\mathcal{E}_n(L^{q}_{\bar\beta}\mathfrak{N})_s$ $(\mathcal{E}_n(C^{q}_{\bar\beta,p})_C)$.

Центральним результатом роботи є теорема 1, у якій знайдено асимптотичні формули для величин $\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,p})_C$ при довільних $1 \le p \le \infty$. Тим самим доповнено відомі результати С. М. Нікольського [5] та С. Б. Стєчкіна [6], які охоплюють випадок $p = \infty$. Далі, отримані результати поширено на функціональні класи $C^{\psi}_{\beta,p}$ та $C^{\overline{\psi}}_{p}$, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 \le q < 1$.

З іншими відомими результатами, пов'язаними з одержанням асимптотичних рівностей для величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N})_s$ можна, зокрема, ознайомитися в роботах [1 – 8] і наявних у них коментарях.

1. Наближення сумами Фур'є на класах інтегралів Пуассона $C^q_{\beta,p}$. Основним результатом даного пункту є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $q \in (0,1)$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,p})_C = q^n\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p'}}\|\cos t\|_{p'}K(p',q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}}\right), \tag{14}$$

де $p' = p/(p-1)$,

$$s(p) = \begin{cases} 1, & p = \infty, \\ 2, & p \in [1,2) \cup (2,\infty), \\ -\infty, & p = 2, \end{cases} \tag{15}$$

$$K(p',q) = \frac{1}{2^{1+1/p'}}\left\|(1-2q\cos t + q^2)^{-1/2}\right\|_{p'}, \tag{16}$$

а величина $O(1)$ *рівномірно обмежена по* n, p, q *і* β.

Доведення. Нехай $f \in C^q_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$. На підставі інтегрального зображення (5), рівності (13) та інваріантності множин U^0_p відносно зсуву аргументу маємо

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,p})_C = \sup_{f\in C^q_{\beta,p}}\left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^q_{\beta}(x-t)P_{q,\beta,n}(t)\,dt\right\|_C = \sup_{\varphi\in U^0_p}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)P_{q,\beta,n}(t)\,dt, \tag{17}$$

де

$$P_{q,\beta,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad q \in (0,1), \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

На підставі співвідношень двоїстості (див., наприклад, [9, с. 27]) для довільної функції $x \in L_{p'}$, $1 \le p' \le \infty$,

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\|x(t)-\lambda\|_{p'} = \sup\left\{\int_0^{2\pi} x(t)y(t)\,dt : \|y\|_p \le 1, \int_0^{2\pi} y(t)\,dt = 0\right\}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1. \tag{19}$$

Тому, застосувавши рівність (19) при $x(t) = P_{q,\beta,n}(t)$, $y(t) = \varphi(t)$ до правої частини формули (17), отримаємо

$$\sup_{\varphi\in U^0_p}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)P_{q,\beta,n}(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|P_{q,\beta,n}(t)-\lambda\right\|_{p'}. \tag{20}$$

Неважко переконатись, що для довільної функції $P_{q,\beta,n}(t)$ має місце зображення

$$P_{q,\beta,n}(t) = q^n\left(g_q(t)\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right) - h_q(t)\sin\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right), \tag{21}$$

де

$$g_q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \cos kt = \frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2}, \tag{22}$$

$$h_q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sin kt = \frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2}. \tag{23}$$

Далі нам буде потрібним наступне твердження, що є деякою видозміною відомої леми Фейєра [10]. Доведення цього твердження багато в чому повторює основні етапи доведення леми 1 з роботи С. Б. Стєчкіна [6], яка охоплює випадок $s = 1$.

Лема 1. *Нехай* $1 \le s \le \infty$ *і* 2π*-періодичні функції* $g(t)$ *і* $h(t)$ *мають обмежену варіацію на* $[0, 2\pi]$, *якщо* $s = 1$, *або належать класу Гельдера* KH^1, *якщо* $1 < s \le \infty$. *Тоді для функції*

$$\varphi(t) = g(t)\cos(nt+\alpha) + h(t)\sin(nt+\alpha), \quad \alpha\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{N},$$

справджуються асимптотичні формули

$$\mathcal{J}_1 = \|\varphi\|_s = (2\pi)^{-1/s}\|\cos t\|_s\|r\|_s + O(1)Mn^{-1}, \tag{24}$$

$$\mathcal{J}_2 = \inf_{c\in\mathbb{R}}\|\varphi - c\|_s = (2\pi)^{-1/s}\|\cos t\|_s\|r\|_s + O(1)Mn^{-1}, \tag{25}$$

$$\mathcal{J}_3 = \sup_{h\in\mathbb{R}}\frac{1}{2}\|\varphi(t+h) - \varphi(t)\|_s = (2\pi)^{-1/s}\|\cos t\|_s\|r\|_s + O(1)Mn^{-1}, \tag{26}$$

у яких

$$r(t) = \sqrt{g^2(t)+h^2(t)}, \tag{27}$$

$$M = M_s = \begin{cases} \mathop{V}\limits_{-\pi}^{\pi}(g) + \mathop{V}\limits_{-\pi}^{\pi}(h) & \text{при} \quad s = 1, \\ K + s^{-1}\|r\|_s^{1-s}\mathop{V}\limits_{-\pi}^{\pi}(r^s) & \text{при} \quad 1 < s < \infty, \\ K & \text{при} \quad s = \infty, \end{cases} \tag{28}$$

а величини $O(1)$ *рівномірно обмежені відносно усіх розглядуваних параметрів.*

Доведення. При $s = 1$ лему доведено у роботі [6, с. 137, 138]. Отже, залишилось показати її істинність при $1 < s \le \infty$. Розглянемо спочатку випадок $1 < s < \infty$.

Для довільних $h\in\mathbb{R}$ і $c\in\mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}\|\varphi(t+h) - \varphi(t)\|_s \le \|\varphi(t) - c\|_C, \quad 1 \le s \le \infty,$$

тому завжди $\mathcal{J}_1 \ge \mathcal{J}_2 \ge \mathcal{J}_3$, і для доведення леми досить показати справедливість формули (24) і нерівності

$$\mathcal{J}_3 \ge (2\pi)^{-1/s}\|\cos t\|_s\|r\|_s + O(1)Mn^{-1}. \tag{29}$$

Переконаємось спочатку у справедливості формули (24). Поклавши

$$\varphi_k(t) = g\left(\frac{k\pi}{n}\right)\cos(nt+\alpha) + h\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin(nt+\alpha), \quad k = \overline{-n+1,\, n},$$

одержимо

$$\mathcal{I}_1 = \left(\sum_{k=-n+1}^{n} \int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} |\varphi(t)|^s dt \right)^{1/s} =$$

$$= \left(\sum_{k=-n+1}^{n} \int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} |\varphi_k(t)|^s dt \right)^{1/s} + O(1)\left(\sum_{k=-n+1}^{n} \int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} |\varphi(t)-\varphi_k(t)|^s dt \right)^{1/s}. \quad (30)$$

Однак

$$\int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} |\varphi_k(t)|^s dt = \int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} r^s\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left|\cos\left(nt+\alpha-\xi\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\right|^s dt =$$

$$= r^s\left(\frac{k\pi}{n}\right)\frac{1}{n}\int_0^{\pi} |\cos t|^s dt = r^s\left(\frac{k\pi}{n}\right)\|\cos t\|_s^s \frac{1}{2n}, \quad (31)$$

де $r(t)$ означається рівністю (27), а $\xi(t)$ — системою рівнянь

$$\cos\xi(t) = \frac{g(t)}{r(t)},$$
$$\sin\xi(t) = \frac{h(t)}{r(t)}. \quad (32)$$

Крім цього,

$$\int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} |\varphi(t)-\varphi_k(t)|^s dt =$$

$$= \int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left|\cos(nt+\alpha)\left(g(t)-g\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) + \sin(nt+\alpha)\left(h(t)-h\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\right|^s dt \le$$

$$\le \int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left|g(t)-g\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|^s dt + \int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left|h(t)-h\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|^s dt \le 2K^s\frac{\pi^{s+1}}{n^{s+1}}. \quad (33)$$

На підставі формул (30), (31) і (33)

$$\mathcal{I}_1 = \frac{\|\cos t\|_s}{(2\pi)^{1/s}}\left(\sum_{k=-n+1}^{n} r^s\left(\frac{k\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n} \right)^{1/s} + O(1)\frac{K}{n}, \quad (34)$$

і оскільки

$$\sum_{k=-n+1}^{n} r^s\left(\frac{k\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n} = \int_{-\pi}^{\pi} r^s(t)dt + O(1)\frac{\overset{\pi}{\underset{-\pi}{V}}(r^s)}{n},$$

то

$$\mathcal{I}_1 = \frac{\|\cos t\|_s}{(2\pi)^{1/s}}\left(\int_{-\pi}^{\pi} r^s(t)dt + O(1)\frac{\overset{\pi}{\underset{-\pi}{V}}(r^s)}{n} \right)^{1/s} + O(1)\frac{K}{n}. \quad (35)$$

При досить великих n

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} r^s(t)dt + O(1)\frac{\overset{\pi}{\underset{-\pi}{V}}(r^s)}{n}\right)^{1/s} = \|r\|_s + O(1)\frac{\overset{\pi}{\underset{-\pi}{V}}(r^s)}{ns\|r\|_s^{s-1}}$$

і тому згідно з (35) при $1 < s < \infty$

$$\mathcal{I}_1 = \frac{\|\cos t\|_s}{(2\pi)^{1/s}}\|r\|_s + \frac{O(1)}{n}\left(K + \frac{\overset{\pi}{\underset{-\pi}{V}}(r^s)}{s\|r\|_s^{s-1}}\right). \tag{36}$$

Доведемо нерівність (29). Оскільки

$$\left|\varphi\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - \varphi(t)\right| = \left|2\varphi(t) + \cos(nt+\alpha)\Delta_{\pi/n}g(t) + \sin(nt+\alpha)\Delta_{\pi/n}h(t)\right|, \tag{37}$$

де

$$\Delta_{\pi/n}g(t) = g\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - g(t), \qquad \Delta_{\pi/n}h(t) = h\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - h(t),$$

то

$$\frac{1}{2}\left\|\varphi\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - \varphi(t)\right\|_s = \|\varphi\|_s +$$

$$+ O(1)\left\|\cos(nt+\alpha)\Delta_{\pi/n}g(t) + \sin(nt+\alpha)\Delta_{\pi/n}h(t)\right\|_s = \|\varphi\|_s + O(1)Kn^{-1}. \tag{38}$$

З урахуванням формули (36) із (38) випливають співвідношення

$$\mathcal{I}_3 \geq \frac{1}{2}\left\|\varphi\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - \varphi(t)\right\|_s = \|\varphi\|_s + O(1)Kn^{-1} =$$

$$= \frac{\|\cos t\|_s}{(2\pi)^{1/s}}\|r\|_s + \frac{O(1)}{n}\left(K + \frac{\overset{\pi}{\underset{-\pi}{V}}(r^s)}{s\|r\|_s^{s-1}}\right). \tag{39}$$

Тим самим формули (24) – (26) доведено для довільних $1 < s < \infty$.

Розглянемо випадок $s = \infty$. Очевидно, що

$$\mathcal{I}_1 = \|\varphi\|_\infty = \|r(t)\cos(nt+\alpha-\xi(t))\|_\infty \leq \|r\|_\infty, \tag{40}$$

де $\xi(t)$ — функція, визначена системою (32).

Покажемо, що для точок $\tilde{t}$ вигляду

$$\tilde{t} = \frac{k^*\pi + \xi(t^*) - \alpha}{n}, \tag{41}$$

де числа t^* $(t^* \in [0, 2\pi])$ і k^* $(k^* \in \mathbb{N})$ означаються умовами

$$r(t^*) = \|r\|_\infty, \tag{42}$$

$$t^* \in \left[\frac{k^*\pi}{n}, \frac{(k^*+1)\pi}{n}\right), \tag{43}$$

виконується рівність

$$|\varphi(\tilde{t})| = \|r\|_\infty + O(1)\frac{K}{n}. \tag{44}$$

Справді, на підставі (41)

$$\begin{aligned}|\varphi(\tilde t)| &= |r(\tilde t)\cos(n\tilde t+\alpha-\xi(\tilde t))| = \left|r(\tilde t)\cos\left(\xi(t^*)-\xi(\tilde t)\right)\right| = \\ &= \left|r(t^*)-r(t^*)\left(1-\cos\left(\xi(t^*)-\xi(\tilde t)\right)\right)-\cos\left(\xi(t^*)-\xi(\tilde t)\right)\left(r(t^*)-r(\tilde t)\right)\right| = \\ &= r(t^*) + O(1)\Big(r(t^*)\left(1-\cos\left(\xi(t^*)-\xi(\tilde t)\right)\right)+r(t^*)-r(\tilde t)\Big). \qquad (45)\end{aligned}$$

Оцінимо залишковий член у правій частині формули (45). Беручи до уваги (27) і (32), маємо

$$\begin{aligned}r(t^*)\left(1-\cos\left(\xi(t^*)-\xi(\tilde t)\right)\right) &= r(t^*)\left(1-\frac{g(t^*)g(\tilde t)+h(t^*)h(\tilde t)}{r(t^*)r(\tilde t)}\right) = \\ &= g(t^*)\left(\frac{g(t^*)}{r(t^*)}-\frac{g(\tilde t)}{r(\tilde t)}\right) + h(t^*)\left(\frac{h(t^*)}{r(t^*)}-\frac{h(\tilde t)}{r(\tilde t)}\right). \qquad (46)\end{aligned}$$

Зауважуючи, що

$$\frac{g(t^*)}{r(t^*)}-\frac{g(\tilde t)}{r(\tilde t)} = \frac{1}{r(t^*)}\left(g(t^*)-g(\tilde t)+\frac{g(\tilde t)}{r(\tilde t)}\left(r(\tilde t)-r(t^*)\right)\right),$$

$$\frac{h(t^*)}{r(t^*)}-\frac{h(\tilde t)}{r(\tilde t)} = \frac{1}{r(t^*)}\left(h(t^*)-h(\tilde t)+\frac{h(\tilde t)}{r(\tilde t)}\left(r(\tilde t)-r(t^*)\right)\right),$$

і покладаючи

$$\begin{aligned}\delta_n &= \tilde t - t^*, \\ \Delta_{\delta_n} h(t^*) &= h(t^*) - h(\tilde t), \\ \Delta_{\delta_n} g(t^*) &= g(t^*) - g(\tilde t), \\ \Delta_{\delta_n} r(t^*) &= r(t^*) - r(\tilde t),\end{aligned} \qquad (47)$$

із (46) отримуємо

$$\begin{aligned}r(t^*)\left(1-\cos\left(\xi(t^*)-\xi(\tilde t)\right)\right) &= \frac{g(t^*)}{r(t^*)}\left(\Delta_{\delta_n} g(t^*) - \frac{g(\tilde t)}{r(\tilde t)}\Delta_{\delta_n} r(t^*)\right) + \\ + \frac{h(t^*)}{r(t^*)}\left(\Delta_{\delta_n} h(t^*) - \frac{h(\tilde t)}{r(\tilde t)}\Delta_{\delta_n} r(t^*)\right) &= \cos\xi(t^*)\Delta_{\delta_n} g(t^*) + \sin\xi(t^*)\Delta_{\delta_n} h(t^*) - \\ &- \cos\left(\xi(t^*)-\xi(\tilde t)\right)\Delta_{\delta_n} r(t^*). \qquad (48)\end{aligned}$$

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\alpha\in[0,\pi]$ і $\xi(t)\in[0,2\pi]$, тому на підставі (41), (43) і (47)

$$|\delta_n| \le \frac{2\pi}{n}. \qquad (49)$$

Оскільки $g,h\in KH^1$, а $r\in\sqrt2 KH^1$, то з урахуванням (49)

$$\left|\Delta_{\delta_n} h(t^*)\right| \le K|\delta_n| \le \frac{2\pi K}{n}, \qquad (50)$$

$$\left|\Delta_{\delta_n} g(t^*)\right| \le K|\delta_n| \le \frac{2\pi K}{n}, \qquad (51)$$

$$\left|\Delta_{\delta_n} r(t^*)\right| \le \sqrt2 K|\delta_n| \le \frac{2\sqrt2\pi K}{n}. \qquad (52)$$

Співставляючи формули (45) і (48) з оцінками (50) – (53), переконуємось, що

$$r(t^*)(1-\cos(\xi(t^*)-\xi(\tilde{t}))) + r(t^*) - r(\tilde{t}) = O(1)\frac{K}{n}. \qquad (53)$$

Із (45) і (53) одержуємо (44). Рівність (44) разом із оцінкою (40) показує, що

$$\mathcal{J}_1 = \|\varphi\|_\infty = \|r\|_\infty + O(1)\frac{K}{n}. \qquad (54)$$

З іншого боку, внаслідок (37)

$$\mathcal{J}_3 \geq \frac{1}{2}\left\|\varphi\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-\varphi(t)\right\|_\infty =$$

$$= \frac{1}{2}\left\|2\varphi(t)+\cos(nt+\alpha)\Delta_{\pi/n}g(t) + \sin(nt+\alpha)\Delta_{\pi/n}h(t)\right\|_\infty =$$

$$= \|\varphi\|_\infty + O(1)\left(\left\|\Delta_{\pi/n}g(t)\right\|_\infty + \left\|\Delta_{\pi/n}h(t)\right\|_\infty\right) = \|r\|_\infty + O(1)\frac{K}{n}. \qquad (55)$$

Співставляючи (40) і (41) і враховуючи нерівності $\mathcal{J}_1 \geq \mathcal{J}_2 \geq \mathcal{J}_3$, одержуємо

$$\mathcal{J}_i \geq \|r\|_\infty + O(1)\frac{K}{n}, \qquad i = \overline{1,3}.$$

Лему доведено.

Зауваження. Із доведення леми 1 (а саме, із формул (35), (39) і співвідношень $\mathcal{J}_1 \geq \mathcal{J}_2 \geq \mathcal{J}_3$) випливає, що при $1 \leq s < \infty$ виконуються рівності

$$\mathcal{J}_i = (2\pi)^{-1/s}\|\cos t\|_s\left(\int_{-\pi}^{\pi} r^s(t)dt + O(1)\frac{\bigvee_{-\pi}^{\pi}(r^s)}{n}\right)^{1/s} + O(1)\frac{K}{n}, \quad i = 1, 2, 3, \qquad (24')$$

у яких величини $O(1)$ рівномірно обмежені відносно усіх розглядуваних параметрів.

Зауважуючи, що

$$(g_q(t))' < \frac{q}{(1-q)^2}, \qquad (h_q(t))' < \frac{q}{(1-q)^2}, \qquad (56)$$

і беручи до уваги зображення (21), можемо застосувати до правої частини рівності (20) лему 1, поклавши в умовах останньої $g(t) = g_q(t)$, $h(t) = -h_q(t)$, $\alpha = -\beta\pi/2$, $s = p'$. Згідно з (25) і (56)

$$\frac{1}{\pi}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|P_{q,\beta,n}(t)-\lambda\right\|_{p'} = \frac{q^n}{\pi}\inf_{c\in\mathbb{R}}\left\|g_q(t)\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)-h_q(t)\sin\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)-c\right\|_{p'} =$$

$$= \frac{q^n}{\pi}\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{(2\pi)^{1/p'}}\left\|Z_q\right\|_{p'} + \frac{O(1)}{n}\gamma_{p'}\right), \qquad (57)$$

де

$$\gamma_{p'} = \begin{cases} \frac{1}{p'}\bigvee_{-\pi}^{\pi}(Z_q^{p'})\left\|Z_q\right\|_{p'}^{1-p'} + q(1-q)^{-2} & \text{при} \quad 1 < p' < \infty, \\ q(1-q)^{-2} & \text{при} \quad p' = 1, \\ q(1-q)^{-1} & \text{при} \quad p' = \infty, \end{cases} \qquad (58)$$

а функція $Z_q(t)$ означена рівністю

$$Z_q(t) = \sqrt{g_q^2(t) + h_q^2(t)} = \left(1 - 2q\cos t + q^2\right)^{-1/2}. \tag{59}$$

Однак

$$\mathop{V}_{-\pi}^{\pi}(Z_q^{p'}) = p' \int_{-\pi}^{\pi} Z_q^{p'-1}(t)\left|Z_q'(t)\right|dt \le p'\left\|Z_q\right\|_{p'}^{p'}\left\|\frac{Z_q'(t)}{Z_q(t)}\right\|_C = p'\left\|Z_q\right\|_{p'}^{p'}\left\|h_q\right\|_C,$$

і, отже, враховуючи (56) та очевидні співвідношення

$$\left\|h_q\right\|_C \le \frac{q}{1-q},$$

$$\left\|Z_q\right\|_{p'} \le \frac{(2\pi)^{1/p'}}{1-q},$$

маємо

$$\frac{1}{p'}\mathop{V}_{-\pi}^{\pi}(Z_q^{p'})\left\|Z_q\right\|_{p'}^{1-p'} \le \left\|h_q\right\|_C\left\|Z_q\right\|_{p'} \le (2\pi)^{1/p'}\frac{q}{(1-q)^2}. \tag{60}$$

Об'єднуючи формули (17), (20), (57), (58) і (60), проходимо до асимптотичної рівності

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^q)_C = q^n\left(\frac{2\|\cos t\|_{p'}}{(2\pi)^{1+1/p'}}\left\|Z_q\right\|_{p'} + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}}\right), \tag{61}$$

де

$$s(p) = \begin{cases} 1, & p = \infty, \\ 2, & p \in [1,\infty), \end{cases}$$

а величина $O(1)$ рівномірно обмежена відносно усіх розглядуваних параметрів.

Із (61) випливає справедливість асимптотичної формули (14) для довільних $p \in [1,\infty]\backslash\{2\}$. При $p = 2$, як випливає із співвідношень (17), (20), (21) та рівності Парсеваля,

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,2}^q)_C = \frac{1}{\pi}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|P_{q,\beta,n}(t) - \lambda\right\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\sqrt{\lambda^2 + \sum_{k=n}^{\infty} q^{2k}} = \frac{q^n}{\sqrt{\pi(1-q^2)}},$$

і для того, щоб переконатись у справедливості формули (14), досить помітити, що

$$\frac{2}{\pi^{1+1/2}}\|\cos t\|_2 K(2,q) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-q^2)}}.$$

Теорему доведено.

Оскільки

$$\|\cos t\|_q^q = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma((q+1)/2)}{\Gamma(q/2+1)}, \quad q \in [1,\infty)$$

(див., наприклад, [11, с. 383]), то при $p \in (1,\infty]$ рівність (14) можна записати у вигляді

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^q)_C = q^n\left(\frac{2^{1+1/p'}}{2^{1+1/2p'}}\left(\frac{\Gamma((p'+1)/2)}{\Gamma(p'/2+1)}\right)^{1/p'} K(p',q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}}\right). \tag{62}$$

Розглянемо деякі часткові випадки теореми 1. При $p = 1$, як безпосередньо випливає з (14),

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,1})_C = q^n\left(\frac{1}{\pi(1-q)} + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right). \tag{63}$$

При $p = \infty$

$$K(p', q) = K(1, q) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{dt}{\sqrt{1-2q\cos t + q^2}} = K(q)$$

(див. [11, с. 401]), де $K(q)$ — повний еліптичний інтеграл першого роду, і тому внаслідок (14)

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,\infty})_C = q^n\left(\frac{8}{\pi^2}K(q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)}\right). \tag{64}$$

Асимптотична рівність (64) відтворює результат С. М. Нікольського [5, с. 222, 223] із залишковим членом, уточненим С. Б. Стєчкіним [6, с. 139].

Зазначимо також, що при $p'/2 \in \mathbb{N}$

$$K(p', q) = \frac{\pi^{1/p'}}{2\sqrt{1-q^2}}\left(\sum_{k=0}^{p'/2-1}\frac{(p'/2+k-1)!}{(k!)^2(p'/2-k-1)!}\left(\frac{q^2}{1-q^2}\right)^k\right)^{1/p'}$$

(див. [11, с. 382]),

$$\|\cos t\|^{p'}_{p'} = \frac{2\pi(p'-1)!!}{(p')!!}$$

(див. [11, с. 383]), і тому внаслідок (14) для усіх p таких, що $p/(2(p-1)) \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,p})_C = q^n\left(\frac{2^{1/p'}}{\pi^{1/p}\sqrt{1-q^2}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{(p'-1)!!}{(p')!!}\sum_{k=0}^{p'/2-1}\frac{(p'/2+k-1)!}{(k!)^2(p'/2-k-1)!}\left(\frac{q^2}{1-q^2}\right)^k\right)^{1/p'} + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}}\right). \tag{65}$$

Зокрема, при $p = 2$ (як ми бачили і раніше)

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,2})_C = \frac{q^n}{\pi^{1/2}\sqrt{1-q^2}}, \tag{65$'$}$$

при $p = 4/3$ $(p' = 4)$

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,4/3})_C = q^n\left(\frac{3^{1/4}}{2^{1/2}\pi^{3/4}\sqrt{1-q^2}}\left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right)^{1/4} + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right), \tag{65$''$}$$

при $p = 6/5$ $(p' = 6)$

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,6/5})_C = q^n\left(\frac{5^{1/6}}{2^{1/2}\pi^{5/6}\sqrt{1-q^2}}\left(\frac{1+4q^2+q^4}{1-2q^2+q^4}\right)^{1/6} + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right), \tag{65$'''$}$$

і т. д.

З приводу рівності (65$'$) див., наприклад, [12, 13].

2. Наближення сумами Фур'є на класах аналітичних функцій.

Теорема 2. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *а послідовності* $\psi(k) > 0$, *що породжують класи* $C^{\psi}_{\beta,p}$, *задовольняють умову* (9) (*тобто* $\psi \in \mathcal{D}_q$) *при* $0 < q < 1$. *Тоді при* $n \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C = \psi(n)\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p'}}\|\cos t\|_{p'} K(p',q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \quad (66)$$

у якій $p' = p/(p-1)$,

$$\varepsilon_n = \sup_{k \ge n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|, \quad (67)$$

характеристики $s(p)$ *і* $K(p',q)$ *означені формулами* (15) *і* (16) *відповідно, а величина* $O(1)$ *рівномірно обмежена відносно* n, p, q, $\psi(k)$ *і* β.

Доведення. Нехай $\psi(k) > 0$, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$. Тоді згідно з теоремою 2 роботи [4] при $1 \le p \le \infty$ для довільної послідовності $\overline{\beta} = \beta_k$ дійсних чисел виконуються асимптотичні при $n \to \infty$ рівності

$$\mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\overline{\beta},p})_C = \psi(n)\left(q^{-n}\mathscr{E}_n(C^{q}_{\overline{\beta},p})_C + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right), \quad (68)$$

де величина ε_n означена рівністю (67), а $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені відносно n, p, q, $\psi(k)$ і β_k. Застосовуючи рівність (68) при $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, і використовуючи формулу (14), одержуємо (66).

Теорему доведено.

Умови теореми 2 задовольняють, зокрема, бігармонічні ядра Пуассона

$$B_{q,\beta}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1-q^2}{2}k\right)q^k\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad 0 < q < 1, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (69)$$

а також ядра Неймана

$$N_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{k}\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad 0 < q < 1, \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (70)$$

Для коефіцієнтів $\psi(k)$ ядер $B_{q,\beta}(t)$ і $N_{q,\beta}(t)$, як неважко перевірити,

$$\varepsilon_k = \left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right| \le \frac{q}{k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (71)$$

Отже, із теореми 2 і співвідношень (71) одержуємо твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $1 \le p \le \infty$ *і класи* $C^{\psi}_{\beta,p}$ *породжені ядрами* $B_{q,\beta}(t)$ *вигляду* (69), $n \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $n \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C = q^n\left(1 + \frac{1-q^2}{2}n\right)\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p'}}\|\cos t\|_{p'} K(p',q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right),$$

де $p' = p/(p-1)$, $K(p',q)$ *означені рівністю* (16), *а величина* $O(1)$ *рівномірно обмежена відносно* n, p, q *і* β.

***Наслідок* 2.** *Нехай* $1 \le p \le \infty$ *і класи* $C^{\psi}_{\beta,p}$ *породжені ядрами* $N_{q,\beta}(t)$ *вигляду* (70), $n \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $n \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C = \frac{q^n}{n}\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p'}}\|\cos t\|_{p'} K(p',q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right),$$

де $p' = p/(p-1)$, $K(p', q)$ *означені рівністю* (16), *а величина* $O(1)$ *рівномірно обмежена відносно* n, p, q *і* β.

З аналізу доведення теореми 1 видно, що використовувані у ньому методи дозволяють отримувати асимптотичні оцінки величин $\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,p})_C$, $1 \le p \le \infty$, для класів $C^q_{\beta,p}$, породжуваних ядрами $P_{q,\bar\beta}(t)$ вигляду (11), у яких $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. При цьому форма одержуваних оцінок у порівнянні із випадками $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, не зміниться. А саме, має місце таке твердження.

Теорема 1′. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $0 < q < 1$, $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $n \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,p})_C = q^n\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p'}}\|\cos t\|_{p'} K(p', q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}}\right),$$

у якій $p' = p/(p-1)$, *характеристики* $s(p)$ *і* $K(p', q)$ *означені формулами* (15) *і* (16) *відповідно, а величина* $O(1)$ *рівномірно обмежена відносно* n, p, q *і* β.

Співставлення теореми 1′ та рівності (68) дозволяє сформулювати наступний аналог теореми 2.

Теорема 2′. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $n \in \mathbb{N}$, *а класи* $C^\psi_{\beta,p}$ *породжені ядрами* $\Psi_{\bar\beta}$ *вигляду* (10), *у яких* $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, *а* $\psi(k) > 0$ *задовольняють умову* (9) ($\psi \in \mathcal{D}_q$) *при* $0 < q < 1$. *Тоді при* $n \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,p})_C = \psi(n)\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p'}}\|\cos t\|_{p'} K(p', q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \quad (66')$$

у якій $p' = p/(p-1)$, *характеристики* ε_n, $s(p)$ *і* $K(p', q)$ *означені відповідно формулами* (67), (15) *і* (16), *а величина* $O(1)$ *рівномірно обмежена відносно* n, p, q, β *і* $\psi(k)$.

Теорему 2′ можна узагальнити на класи $C^{\bar\psi}_p$ таким чином.

Теорема 3. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $n \in \mathbb{N}$, *а класи* $C^{\bar\psi}_p$ *породжені парою* $\bar\psi = (\psi_1(k), \psi_2(k))$ *систем чисел, що задовольняють умови*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi_i(k+1)}{\psi_i(k)} = q_i, \quad 0 < q_i < 1, \quad i = 1, 2 \quad (72)$$

($\psi_i \in \mathcal{D}_{q_i}$).

Тоді при $n \to \infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}_n(C^{\bar\psi}_p)_C = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p'}}\|\cos t\|_{p'} K(p', q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \quad (73)$$

у якій $q = \max\{q_1, q_2\}$, $p' = p/(p-1)$,

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \max\limits_{i=1,2} \varepsilon_n^{(i)}, & \textit{якщо} \quad q_1 = q_2, \\ \varepsilon_n^{(1)}, & \textit{якщо} \quad q_1 > q_2, \\ \varepsilon_n^{(2)}, & \textit{якщо} \quad q_1 < q_2, \end{cases}$$

$$\varepsilon_n^{(i)} = \sup_{k \geq n} \left| \frac{\psi_i(k+1)}{\psi_i(k)} - q_i \right|, \quad i = 1, 2, \tag{74}$$

характеристики $s(p)$ *і* $K(p', q)$ *означені відповідно формулами* (15) *і* (16)*, а величина* $O(1)$ *рівномірно обмежена відносно* n, p, q, ψ_1 *і* ψ_2.

Доведення. Нехай $f \in C_p^{\overline{\psi}}$, $1 \leq p \leq \infty$. Тоді

$$f(x) - S_{n-1}(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(t) \varphi(x-t)\, dt, \quad \varphi \in U_p^0, \tag{75}$$

де

$$\Psi_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \big(\psi_1(k) \cos kt + \psi_2(k) \sin kt \big) = G_n(t) + H_n(t), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$G_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) \cos kt, \quad H_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \psi_2(k) \sin kt.$$

Розглянемо спочатку випадок $q_1 = q_2 = q$. Згідно з рівностями (47) роботи [4]

$$\Psi_n(t) = \psi(n) \left(q^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta_n \pi}{2} \right) + O(1) \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right), \tag{76}$$

де

$$\varepsilon_n = \max_{i=1,2} \left\{ \varepsilon_n^{(i)} \right\}, \quad \varepsilon_n^{(i)} = \sup_{k \geq n} \left| \frac{\psi_i(k+1)}{\psi_i(k)} - q_i \right|,$$

$$i = 1, 2, \quad \psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)},$$

а β_n — числа із проміжку $[0, 4)$, що означаються рівностями

$$\cos \frac{\beta_n \pi}{2} = \frac{\psi_1(n)}{\psi(n)}, \quad \sin \frac{\beta_n \pi}{2} = \frac{\psi_2(n)}{\psi(n)}.$$

На підставі (75) і (76) одержуємо

$$\mathscr{E}_n(C_p^{\psi})_C = \sup_{\varphi \in U_p^0} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(n) \left(q^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta_n \pi}{2} \right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + O(1) \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right) \varphi(x-t)\, dt \right\|_C =$$

$$= \psi(n) \left(\sup_{\varphi \in U_p^0} q^{-n} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{q, \beta_n, n}(t) \varphi(x-t)\, dt \right\|_C + O(1) \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right) =$$

$$= \psi(n) \left(q^{-n} \mathscr{E}(C_{\beta_n, p}^q)_C + O(1) \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right). \tag{77}$$

Врахувавши рівномірність величини $O(1)$ в рівності (14) відносно параметра β, цю рівність можна записати у вигляді

$$\mathscr{E}(C^q_{\alpha_n,p})_C = q^n\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p'}}\|\cos t\|_{p'}K(p',q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}}\right), \tag{14'}$$

де α_n, $n = 1, 2, \ldots$, — довільна послідовність дійсних чисел.

Скориставшись рівністю (14′) при $\alpha_n = \beta_n$, із (77) одержимо (73).

Нехай тепер, наприклад, $q_1 < q_2 = q$. Як показано у роботі [4] (формула (51)), у цьому випадку ядро $\Psi_n(t)$ можна подати у вигляді

$$\Psi_n(t) = \psi(n)\left(q_2^{-n}P_{q_2,1,n}(t)\operatorname{sign}\psi_2(n) + O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{\alpha_n}{1-q}\right)\right), \tag{78}$$

де

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n^{(2)} \quad \text{і} \quad \alpha_n = \max_{i=1,2}\left\{\alpha_n^{(i)}\right\},$$

$$\alpha_n^{(1)} = \left|\frac{\psi_1(n)}{\psi(n)}\right|, \qquad \alpha_n^{(2)} = 1 - \left|\frac{\psi_2(n)}{\psi(n)}\right|.$$

Об'єднуючи співвідношення (75) і (78) і враховуючи, що $q_2 = q$, одержуємо

$$\mathscr{E}_n(C^{\overline{\psi}}_p)_C = \sup_{\varphi\in U^0_p}\left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(n)\left(q^{-n}P_{q,1,n}(t)\operatorname{sign}\psi_2(n) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{\alpha_n}{1-q}\right)\right)\varphi(x-t)\,dt\right\|_C =$$

$$= \psi(n)\left(\sup_{\varphi\in U^0_p} q^{-n}\left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_{q,1,n}(t)\varphi(x-t)\,dt\right\|_C + O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{\alpha_n}{1-q}\right)\right) =$$

$$= \psi(n)\left(q^{-n}\mathscr{E}_n(C^q_{1,p})_C + O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{\alpha_n}{1-q}\right)\right). \tag{79}$$

У роботі [4] (співвідношення (50)) було показано, що у розглядуваному випадку

$$\alpha_n^{(i)} = O(1)\left(\frac{q_1}{q_2} + \varepsilon\right)^n, \qquad 0 < \varepsilon < 1 - \frac{q_1}{q_2}, \quad i = 1, 2. \tag{80}$$

Беручи до уваги рівність (14) при $\beta = 1$ і враховуючи, що внаслідок (80) $\alpha_n = o(1/n)$, із (79) знаходимо

$$\mathscr{E}_n(C^{\overline{\psi}}_p)_C = \psi(n)\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p'}}\|\cos t\|_{p'}K(p',q) + \right.$$

$$\left. + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{\alpha_n}{1-q}\right)\right) =$$

$$= \psi(n)\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p'}}\|\cos t\|_{p'}K(p',q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right).$$

Тим самим співвідношення (73) доведено у випадку $q_1 < q_2$. Зрозуміло, що тими ж міркуваннями (73) доводиться і при $q_1 > q_2$.

Теорему доведено.

3. Наближення сумами Фур'є на класах цілих функцій. У даному пункті буде знайдено асимптотичні рівності величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,p})_C$ у випадку, коли функціональні класи $C^{\psi}_{\bar\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, породжуються послідовностями $\psi(k) > 0$, що задовольняють умову

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0. \tag{81}$$

У цьому випадку елементи множин $C^{\psi}_{\bar\beta,p}$ є звуженнями на дійсну вісь функцій, регулярних в усій комплексній площині, тобто цілих функцій (див., наприклад, [2, с. 139 – 141]).

Має місце наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\bar\beta = \beta_k$, $k \in \mathbb{N}$, — *довільна послідовність дійсних чисел, а послідовність* $\psi(k) > 0$, $k \in \mathbb{N}$, *задовольняє умову* (81). *Тоді при* $n \to \infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,p})_C = \psi(n)\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi} + O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k), \tag{82}$$

у якій $p' = p/(p-1)$, *а* $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена відносно усіх розглядуваних параметрів.*

Доведення. На основі інтегрального зображення (5) для довільної функції $f \in C^{\psi}_{\bar\beta,p}$ маємо

$$\rho_n(f;x) = f(x) - S_{n-1}(f;x) = \frac{\psi(n)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\bar\beta}(x-t)\cos\left(nt - \frac{\beta_n\pi}{2}\right)dt + \rho_{n+1}(f;x). \tag{83}$$

На підставі нерівності Гельдера та очевидних співвідношень одержуємо

$$\|\rho_{n+1}(f;x)\|_C \le \frac{1}{\pi}\left\|f^{\psi}_{\bar\beta}\right\|_p \left\|\Psi_{\bar\beta,n+1}\right\|_{p'} \le \frac{2^{1/p'}}{\pi^{1/p}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k), \qquad 1 \le p \le \infty, \tag{84}$$

де

$$\Psi_{\bar\beta,n+1}(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta_k\pi}{2}\right).$$

Із (83), (84), а також співвідношень двоїстості (19) випливають рівності

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,p})_C = \frac{\psi(n)}{\pi}\sup_{f\in C^{\psi}_{\bar\beta,p}}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\bar\beta}(x-t)\cos\left(nt - \frac{\beta_n\pi}{2}\right)dt + O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k) =$$

$$= \frac{\psi(n)}{\pi}\sup_{\varphi\in U^0_p}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos\left(nt - \frac{\beta_n\pi}{2}\right)dt + O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k) =$$

$$= \frac{\psi(n)}{\pi}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\cos\left(nt - \frac{\beta_n\pi}{2}\right) - \lambda\right\|_{p'} + O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k). \tag{85}$$

Згідно з теоремою про характеризацію екстремального елемента в L_p (див.

[9, с. 27, 28]) та теоремою Чебишова про альтернанс (див., наприклад, [3, с. 234; 9, с. 52]) точна нижня межа у правій частині формули (85) досягається при $\lambda = 0$ і, отже,

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\cos\left(nt-\frac{\beta_n\pi}{2}\right)-\lambda\right\|_{p'} = \left\|\cos\left(nt-\frac{\beta_n\pi}{2}\right)\right\|_{p'} = \|\cos t\|_{p'}, \quad 1 \le p' \le \infty. \tag{86}$$

Об'єднавши рівності (85) і (86), одержимо (82). На завершення досить зауважити, що умова (81) гарантує виконання співвідношення [2, с. 300, 301]

$$\psi(n) = o(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k).$$

Теорему доведено.

При $p = \infty$ теорему 4 із залишковим членом, записаним в іншій (більш точній) формі, довів С. О. Теляковський [14]. При $p = 2$ твердження теореми 4 також слід вважати відомим [2, с. 294 – 298].

Типовими представниками послідовностей $\psi(k)$, що задовольняють умову (81), є послідовності

$$\psi(k) = e^{-\alpha k^r}, \quad \alpha > 0, \quad r > 1. \tag{87}$$

Позначаючи, наслідуючи О. І. Степанця [3], функціональні класи $C^{\psi}_{\bar\beta,p}$, породжені послідовностями $\psi(k)$ вигляду (87), через $C^{\alpha,r}_{\bar\beta,p}$ і враховуючи оцінку із [3, с. 130]

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\alpha k^r} < e^{-\alpha n^r}\left(1+\frac{1}{\alpha r n^{r-1}}\right)e^{-\alpha r n^{r-1}}, \quad r > 1, \quad \alpha > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

із теореми 4 отримуємо таке твердження.

Наслідок 3. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\alpha > 0$, $r > 1$ *і* $\bar\beta = \beta_k$, $k = 1, 2, \ldots$, — *довільна послідовність дійсних чисел. Тоді при* $n \to \infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\bar\beta,p})_C = e^{-\alpha n^r}\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi} + O(1)\left(1+\frac{1}{\alpha r n^{r-1}}\right)e^{-\alpha r n^{r-1}}\right),$$

у якій $p' = p/(p-1)$, *а величина* $O(1)$ *рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Зазначимо, що при $p = \infty$ асимптотичну формулу для величин $\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\bar\beta,p})_C$ одержав О. І. Степанець [15] (див. також [2, с. 292 – 301; 3, с. 130, 131]) і уточнив С. О. Теляковський [14, с. 515] за рахунок кращої оцінки залишкового члена. Зауважимо також, що наслідок 3 при $\beta_k \equiv \beta$ доповнює (на випадок $r > 1$) теорему 1, у якій охоплено випадок $r = 1$.

Щодо задачі про знаходження асимптотичних рівностей для величин $\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\bar\beta,p})_C$ при $0 < r < 1$, $p \ge 1$, варто зауважити, що вона розв'язана у випадку $p = \infty$ О. І. Степанцем [3, с. 122]):

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\bar\beta,\infty})_C = \frac{4}{\pi^2}e^{-\alpha n^r}\ln n^{1-r} + O(1)e^{-\alpha n^r}, \quad 0 < r < 1, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

де $O(1)$ — величина, що рівномірно обмежена відносно n і β. При $1 < p < \infty$ відомі лише порядкові оцінки [16, с. 135]

$$K_1 e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)/p} \le \mathscr{E}_n(C^{\alpha,r}_{\overline{\psi},p})_C \le K_2 e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)/p}, \quad 0 < r < 1, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

у яких K_1 і K_2 — додатні сталі, що не залежать від n.

1. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$-интегралов // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1069 – 1113.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. 1 – 427 с.
3. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 286 с.
4. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Приближение суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 3. – С. 375 – 395.
5. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207 – 256.
6. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 126 – 151.
7. *Ефимов А. В.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 2. – С. 243 – 296.
8. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. 1 // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **62**. – С. 61 – 97.
9. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
10. *Fejer L.* Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen // J. reine und angew. Math. – 1910. – **138**. – S. 22 – 53.
11. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
12. *Осипенко К. Ю., Стесин М. И.* О поперечниках класса Харди H_2 в n-мерном шаре // Успехи мат. наук. – 1990. – **45**, № 5. – С. 193 – 194.
13. *Савчук В. В.* Найкращі лінійні методи наближення функцій класу Харді H_p // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 919 – 925.
14. *Теляковский С. А.* О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости // Там же. – 1989. – **41**, № 4. – С. 510 – 518.
15. *Степанец А. И.* Уклонение сумм Фурье на классах бесконечно дифференцируемых функций // Там же. – 1984. – **36**, № 6. – С. 750 – 758.
16. *Романюк В. С.* Дополнения к оценкам приближения суммами Фурье классов бесконечно дифференцируемых функций // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 131 – 135.

Одержано 14.07.2004