УДК 517.946.9

Ю. А. Митропольский, $\boxed{\textbf{А. А. Березовский}}$ (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
М. Х. Шхануков-Лафишев (Кабардино-Балкар. ун-т, Ин-т информатики и проблем регион. управления КБНЦ РАН, Нальчик, Россия)

СТАБИЛИЗАЦИЯ ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ В ЗАДАЧАХ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В СРЕДАХ С ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

By using the method of a priori estimates, we establish differential inequalities for energetic norms in $W^1_{2,r}$ of solutions of problems with a free bound in media with the fractal geometry for one-dimensional evolutionary equation. On the basis of these inequalities, we obtain estimates for the stabilization time T.

Методом апріорних оцінок встановлено диференціальні нерівності для енергетичних норм в $W^1_{2,r}$ розв'язків задач із вільними межами в середовищі з фрактальною геометрією для одновимірного еволюційного рівняння і на їх основі отримано оцінки для часу стабілізації T.

В последние годы для описания структуры неупорядоченных сред и протекающих в них процессов широко используется теория фракталов [1 – 4]. Возникающие при этом дифференциальные уравнения называются дифференциальными уравнениями в средах с фрактальной геометрией [2]. В частности, при решении ряда проблем экологии возникает необходимость исследования эволюционных задач со свободными границами для нелинейных уравнений в средах с фрактальной структурой. В дальнейшем будем рассматривать только одномерные задачи, когда искомая функция зависит от одной пространственной переменной. В этом случае для определения функций $u = u(x,t)$ и $s = s(t)$, $t > 0$, получаем следующую задачу со свободной границей для одномерного эволюционного уравнения:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{\alpha}\psi(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - f(u), \quad x_0 < x < s(t), \quad t > 0, \\
u(x,0) = u_0(x), \quad x_0 \le x \le s(0), \\
\psi(u)\frac{\partial u}{\partial x} = \gamma u, \quad x = x_0, \quad t \ge 0, \\
u = 0, \quad \psi(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x = s(t), \quad t \ge 0,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $\alpha = 0, 1, 2$ соответственно при плоской, цилиндрической и сферической симметрии; $x_0 = 0$ при $0 \le \alpha < 1$ и отлично от нуля при $1 \le \alpha < 2$, $s(t)$ — монотонно невозрастающая непрерывно дифференцируемая функция; $s'(t) \le 0$, $s(0) = b > 0$. В работе предполагается существование неотрицательного решения задачи (1). Только при этих условиях будет получена оценка для времени стабилизации.

Представляет интерес эволюция пространственно локализованного начального распределения $u(x,0) = u_0(x)$. В качестве $u_0(x)$ может быть принято точное решение соответствующей (1) стационарной задачи для $\psi(u) = u^{\sigma}$, $f(u) = u^{\beta}$, $\sigma \ge 0$, $0 \le \beta < 1$ [5].

1. Случай слабого вырождения. Положим в уравнении (1)

$$\psi(u) = u^{\sigma}, \quad 0 \le \alpha < 1, \qquad \gamma = 0.$$

Тогда получим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{\alpha}u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - f(u), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad 0 \le x \le s(0), \tag{3}$$

$$u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0, \quad t \ge 0, \tag{4}$$

$$u = 0, \quad u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad x = s(t), \quad t \ge 0. \tag{5}$$

Умножим дифференциальное уравнение (2) скалярно на $x^{\alpha}(u^{1+\sigma})_t$:

$$(u_t,\, x^{\alpha}(u^{1+\sigma})_t) - ((x^{\alpha}u^{\sigma}u_x)_x,\, (u^{1+\sigma})_t) + (f(u),\, x^{\alpha}(u^{1+\sigma})_t) = 0 \tag{6}$$

и преобразуем интегралы, входящие в тождество (6). Для первого интеграла получаем

$$(u_t,\, x^{\alpha}(u^{1+\sigma})_t) = (1+\sigma)\left\| x^{\alpha/2}u_t u^{\sigma/2}\right\|_0^2, \tag{7}$$

где $\|u\|_0^2 = (u,u)$, $(u,\vartheta)_t = \int_0^{s(t)} u\vartheta\, dx$. В дальнейшем в обозначении скалярного произведения t будем опускать. Интегрируя по частям с учетом граничных условий (4), (5) и предполагая, что $s'(t) = O(1)$, $t \ge 0$, второй интеграл преобразуем к виду

$$((x^{\alpha}u^{\sigma}u_x)_x,\, (u^{1+\sigma})_t) = -\frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{d}{dt}\left\| x^{\alpha/2}(u^{1+\sigma})_x\right\|_0^2. \tag{8}$$

Подставляя (7), (8) в тождество (6), получаем

$$(1+\sigma)\left\| x^{\alpha/2}u_t u^{\sigma/2}\right\|_0^2 + (f(u),\, x^{\alpha}(u^{1+\sigma})_t) + \frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{d}{dt}\left\| x^{\alpha/2}(u^{1+\sigma})_x\right\|_0^2 = 0. \tag{9}$$

Используя дифференциальное уравнение (2), приводим сумму первых двух слагаемых из тождества (9) к виду

$$(1+\sigma)\left\| x^{\alpha/2}u_t u^{\sigma/2}\right\|_0^2 + (f(u),\, x^{\alpha}(u^{1+\sigma})_t) =$$

$$= (1+\sigma)\left(\int_0^{s(t)} \frac{1}{x^{\alpha}}(x^{\alpha}u^{\sigma}u_x)_x^2 u^{\sigma}dx - \int_0^{s(t)} (x^{\alpha}u^{\sigma}u_x)_x f(u)u^{\sigma}dx\right). \tag{10}$$

Подставляя (10) в тождество (9), после интегрирования по частям в последнем интеграле находим

$$\frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{d}{dt}\left\| x^{\alpha/2}(u^{1+\sigma})_x\right\|_0^2 + \frac{1}{1+\sigma}\int_0^{s(t)} x^{\alpha}(u^{1+\sigma})_x^2 g(u)dx +$$

$$+ \frac{\sigma}{1+\sigma}\int_0^{s(t)} x^{\alpha}(u^{1+\sigma})_x^2 \frac{f(u)}{u}dx \le 0, \tag{11}$$

где $g(u) = f_u'(u)$.

Исходя из физического смысла, предполагаем, что $f(u)$ — неотрицательная монотонно возрастающая функция и $f(0) = 0$, а $g(u) \geq 0$ — монотонно убывающая функция. Интегралы, содержащиеся в (11), вообще говоря, несобственные, так как в силу граничных условий $x = s(t)$, $u = 0$, $f(u) = 0$, $g(u) = \infty$. Поэтому приведенные рассуждения справедливы в классе функций, где рассматриваемые интегралы конечны.

Из (11) следует неравенство

$$\frac{d}{dt}\left\| x^{\alpha/2}(u^{1+\sigma})_x \right\|_0^2 + 2\int_0^{s(t)} x^{\alpha}(u^{1+\sigma})_x^2 g(u)dx \leq 0. \tag{12}$$

Поскольку для любой непрерывно дифференцируемой по x на $[0, s(t)]$, $t > 0$, функции $u(x,t) \geq 0$, обращающейся в нуль на границе $x = s(t)$ $(u(s(t),t) = 0)$, выполняется неравенство

$$u(x,t) \leq \sqrt{\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\left\| x^{\alpha} u_x \right\|_0, \qquad b = s(0) = \max_{t\geq 0} s(t),$$

то

$$g(u) \geq g\left(\sqrt{\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\left\| x^{\alpha/2} u_x \right\|_0\right). \tag{13}$$

1.1. Пусть $\sigma = 0$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\left\| x^{\alpha/2} u_x \right\|_0^2 + 2\int_0^{s(t)} x^{\alpha} u_x^2 g(u)dx \leq 0. \tag{14}$$

С помощью (13) из неравенства (14) находим

$$\frac{d}{dt}\left\| x^{\alpha/2} u_x \right\|_0^2 + 2\int_0^{s(t)} x^{\alpha} u_x^2\, g\left(\sqrt{\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\left\| x^{\alpha/2} u_x \right\|_0\right)dx \leq 0,$$

или

$$\frac{dy}{dt} + 2g\left(\sqrt{\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}y}\right)y \leq 0, \qquad y = \left\| x^{\alpha/2} u_x \right\|_0^2,$$

откуда для времени стабилизации, т. е. того значения $t = T$, при котором $y(T) = 0$, получаем оценку

$$T \leq \frac{1}{2}\int_0^{y(0)} \frac{dy}{g\left(\sqrt{\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}y}\right)y} < \infty.$$

1.2. Пусть $\sigma > 0$, $f(u) = cu^{\beta}$, $c = \text{const} > 0$, $\beta > 0$. Тогда неравенство (12) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left\| x^{\alpha/2}(u^{1+\sigma})_x \right\|_0^2 + 2c(\sigma+\beta)\int_0^{s(t)} x^{\alpha}(u^{1+\sigma})_x^2 u^{\beta-1}dx \leq 0. \tag{15}$$

Поскольку

$$\int_0^{s(t)} x^{\alpha}(u^{1+\sigma})_x^2 \frac{1}{u^{1-\beta}}dx \geq \int_0^{s(t)} x^{\alpha}(u^{1+\sigma})_x^2 dx \cdot \left[\frac{1-\alpha}{b^{1-\alpha}}\frac{1}{\left\| x^{\alpha/2}(u^{1+\sigma})_x \right\|_0^2}\right]^{(1-\beta)/2(1+\sigma)},$$

из (15) находим

$$\frac{dy}{dt} + 2c(\sigma+\beta)y^k \le 0, \qquad k = \frac{1+\beta+2\sigma}{2(1+\sigma)}. \tag{16}$$

Из (16) для времени стабилизации T получаем оценку

$$T \le \frac{1}{2c(\sigma+\beta)}\int_0^{y(0)} \frac{dy}{y^k} < \infty, \quad k < 1, \quad \beta < 1, \quad y(t) = \left\| x^{\alpha/2} u_x \right\|_0^2.$$

2. Случай сильного вырождения. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^\alpha u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right) - f(u), \quad x_0 < x < s(t), \quad 0 < t < T, \tag{17}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x_0 \le x \le s(0), \tag{18}$$

$$u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_0} = 0, \quad 1 \le \alpha \le 2, \quad t > 0, \tag{19}$$

$$u = 0, \quad u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x = s(t), \quad t \ge 0. \tag{20}$$

Умножая дифференциальное уравнение (17) скалярно на $x^\alpha (u^{1+\sigma})_t$ и проводя преобразования, аналогичные изложенным выше, с учетом условий (18) – (20) получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\left\| x^{\alpha/2}(u^{1+\sigma})_x \right\|_0^2 + 2\int_{x_0}^{s(t)} x^\alpha (u^{1+\sigma})_x^2 g(u)\,dx \le 0. \tag{21}$$

2.1. Пусть $\sigma = 0$. Поскольку

$$u^2(x) \le \int_{x_0}^{s(t)} \frac{dx}{x^\alpha}\int_{x_0}^{s(t)} x^\alpha u_x^2\,dx \le M\left\| x^{\alpha/2} u_x \right\|_0^2,$$

где

$$M = \begin{cases} \ln\dfrac{b}{x_0} & \text{при} \quad \alpha = 1, \\ \dfrac{b^{1-\alpha}}{|1-\alpha|} & \text{при} \quad \alpha > 1, \end{cases}$$

из (21), учитывая свойства функции $g(u)$, для времени стабилизации получаем оценку

$$T \le \int_0^{y(0)} \frac{dy}{2g\left(\sqrt{My}\right)y} < \infty, \quad y(t) = \left\| x^{\alpha/2} u_x \right\|_0^2.$$

2.2. Пусть $\sigma > 0$, $f(u) = cu^\beta$, $c = \text{const} > 0$. Тогда неравенство (21) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left\| x^{\alpha/2}(u^{1+\sigma})_x \right\|_0^2 + 2c\beta\int_{x_0}^{s(t)} x^\alpha (u^{1+\sigma})_x^2 \frac{1}{u^{1-\beta}}\,dx \le 0. \tag{22}$$

Из неравенства (22) согласно изложенному выше алгоритму находим оценку для времени стабилизации

$$T \leq v \int_0^{y(0)} \frac{dy}{y^k} < \infty, \quad k < 1 \quad (\beta < 1),$$

где $k = \dfrac{1+\beta+2\sigma}{2(1+\sigma)}$, $v = \dfrac{1}{2c\beta}\left(\dfrac{b}{x_0^\alpha}\right)^{(1-\beta)/2(1+\sigma)}$.

1. *Динариев О. Ю.* Фильтрация в трещиноватой среде с фрактальной геометрией трещин // Механика жидкости и газа. – 1990. – С. 66–70.
2. *Мальшаков А. В.* Уравнение гидродинамики для пористых сред со структурой порового пространства, обладающего фрактальной геометрией // Инж.-физ. журн. – 1985. – **62**, № 3. – С. 405–410.
3. *Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д.* Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика // Успехи физ. наук. – 1985. – **146**, № 3. – С. 493–506.
4. *Нигматуллин Р. Р.* Решение обобщенного уравнения переноса в средах с фрактальной геометрией // Phys. status. solidi. – 1986. – **133**.
5. *Митропольский Ю. А., Березовский А. А., Шхануков-Лафишев М. Х.* Стабилизация за конечное время в задачах со свободными границами для некоторых классов нелинейных уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 2. – С. 214–223.

Получено 05.06.2001,
после доработки — 04.11.2002