УДК 517.9: 519.46

А. Ф. Баранник (Помор. пед. академія, Слупськ, Польща),
І. І. Юрик (Нац. ун-т харч. технологій, Київ)

ПРО ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ДИФУЗІЇ

New extended classes of exact solutions of a nonlinear diffusion equation are constructed.

Побудовано нові класи точних розв'язків нелінійних рівнянь дифузії.

1. Вступ. Рівняння

$$u_t = u_{xx} + b(u)u_x + c(u), \tag{1}$$

де $u = u(t, x)$, $b(u)$, $c(u)$ — гладкі функції, а індекси означають похідні за відповідними змінними, узагальнює велику кількість відомих нелінійних еволюційних рівнянь, які мають фундаментальне значення в моделюванні різноманітних процесів теплопровідності, реакції-дифузії, в математичній біології, генетиці, хімії. Так, частинними випадками рівняння (1) є рівняння Фішера [1]

$$u_t = u_{xx} + u(1-u), \tag{2}$$

а також рівняння Маррі [2]

$$u_t = u_{xx} + \lambda u u_x + a u^2 + b u, \tag{3}$$

де $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$, які широко використовуються в біології.

Групову класифікацію рівнянь (1) наведено в [3], а результати умовної симетрії рівняння (1) — в [4].

У даній роботі розглядається рівняння вигляду

$$u_t = u_{xx} + \lambda u^{\frac{n-1}{2}} u_x + \varepsilon u^{\frac{n+1}{2}} + b_1 u + b_0 u^{\frac{3-n}{2}}, \tag{4}$$

де $\lambda \geq 0$, $\varepsilon = \pm 1$, b_0, $b_1 \in \mathbb{R}$, яке є узагальненням рівнянь (2), (3), а також нелінійне рівняння дифузії

$$u_t = h_1(u)u_{xx} + h_2(u)u_x + h_3(u), \tag{5}$$

де

$$h_1(u) = \beta_0 + \beta_1 u, \qquad h_2(u) = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2,$$
$$h_3(u) = a_4 u^4 + a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0$$

є многочленами з дійсними коефіцієнтами степенів 1, 2 і 4 відповідно. Для довільного n побудовано анзаци, які редукують рівняння (4) до звичайних диференціальних рівнянь. У випадку $n = 3$ з використанням нелокального перетворення Коула – Хопфа знаходження розв'язків даного рівняння зведено до інтегрування системи двох лінійних рівнянь, одне з яких є звичайним диференціальним рівнянням. Показано, що для $n = 3$ рівняння (4) має нетривіальну Q-умовну симетрію, а також побудовано нові точні розв'язки даного рівняння.

З використанням підстановки Коула – Хопфа побудовано також нові точні розв'язки рівняння (5). Зазначимо, що цей підхід було успішно використано в [5] для побудови точних розв'язків рівняння Колмогорова – Петровського – Піскунова

$$u_t = u_{xx} + f(u),$$

де $f(u)$ — гладка функція.

2. Нелієвські розв'язки рівняння (4) для $n = 3$. Розглянемо рівняння (4) у випадку $n = 3$:

$$u_t = u_{xx} + \lambda u u_x + \varepsilon u^2 + b_1 u + b_0. \tag{6}$$

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (6) є алгебра, породжена операторами

$$P_t = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_x = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Тому всі інваріантні розв'язки (5) мають вигляд

$$u = w(\alpha x + \beta t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ми покажемо, що рівняння (6) має нетривіальну Q-умовну симетрію [6], і знайдемо умовно інваріантні розв'язки даного рівняння.

Теорема 1. *Якщо в рівнянні* (6) $\lambda \neq 0$, *то воно умовно інваріантне відносно оператора*

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \left(-\lambda u + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\varepsilon u^2 + b_1 u + b_0\right)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{7}$$

Теорема доводиться з використанням формули другого продовження оператора X [7] і критерію умовної інваріантності відносно деякого оператора X [6, 8].

Теорема 2. 1. *Якщо* $4\varepsilon b_0 - b_1^2 > 0$, *то розв'язком рівняння* (6) *є функція*

$$u = \varepsilon\mu_1 \operatorname{tg}(\mu_1 t + k_1) + \frac{k_2 \exp\left[-\frac{\varepsilon}{\lambda}x + \left(\frac{1}{\lambda^2} + b_1\right)t\right]}{\cos(\mu_1 t + k_1)}, \tag{8}$$

де $\mu_1 = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{4\varepsilon b_0 - b_1^2}$.

2. *Якщо* $b_1^2 - 4\varepsilon b_0 > 0$, *то розв'язком рівняння* (6) *є функція*

$$u = \varepsilon\mu_2 \operatorname{th}(\mu_2 t + k_1) + \frac{k_2 \exp\left[-\frac{\varepsilon}{\lambda}x + \left(\frac{1}{\lambda^2} + b_1\right)t\right]}{\operatorname{ch}(\mu_2 t + k_1)}, \tag{9}$$

де $\mu_2 = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{b_1^2 - 4\varepsilon b_0}$.

3. *Якщо* $b_1^2 - 4\varepsilon b_0 = 0$, *то розв'язком рівняння* (6) *є функція*

$$u = -\frac{1}{\varepsilon t + k_1} - \frac{b_1}{2\varepsilon} + \frac{k_2 \exp\left[-\frac{\varepsilon}{\lambda}x + \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{b_1}{2}\right)t\right]}{\varepsilon t + k_1}. \tag{10}$$

У формулах (8) – (10) k_1, k_2 — *довільні сталі.*

Доведення теореми зводиться до відшукання розв'язків рівняння (6), інваріантних відносно оператора (7). Якщо $u = u(t, x)$ є одним із таких розв'язків, то

$$u_t = -\left(-\lambda u + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)u_x + \varepsilon u^2 + b_1 u + b_0. \qquad (11)$$

Підставляючи (11) в (6), отримуємо

$$u_{xx} + \frac{\varepsilon}{\lambda}u_x = 0. \qquad (12)$$

Отже, система рівнянь (6), (11) рівносильна системі рівнянь (6), (12). Інтегруючи систему (6), (12), отримуємо розв'язки (8) – (11) рівняння (6).

Теорему доведено.

Очевидно, що розв'язки (8) – (10) не є інваріантними відносно операторів трансляцій $P_t + \gamma P_x$, $\gamma \in \mathbb{R}$, а тому вони є нелієвськими.

3. Лієвські розв'язки рівняння (4) для $n = 3$. Побудуємо тепер розв'язки рівняння (6), інваріантні відносно операторів трансляцій. З цією метою використаємо анзац Коула – Хопфа

$$u = k\frac{z_x}{z}, \qquad (13)$$

де k — стала $(k \neq 0)$, а $z = z(t, x)$ — деяка функція. Підставляючи (13) в (6), отримуємо рівняння

$$(kz_{xt} - kz_{xxx} - b_1 k z_x - b_0 z)z^2 + kz_x(-z_t + (3 - \lambda k)z_{xx} - \varepsilon k z_x)z +$$
$$+ \left(-2k + \lambda k^2\right) = 0.$$

Змінну z визначимо з умови, що вирази при z і z^2 у даному рівнянні дорівнюють нулю. Маємо систему

$$kz_{xt} - kz_{xxx} - b_1 k z_x - b_0 z = 0, \qquad (14)$$

$$-z_t + (3 - \lambda k)z_{xx} - \varepsilon k z_x = 0, \qquad (15)$$

$$2 - \lambda k = 0. \qquad (16)$$

З рівнянь (15) і (16) знаходимо

$$z_t = z_{xx} - \varepsilon k z_x. \qquad (17)$$

Підставляючи в рівняння (14), одержуємо

$$\varepsilon k^2 z_{xx} + b_1 k z_x + b_0 z = 0. \qquad (18)$$

Отже, система (14) – (16) є рівносильною системі (16) – (18), яку можна легко проінтегрувати. Тип її розв'язку залежить від коренів характеристичного рівняння

$$\varepsilon k^2 v^2 + b_1 k v + b_0 = 0, \qquad (19)$$

що відповідає лінійному рівнянню (18). Коренями характеристичного рівняння (19) є $\frac{1}{k}m_1$, $\frac{1}{k}m_2$, де m_1, m_2 — корені квадратного рівняння

$$\varepsilon v^2 + b_1 v + b_0 = 0. \qquad (20)$$

Інтегруючи систему (16) – (18) і використовуючи підстановку (13), приходимо до такого результату.

Теорема 3. 1. *Якщо корені* m_1, m_2 *рівняння* (20) *є дійсними і різними, то розв'язком рівняння* (6) *є функція*

$$u = \frac{k_1 m_1 \exp\psi_1(t,x) + k_2 m_2 \exp\psi_2(t,x)}{k_1 \exp\psi_1(t,x) + k_2 \exp\psi_2(t,x)}, \tag{21}$$

де

$$\psi_i(t,x) = \frac{\lambda}{2} m_i x + \left(\frac{\lambda^2}{4} m_i^2 - \varepsilon m_i\right)t, \quad i = 1, 2.$$

2. *Якщо корені* $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha - i\beta$ *рівняння* (20) *є комплексними, то розв'язком рівняння* (6) *є функція вигляду*

$$u = \frac{\left(\alpha k_1 + \beta k_2\right)\cos\phi(t,x) + \left(\alpha k_2 - \beta k_1\right)\sin\phi(t,x)}{k_1 \cos\phi(t,x) + k_2 \sin\phi(t,x)}, \tag{22}$$

де

$$\phi(t,x) = \frac{\lambda}{2}\beta x + \left(\frac{\lambda^2}{2}\alpha\beta - \varepsilon\beta\right)t.$$

3. *Якщо корені* m_1, m_2 *рівняння* (20) *є рівними, то розв'язком рівняння* (6) *є функція*

$$u = -\frac{\varepsilon b_1}{2} \frac{\left\{k_1 x + \left(-\frac{\varepsilon\lambda b_1}{2} k_1 - \frac{2\varepsilon}{\lambda} k_1\right)t + k_2\right\} + k_1}{k_1 x + \left(-\frac{\varepsilon\lambda b_1}{2} k_1 - \frac{2\varepsilon}{\lambda} k_1\right)t + k_2}. \tag{23}$$

У формулах (21) – (23) k_1, k_2 *— довільні сталі,* $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$.

4. *Розв'язки рівняння* (4) *для довільного* n. Побудуємо точні розв'язки рівняння (4) для довільного n при умові, що $b_0 = 0$:

$$u_t = u_{xx} + \lambda u^{\frac{n-1}{2}} u_x + \varepsilon u^{\frac{n+1}{2}} + b_1 u. \tag{24}$$

З цією метою використаємо анзац

$$u = k\left(\frac{z_x}{z}\right)^{\frac{2}{n-1}}, \tag{25}$$

де k — стала, $z = z(t,x)$. Підставляючи (25) в рівняння (24) і прирівнюючи до нуля вирази при z і z^2, отримуємо таку систему для визначення змінної z:

$$\frac{2}{n-1} z_x z_{xt} - \frac{2(3-n)}{(n-1)^2} z_{xx}^2 - \frac{2}{n-1} z_x z_{xx} - b_1 z_x^2 = 0, \tag{26}$$

$$z_t = \left(\frac{n+3}{n-1} - \lambda k^{\frac{2}{n-1}}\right) z_{xx} - \frac{\varepsilon(n-1)}{2} k^{\frac{n-1}{2}} z_x, \tag{27}$$

$$-\lambda k^{\frac{n-1}{2}} + \frac{n+1}{n-1} = 0. \tag{28}$$

З рівняння (28) знаходимо

$$k^{\frac{n-1}{2}} = \frac{n+1}{\lambda(n-1)}. \tag{29}$$

Підставляючи (29) в (27), маємо

$$z_t = \frac{2}{n-1} z_{xx} - \frac{\varepsilon(n+1)}{2\lambda} z_x. \tag{30}$$

Продиференціювавши обидві частини рівняння (30) за змінною x і підставивши в рівняння (26), отримаємо

$$\frac{6-2n}{(n-1)^2} z_x z_{xxx} - \frac{\varepsilon(n+1)}{\lambda(n-1)} z_x z_{xx} - \frac{2(3-n)}{(n-1)^2} z_{xx}^2 - b_1 z_x^2 = 0. \tag{31}$$

Отже, система (26) – (28) є рівносильною системі (29) – (31).

Теорема 4. *Розв'язком рівняння* (24) *є функція*

$$u = \left[\frac{n+1}{\lambda(n-1)}\right]^{\frac{2}{n-1}} \times$$

$$\times \frac{\exp\left[-\dfrac{2\varepsilon\lambda b_1}{n+1} x + \left(\dfrac{4\lambda^2 b_1^2}{(n+1)^2} + b_1\right) t\right]}{\left\{-\dfrac{\varepsilon(n+1)}{\lambda(n-1)b_1} \exp\left[-\dfrac{\varepsilon\lambda b_1(n-1)}{n+1} x + \left(\dfrac{2\lambda^2 b_1^2}{(n+1)^2} + \dfrac{b_1}{2}\right)(n-1)t\right] + \tilde{k}\right\}^{\frac{2}{n-1}}}, \tag{32}$$

$\tilde{k}$ — довільна стала.

Доведення. Повторюючи міркування, наведені в [5], знаходимо загальний розв'язок системи (29) – (31):

$$z = -\frac{k_1(n+1)}{\lambda\varepsilon(n-1)b_1} \exp\left[-\frac{\varepsilon\lambda b_1(n-1)}{n+1} x + \left(\frac{2\lambda^2 b_1^2(n-1)}{(n+1)^2} + \frac{b_1(n-1)}{2}\right) t\right] + k_2. \tag{33}$$

Підставляючи (33) в (25), отримуємо розв'язок (32).

Теорему доведено.

Розглянемо рівняння

$$u_t = u_{xx} + \lambda u^{\frac{n-1}{2}} u_x + b u^{\frac{n+1}{2}} + \frac{b^2(n+1)}{2\lambda^2}. \tag{34}$$

Анзац

$$u = -\frac{b(n-1)k_1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{b(n-1)}{2\lambda} x + \frac{b^2(n-1)(n+3)}{4\lambda^2} t + k_2\right) w(z), \tag{35}$$

де

$$z = k_1 \exp\left(-\frac{b(n-1)}{2\lambda} x + \frac{b^2(n-1)(n+3)}{4\lambda^2} t + k_2\right) + k_3, \tag{36}$$

k_1, k_2, k_3 — довільні дійсні числа, $k_1 \neq 0$, редукує рівняння (34) до звичайного диференціального рівняння

$$w'' + \lambda w^{\frac{n-1}{2}} w' = 0. \tag{37}$$

Теорема 5. *Якщо* $n = 3$, *то розв'язками рівняння* (34) *є функції*

$$u = -\frac{2bk_1}{\lambda} \frac{\exp\left(-\dfrac{b}{\lambda} x + \dfrac{3b^2}{\lambda^2} t + k_2\right)}{k_1 \exp\left(-\dfrac{b}{\lambda} x + \dfrac{3b^2}{\lambda^2} t + k_2\right) + \lambda k_3 + c},$$

де k_1, k_2, k_3 *— довільні дійсні числа,* $k_1 \neq 0$;

$$u = \frac{bk_1}{\mu_1\lambda}\exp\left(-\frac{b}{\lambda}x + \frac{3b^2}{\lambda^2}t + k_2\right)\operatorname{tg}(\mu_1 cz + c_1), \tag{38}$$

де $\mu_1 = \sqrt{\dfrac{-\lambda}{2c}}$, c, c_1 *— довільні сталі,* $c < 0$;

$$u = -\frac{bk_1}{\mu_2\lambda}\exp\left(-\frac{b}{\lambda}x + \frac{3b^2}{\lambda^2}t + k_2\right)\operatorname{th}(\mu_2 cz + c_1), \tag{39}$$

де $\mu_2 = \sqrt{\dfrac{\lambda}{2c}}$, c, c_1 *— довільні сталі,* $c > 0$.

У формулах (38), (39) $z = z(t, x)$ *— функція, визначена формулою* (36).

Теорема доводиться з використанням редукованого рівняння (37) для $n = 3$, а також відповідного анзацу (35), (36).

5. Точні розв'язки рівняння (5). Для побудови розв'язків рівняння (5) використаємо підстановку Коула – Хопфа (13). З'ясуємо, для яких значень параметрів β_0, β_1, λ_0, λ_1, λ_2 рівняння (5) має розв'язки вигляду (13). З цією метою підставимо (13) в (5) і в отриманому рівнянні прирівняємо до нуля вирази при z, z^2 і z^3. В результаті отримаємо систему

$$kz_{xt} = \beta_0 kz_{xxx} + \lambda_0 kz_{xx} + a_1 kz_x + a_0 z, \tag{40}$$

$$z_t = -\beta_1 kz_{xxx} + (3\beta_0 - \lambda_1 k)z_{xx} + (\lambda_0 - a_2 k)z_x, \tag{41}$$

$$\left(2\beta_0 - \lambda_1 k + a_3 k^2\right)z_x + \left(-3\beta_1 k + \lambda_2 k^2\right)z_{xx} = 0, \tag{42}$$

$$a_4 k^2 - \lambda_2 k + 2\beta_1 = 0. \tag{43}$$

Підставимо (41) в (40):

$$-\beta_1 k^2 z_{xxxx} + k(2\beta_0 - \lambda_1 k)z_{xxx} - a_2 k^2 z_{xx} - a_1 kz_x - a_0 z = 0. \tag{44}$$

Отже, знаходження розв'язків рівняння (5) звелося до інтегрування системи лінійних рівнянь (41) – (44). Проаналізуємо детально випадок $-3\beta_1 + \lambda_2 k = 0$. З рівняння (42) випливає $2\beta_0 - \lambda_1 k + a_3 k^2 = 0$. Враховуючи (43), отримуємо

$$k = \frac{\lambda_2}{3a_4}, \qquad \lambda_1 = \frac{6a_4\beta_0}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2 a_3}{3a_4}, \qquad \beta_1 = \frac{\lambda_2^2}{9a_4}. \tag{45}$$

Підставляючи (45) в (44), знаходимо

$$a_4 k^4 z_{xxxx} + a_3 k^3 z_{xxx} + a_2 k^2 z_{xx} + a_1 kz_x + a_0 z = 0. \tag{46}$$

Отже, інтегрування системи (41) – (44) у випадку $-3\beta_1 + \lambda_2 k = 0$ зводиться до інтегрування системи (41), (46) при умові, що виконуються співвідношення (45). Рівняння (5) при цьому має вигляд

$$u_t = \left(\beta_0 + \frac{\lambda_2^2}{9a_4}u\right)u_{xx} + \left[\lambda_0 + \left(\frac{6a_4\beta_0}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2 a_3}{3a_4}\right)u + \lambda_2 u^2\right]u_x +$$
$$+ a_4 u^4 + a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0, \tag{47}$$

де значення параметрів β_0, λ_0, λ_2, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 є довільними, $\lambda_2 \neq 0$, $a_4 \neq 0$.

Побудуємо точні розв'язки рівняння (47). Тип розв'язку рівняння (47) залежить від коренів характеристичного рівняння

$$a_4 k^4 r^4 + a_3 k^3 r^3 + a_2 k^2 r^2 + a_1 kr + a_0 = 0, \tag{48}$$

що відповідає рівнянню (46). Коренями рівняння (48) є $\frac{1}{k}m_i$, де m_i, $i = 1, 2, 3, 4$, — корені рівняння

$$a_4 r^4 + a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0. \tag{49}$$

Теорема 6. *Якщо корені* m_1, m_2, m_3, m_4 *рівняння* (49) *є дійсними і різними, то розв'язком рівняння* (47) *є функція*

$$u = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i k_i \exp\phi_i(t, x)}{\sum_{i=1}^{4} k_i \exp\phi_i(t, x)},$$

де k_i *— довільні сталі, що одночасно не дорівнюють нулю,* $i = 1, 2, 3, 4$,

$$\phi_i(t, x) = \frac{3a_4}{\lambda_2} m_i x + \left[-a_4 m_i^3 + \left(\frac{9a_4^2\beta_0}{\lambda_2^2} - a_3\right)m_i^2 + \left(\frac{3a_4\lambda_0}{\lambda_2} - a_2\right)m_i\right]t. \tag{50}$$

Теорема 7. *Якщо корені* m_1, m_2, m_3, m_4 *рівняння* (49) *є дійсними,* $m_1 = m_2$, $m_1 \neq m_3$, $m_1 \neq m_4$, $m_3 \neq m_4$, *то розв'язком рівняння* (47) *є функція*

$$u = \frac{\left[\frac{\lambda_2}{3a_4}\mu_1 + m_1(\mu_0 + \mu_1 x)\right]\exp\phi_1(t, x) + \sum_{i=3}^{4} m_i k_i \exp\phi_i(t, x)}{(\mu_0 + \mu_1 x)\exp\phi_1(t, x) + \sum_{i=3}^{4} k_i \exp\phi_i(t, x)},$$

де k_i *— довільні сталі, що одночасно не дорівнюють нулю,*

$$\mu_0 = k_2 C t + k_1, \quad \mu_1 = k_2,$$

$$C = -\lambda_2 m_1^2 + \frac{2\left(9a_4^2\beta_0 - \lambda_2^2 a_3\right)}{3a_4\lambda_2} m_1 + \lambda_0 - \frac{\lambda_2 a_2}{3a_4}, \tag{51}$$

а функції $\phi_i(t, x)$ *визначаються формулою* (50).

Теорема 8. *Якщо корені* $m_1 = \alpha_1 + i\gamma_1$, $m_2 = \alpha_1 - i\gamma_1$, $m_3 = \alpha_2 + i\gamma_2$, $m_4 = \alpha_2 - i\gamma_2$ *рівняння* (49) *є комплексними і різними, то розв'язком рівняння* (47) *є функція*

$$u = \frac{\sum_{i,j=1}^{2} l_i^{(j)} \psi_i^{(j)}(t, x)}{\sum_{i,j=1}^{2} k_i^{(j)} \psi_i^{(j)}(t, x)},$$

де $k_i^{(j)}$, $i, j = 1, 2$, *— довільні сталі, що одночасно не дорівнюють нулю,*

$$l_1^{(1)} = \alpha_1 k_1^{(1)} + \gamma_1 k_1^{(2)}, \quad l_2^{(1)} = \alpha_1 k_1^{(2)} - \gamma_1 k_1^{(1)}, \tag{52}$$

$$l_1^{(2)} = \alpha_2 k_2^{(1)} + \gamma_2 k_2^{(2)}, \quad l_2^{(2)} = \alpha_2 k_2^{(2)} - \gamma_2 k_2^{(1)}, \tag{53}$$

а функції $\psi_i^{(j)}$, $i, j = 1, 2$, *визначаються формулами*

$$\psi_1^{(j)}(t, x) = \exp\left\{\frac{3a_4\alpha_j}{\lambda_2} x + \left[-a_4\left(\alpha_j^3 - 3\alpha_j\gamma_j^2\right) + A\left(\alpha_j^2 - \gamma_j^2\right) + B\alpha_j\right]t\right\} \times$$

$$\times \cos\left\{\frac{3a_4\alpha_j}{\lambda_2} x + \left[-a_4\left(3\alpha_j^2\gamma_j - \gamma_j^3\right) + 2A\alpha_j\gamma_j + B\gamma_j\right]t\right\}, \quad j = 1, 2, \tag{54}$$

$$\psi_2^{(j)}(t,x) = \exp\left\{\frac{3a_4\alpha_j}{\lambda_2}x + \left[-a_4\left(\alpha_j^2 - 3\alpha_j\gamma_j^2\right) + A\left(\alpha_j^2 - \gamma_j^2\right) + B\alpha_j\right]t\right\} \times$$

$$\times \sin\left\{\frac{3a_4\alpha_j}{\lambda_2}x + \left[-a_4\left(3\alpha_j^2\gamma_j - \gamma_j^3\right) + 2A\alpha_j\gamma_j + B\gamma_j\right]t\right\}, \quad j = 1, 2, \tag{55}$$

$$A = \frac{9a_4^2\beta_0}{\lambda_2^2} - a_3, \qquad B = \frac{3\lambda_0 a_4}{\lambda_2} - a_3.$$

Теорема 9. *Якщо корені* m_1, m_2 *рівняння* (49) *є дійсними і різними, а корені* $m_3 = \alpha_2 + i\gamma_2$, $m_4 = \alpha_2 - i\gamma_2$ *— комплексними, то розв'язком рівняння* (47) *є функція*

$$u = \frac{\sum_{i=1}^{2} k_i m_i \exp\phi_i(t,x) + \sum_{i=1}^{2} l_i^{(2)}\psi_i^{(2)}(t,x)}{\sum_{i=1}^{2} k_i \exp\phi_i(t,x) + \sum_{i=1}^{2} k_i^{(2)}\psi_i^{(2)}(t,x)},$$

де k_i, $k_i^{(2)} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, *функції* $\phi_1(t,x)$ *і* $\phi_2(t,x)$ *обчислюються за формулою* (50), *функції* $\psi_1^{(2)}(t,x)$ *і* $\psi_2^{(2)}(t,x)$ *— за формулами* (54), (55), *а коефіцієнти* $l_i^{(2)}$, $i = 1, 2$, *— за формулами* (53).

Теорема 10. *Якщо корені* m_1 *і* m_2 *рівняння* (49) *є дійсними і рівними, а корені* $m_3 = \alpha_2 + i\gamma_2$, $m_4 = \alpha_2 - i\gamma_2$ *— комплексними, то розв'язком рівняння* (47) *є функція*

$$u = \frac{\left[\frac{\lambda_2}{3a_4}\mu_1 + m_1(\mu_0 + \mu_1 x)\right]\exp\phi_1(t,x) + \sum_{i=1}^{2} l_i^{(2)}\psi_i^{(2)}(t,x)}{(\mu_0 + \mu_1 x)\exp\phi_1(t,x) + \sum_{i=1}^{2} k_i^{(2)}\psi_i^{(2)}(t,x)},$$

де $k_i^{(2)} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, *функція* $\phi_1(t,x)$ *визначається за формулою* (50), *функції* $\psi_i^{(2)}(t,x)$, $i = 1, 2$, *обчислюються за формулами* (54), (55), μ_0 *і* μ_1 *— за формулою* (51), *а коефіцієнти* $l_i^{(2)}$ *— за формулами* (53).

Теорема 11. *Якщо корені* m_1, m_2, m_3, m_4 *рівняння* (49) *є дійсними,* $m_1 = m_2 = m_3$, $m_1 \neq m_4$, *то розв'язком рівняння* (47) *є функція*

$$u = \frac{\left[\frac{\lambda_2}{3a_4}(\mu_1 + 2\mu_2 x) + m_1\sum_{i=0}^{2}\mu_i x^i\right]\exp\phi_1(t,x) + m_4 k_4\exp\phi_4(t,x)}{\left(\sum_{i=0}^{2}\mu_i x^i\right)\exp\phi_1(t,x) + k_4\exp\phi_4(t,x)},$$

де k_1, k_2, k_3, $k_4 \in \mathbb{R}$, *функції* $\phi_1(t,x)$ *і* $\phi_4(t,x)$ *визначаються за формулою* (50), *а* C *— формулою* (51),

$$\mu_0 = \left\{k_3C^2t^2 + k_2Ct + k_3\left[-\frac{2\lambda_2^2}{3a_4} + \frac{2\left(9a_4^2\beta_0 - \lambda_2^2 a_3\right)}{9a_4^2}\right]t + k_1\right\},$$

$$\mu_1 = 2k_3Ct + k_2, \quad \mu_2 = k_3.$$

Теорема 12. *Якщо корені* m_1, m_2, m_3, m_4 *рівняння* (49) *є комплексними,* $m_1 = m_3,\ m_2 = m_4,\ m_1 = \alpha_1 + i\gamma_1,\ m_2 = \alpha_1 - i\gamma_1$, *то рівняння* (47) *має розв'язок вигляду* (13), *де* $k = \dfrac{\lambda_2}{3a_4}$,

$$z = \sum_{i=1}^{2} k_i^{(1)}\psi_i^{(1)} + l_1\left(S\psi_1^{(1)} - T\psi_2^{(1)}\right) + l_2\left(S\psi_2^{(1)} - T\psi_1^{(1)}\right),$$

причому $k_i^{(1)},\ l_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2,$

$$S(t, x) = \left[-\lambda_2\left(\alpha_1^2 - \gamma_1^2\right) + \frac{2\left(9a_4^2\beta_0 - \lambda_2^2 a_3\right)}{3a_4\lambda_2}\alpha_1 + \lambda_0 - \frac{\lambda_2 a_2}{3a_4}\right]t + x,$$

$$T(t) = \left[-2\lambda_2\alpha_1\gamma_1 + \frac{2\left(9a_4^2\beta_0 - \lambda_2^2 a_3\right)}{3a_4\lambda_2}\gamma_1\right]t,$$

а функції $\psi_i^{(1)}(t, x),\ i = 1, 2,$ *обчислюються за формулами* (54), (55).

Теорема 13. *Якщо корені* m_1, m_2, m_3, m_4 *рівняння* (49) *є дійсними і рівними, то рівняння* (47) *має розв'язок*

$$u = \frac{\lambda_2}{3a_4}\frac{\sum_{i=0}^{3} i\mu_i x^{i-1}}{\sum_{i=0}^{3}\mu_i x^i} + m_1,$$

де $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$, C *визначається за формулою* (51),

$$\mu_0 = k_4C^3t^3 + k_3C^2t^2 + 3k_4CDt^2 + k_2Ct + k_3Dt - k_4Et + k_1,$$

$$\mu_1 = 3k_4C^2t^2 + 2k_3Ct + 3k_4Dt + k_2,$$

$$\mu_2 = 3k_4Ct + k_3, \qquad \mu_3 = k_3,$$

$$D = -\frac{2\lambda_2^2}{3a_4}m_1 + \frac{2\left(9a_4^2\beta_0 - \lambda_2^2 a_3\right)}{9a_4^2}, \qquad E = -\frac{2\lambda_2}{a_4}.$$

1. *Fisher R. A.* The wave of advance of advantageons genes // Ann. Engenics. – 1937. – **7**. – P. 353 – 369.
2. *Marrey J. D.* Mathematical biology. – Berlin: Springer, 1989. – 750 p.
3. *Сєров М. І., Черніга Р. М.* Симетрії Лі та точні розв'язки нелінійних рівнянь теплопровідності з конвективним членом // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1262 – 1270.
4. *Cherniha R., Serov M.* Lie and non-Lie symmetries of nonlinear diffusion equations with convectid term // Proc. Second Int. Conf. "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (July 7 – 13, 1997, Kyiv). – Kyiv: Inst. Math. NAS Ukraine, 1997. – Vol. 2. – P. 444 – 449.
5. *Nikitin A. G., Barannyk T. A.* Solitary wave and other solutions for nonlinear heat equations / math-ph/0304004.
6. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.
7. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
8. *Levi D., Winternitz P.* Nonclassical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1989. – **22**. – P. 2915 – 2924.

Одержано 29.03.2004,
після доопрацювання — 31.03.2005