УДК 517.5

А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ НАБЛИЖЕННЯ І ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ ЗГОРТОК ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВИСОКОЇ ГЛАДКОСТІ

We consider classes of 2π-periodic functions that are representable in terms of convolutions with fixed kernels $\Psi_{\bar\beta}$ whose Fourier coefficients tend to zero with the exponential rate. We compute exact values of the best approximations of these classes of functions in a uniform and an integral metrics. In some cases, the results obtained enable us to determine exact values of the Kolmogorov, Bernstein, and linear widths for the classes considered in the metrics of spaces C and L.

Обчислено точні значення найкращих наближень у рівномірній та інтегральній метриках класів 2π-періодичних функцій, що зображуються за допомогою згорток із фіксованими ядрами $\Psi_{\bar\beta}$, коефіцієнти Фур'є яких мають показникову швидкість спадання до нуля. Одержані результати дозволили у ряді ситуацій записати точні значення колмогоровських, бернштейнівських та лінійних поперечників для таких класів у метриках просторів C і L.

Нехай $L = L_1$ — простір 2π-періодичних сумовних на $[0, 2\pi]$ функцій φ з нормою

$$\|\varphi\|_L = \|\varphi\|_1 = \int_0^{2\pi} |\varphi(t)| dt,$$

L_∞ — простір вимірних і суттєво обмежених 2π-періодичних функцій φ із нормою

$$\|\varphi\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |\varphi(t)|,$$

C — простір неперервних 2π-періодичних функцій φ, у якому норма задається рівністю

$$\|\varphi\|_C = \max_t |\varphi(t)|.$$

У даній роботі будемо використовувати запроваджені О. І. Степанцем [1] класи $L^\psi_{\bar\beta}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset L$, 2π-періодичних функцій $f \in L$, які допускають зображення у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi_{\bar\beta}(t)dt = \frac{a_0}{2} + \left(f^\psi_{\bar\beta} * \Psi_{\bar\beta}\right)(x), \quad \varphi \in \mathfrak{N}, \tag{1}$$

де $\Psi_{\bar\beta}(t)$ — фіксоване сумовне ядро з рядом Фур'є

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right), \tag{2}$$

а a_0 — вільний член розкладу Фур'є функції $f(\cdot)$. При цьому покладають

$$C^\psi_{\bar\beta}\mathfrak{N} = C \cap L^\psi_{\bar\beta}\mathfrak{N}. \tag{3}$$

У випадку, коли $\beta_k \equiv \beta$, $k = 1, 2, \ldots$, множини $L^\psi_{\bar\beta}\mathfrak{N}$ і $C^\psi_{\bar\beta}\mathfrak{N}$ позначають через $L^\psi_\beta\mathfrak{N}$ і $C^\psi_\beta\mathfrak{N}$ відповідно.

Далі скрізь будемо вимагати, щоб справджувалась умова

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty, \quad \psi(k) > 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

яка забезпечує рівномірну збіжність ряду (2). У цьому випадку класи $L_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$ і $C_{\bar{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$ можна охарактеризувати як класи згорток вигляду (1), породжених твірними ядрами

$$\Psi_{\bar{\beta}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right), \quad \beta_k \in \mathbb{R}, \quad \psi(k) > 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

В якості $\mathfrak{N}$ у подальшому будемо використовувати множини

$$U_1^0 = \left\{\varphi \in L_1 : \|\varphi\|_1 \le 1, \ \varphi \perp 1\right\},$$

$$U_\infty^0 = \left\{\varphi \in L_\infty : \|\varphi\|_\infty \le 1, \ \varphi \perp 1\right\}.$$

При цьому для зручності покладемо

$$C_{\bar{\beta},\infty}^{\psi} = C_{\bar{\beta}}^{\psi} U_\infty^0, \quad C_{\beta,\infty}^{\psi} = C_{\beta}^{\psi} U_\infty^0, \quad L_{\bar{\beta},1}^{\psi} = L_{\bar{\beta}}^{\psi} U_1^0, \quad L_{\beta,1}^{\psi} = L_{\beta}^{\psi} U_1^0.$$

Найкраще наближення кожної окремої функції $f(t)$ за допомогою тригонометричних поліномів $T_{n-1}(t)$ порядку, не вищого за $n-1$, у метриках C і L будемо позначати відповідно через $E_n(f)_C$ і $E_n(f)_L$.

У п. 1 даної роботи розглядається задача про знаходження точних значень величин

$$E_n(C_{\bar{\beta},\infty}^{\psi})_C = \sup_{f \in C_{\bar{\beta},\infty}^{\psi}} E_n(f)_C = \sup_{f \in C_{\bar{\beta},\infty}^{\psi}} \inf_{T_{n-1}} \|f - T_{n-1}\|_C, \tag{6}$$

$$E_n(L_{\bar{\beta},1}^{\psi})_L = \sup_{f \in L_{\bar{\beta},1}^{\psi}} E_n(f)_L = \sup_{f \in L_{\bar{\beta},1}^{\psi}} \inf_{T_{n-1}} \|f - T_{n-1}\|_1, \tag{7}$$

які називають найкращими наближеннями на класах $C_{\bar{\beta},\infty}^{\psi}$ та $L_{\bar{\beta},1}^{\psi}$ у метриках C і L відповідно.

У п. 2 вивчається задача про точні значення колмогоровських поперечників $d_M(C_{\bar{\beta},\infty}^{\psi}, C)$ та $d_M(L_{\bar{\beta},1}^{\psi}, L)$ — величин, що означаються рівностями

$$d_M(C_{\bar{\beta},\infty}^{\psi}, C) = \inf_{F_M \subset C} \sup_{v \in C_{\bar{\beta},\infty}^{\psi}} \inf_{\xi \in F_M} \|v - \xi\|_C, \tag{8}$$

$$d_M(L_{\bar{\beta},1}^{\psi}, L) = \inf_{F_M \subset L} \sup_{v \in L_{\bar{\beta},1}^{\psi}} \inf_{\xi \in F_M} \|v - \xi\|_1, \tag{9}$$

у яких зовнішній інфімум розглядається по усіх можливих лінійних підпросторах F_M просторів C або L відповідно, розмірність яких не перевищує M ($\dim F_M \le M$, $M \in \mathbb{N}$).

У п. 3 вказано в явному вигляді (через коефіцієнти Фур'є твірного ядра $\Psi_{\bar{\beta}}$) найкращий лінійний метод наближення класів $C_{\bar{\beta},\infty}^{\psi}$ ($L_{\bar{\beta},1}^{\psi}$) у метриці простору

$C(L)$, а також у деяких випадках знайдено точні значення лінійних і бернштейнівських поперечників вказаних класів функцій.

1. Найкращі наближення на класах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ і $L^{\psi}_{\beta,1}$ у рівномірній та інтегральній метриках. У рівномірній метриці задача про одержання точних значень найкращих наближень на класах W^r_∞, $r \in \mathbb{N}$, які можна розглядати як класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, що породжені відомими ядрами Бернуллі

$$B_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - r\pi/2)}{k^r}, \quad r \in \mathbb{N},$$

розв'язана у 1936 р. Ж. Фаваром [2, 3]. Ці дослідження були продовжені Н. І. Ахієзером та М. Г. Крейном [4], Б. Надем [5], С. М. Нікольським [6], В. К. Дзядиком [7 – 9], С. Б. Стєчкіним [10, 11] та Сунь Юн-шеном [12 – 14]. Остаточні результати по розв'язанню задачі про знаходження точних значень величин (6) і (7) у випадку $\psi(k) = k^{-r}$ при довільних $r > 0$ і $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, належать В. К. Дзядику [9]. У випадку $\psi(k) = q^k$, $0 < q < 1$, тобто коли функціональні класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ та $L^{\psi}_{\beta,1}$ породжуються ядрами Пуассона $P_{q,\beta}(t)$ вигляду

$$P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad 0 < q < 1, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

точні значення величин (6) і (7) були обчислені М. Г. Крейном [15], С. М. Нікольським [6] (метрики C і L відповідно, $\beta \in \mathbb{Z}$), А. В. Бушанським [16], В. Т. Шевалдіним [17] $(\beta \in \mathbb{R})$. У випадку, коли класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ та $L^{\psi}_{\beta,1}$ породжуються парними ядрами $\Psi_0(t)$ вигляду

$$\Psi_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos kt, \qquad \psi(k) > 0,$$

коефіцієнти $\psi(k)$ яких тричі монотонно прямують до нуля, тобто

$$\lim_{k \to \infty} \psi(k) = 0, \qquad \Delta\psi(k) \overset{\text{df}}{=} \psi(k) - \psi(k+1) \geq 0,$$

$$\Delta^2\psi(k) = \Delta(\Delta\psi(k)) \geq 0, \qquad \Delta^3\psi(k) = \Delta(\Delta^2\psi(k)) \geq 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

або непарними ядрами $\Psi_1(t)$ вигляду

$$\Psi_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \sin kt, \qquad \psi(k) > 0,$$

коефіцієнти $\psi(k)$ яких задовольняють умови

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} < \infty, \qquad \Delta\psi(k) \geq 0, \qquad \Delta^2\psi(k) \geq 0,$$

точні значення величин $E_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C$ були знайдені Б. Надем [5], а величин $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_L$ — С. М. Нікольським [6]. Величини (6) і (7) були обчислені також у деяких інших випадках (див., зокрема, [18 – 21]).

Зазначимо, що всі відомі до цього часу точні значення величин (6) і (7) були одержані для класів, породжених ядрами, що задовольняють умову Нікольського A_n^* або навіть більш жорстку, ніж A_n^*, умову Надя N_n^*.

Означення 1. *Говорять, що сумовна* 2π*-періодична функція* $K(t)$, *яка тотожно не дорівнює нулю, задовольняє умову* A_n^*, $n \in \mathbb{N}$ $(K \in A_n^*)$, *якщо існують тригонометричний поліном* T_{n-1}^* *порядку* $n-1$ *і додатне число* $\lambda \leq \pi/n$ *таке, що для функції* $\varphi_*(t) = \operatorname{sign}(K(t) - T_{n-1}^*(t))$ *майже при усіх* t *виконується рівність* $\varphi_*(t+\lambda) = -\varphi_*(t)$.

Означення 2. *Говорять, що сумовна* 2π*-періодична функція* $K(t)$, *яка тотожно не дорівнює нулю, задовольняє умову* N_n^*, $n \in \mathbb{N}$ $(K \in N_n^*)$, *якщо існують тригонометричний поліном* T_{n-1}^* *порядку* $n-1$ *і точка* $\xi \in [0, \pi/n)$ *такі, що різниця* $K(t) - T_{n-1}^*(t)$ *змінює знак на* $[0, 2\pi)$ *у точках* $t_k = \xi + k\pi/n$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$, *і тільки в них.*

Із означень 1 і 2 безпосередньо випливає вкладення $N_n^* \subset A_n^*$, $n = 1, 2, \ldots$. С. М. Нікольським [6, с. 228] було доведено, що включення $\Psi_{\bar\beta} \in A_n^*$ забезпечує виконання рівностей

$$E_n(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty})_C = \sup_{\substack{f \in C^{\psi}_{\bar\beta,\infty} \\ f \perp T_{n-1}}} \|f\|_C = E_n(L^{\psi}_{\bar\beta,1})_C =$$

$$= \sup_{\substack{f \in L^{\psi}_{\bar\beta,1} \\ f \perp T_{n-1}}} \|f\|_1 = \frac{1}{\pi} E_n(\Psi_{\bar\beta})_L, \tag{10}$$

де $f \perp T_{n-1}$ означає, що

$$\int_0^{2\pi} f(t) \begin{matrix} \sin kt \\ \cos kt \end{matrix}\, dt = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Цей факт, зокрема, дозволив відомі результати по найкращому наближенню на класах згорток у метриці C переносити на випадок, коли наближення розглядається у метриці L.

У даному пункті встановлено деякі нові достатні умови, що забезпечують належність ядер $\Psi_{\bar\beta}$ вигляду (5) до множини N_n^* (а отже, і до A_n^*), і на цій основі отримано точні значення величин найкращих наближень на класах згорток із ядрами, коефіцієнти $\psi(k)$ яких прямують до нуля приблизно як члени геометричної прогресії.

Основним у роботі є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай послідовності* $\psi(k) > 0$ *і* $\beta_k \in \mathbb{R}$ *ядра* $\Psi_{\bar\beta}(t)$ *вигляду* (5), *яке породжує класи* $C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}$ і $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$, *такі, що при заданому* $n \in \mathbb{N}$ *знайдеться число* $\rho \in (0, 1)$, *для якого*

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} < \rho, \qquad k = n, n+1, n+2, \ldots, \tag{11}$$

і

$$\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\psi(n+j)}{\psi(n)} \cos\left(jt + \frac{(\beta_n - \beta_{n+j})\pi}{2}\right) > \frac{\rho^{2n}(1+3\rho)}{2\sqrt{1-2\rho^{2n}}\,(1-\rho)}. \tag{12}$$

Тоді для вказаного $n \in \mathbb{N}$ *має місце включення* $\Psi_{\bar\beta} \in N_n^*$ *та виконуються рівності*

$$E_n(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty})_C = E_n(L^{\psi}_{\bar\beta,1})_L = \frac{1}{\pi} E_n(\Psi_{\bar\beta})_L = \left\| \Psi_{\bar\beta} * \operatorname{sign} \sin n(\cdot) \right\|_C =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\psi((2\nu+1)n)}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n \pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n}\pi}{2} \right) \right|, \tag{13}$$

де $\theta_n = \theta_n(\psi, \bar\beta) \in [0, 1)$ *і* θ_n *є коренем рівняння*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \psi((2\nu+1)n) \cos\left((2\nu+1)\theta_n \pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n}\pi}{2} \right) = 0. \tag{14}$$

Доведення. Покажемо спочатку, що виконання умов (11), (12) на коефіцієнти $\psi(k)$ ядра $\Psi_{\bar\beta}$ вигляду (5) забезпечує включення $\Psi_{\bar\beta} \in N_n^*$. Для цього розглянемо сукупність точок

$$\frac{\theta_n \pi}{n}, \quad \frac{\theta_n \pi + \pi}{n}, \quad \frac{\theta_n \pi + 2\pi}{n}, \ \ldots, \ \frac{\theta_n \pi + (2n-2)\pi}{n}, \tag{15}$$

де θ_n ($\theta_n \in [0, 1)$) — корінь рівняння (14) (єдиність точки θ_n буде доведено пізніше). Позначимо через $T^*_{n-1}(t)$ тригонометричний поліном порядку $n-1$, що інтерполює функцію $\Psi_{\bar\beta}(t)$ в точках вигляду (15). Такий поліном існує і є єдиним у множині $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів $T_{n-1}(t)$ порядку, не вищого за $n-1$. Крім того, поліном $T^*_{n-1}(t)$ інтерполює функцію $\Psi_{\bar\beta}(t)$ і у точці $(\theta_n \pi + (2n-1)\pi)/n$. Цей факт ґрунтується на наступному твердженні, що належить М. Г. Крейну [15].

Лема 1. *Нехай* $K(t)$ — *сумовна функція з періодом* 2π, λ — *довільне дійсне число, а* $T_{n-1}(t)$ — *тригонометричний поліном порядку, не вищого за* $n-1$, *що інтерполює* $K(t)$ *у точках*

$$\lambda\pi, \quad \left(\lambda + \frac{1}{n}\right)\pi, \ \ldots, \ \left(\lambda + \frac{2n-2}{n}\right)\pi.$$

Тоді для того, щоб різниця $K(t) - T_{n-1}(t)$ *перетворювалась у нуль і у точці* $(\lambda + (2n-1)/n)\pi$, *необхідно і достатньо, щоб справджувалась рівність*

$$\sum_{\nu=0}^{2n-1} (-1)^{\nu} K\left(\lambda\pi + \frac{\nu\pi}{n} \right) = 0.$$

Розглянемо суму

$$G(t) = \sum_{\nu=0}^{2n-1} (-1)^{\nu} \Psi_{\bar\beta}\left(t + \frac{\nu\pi}{n} \right).$$

Використовуючи рівності

$$\sum_{\nu=0}^{2n-1} (-1)^{\nu} e^{ik(\nu\pi/n + t/n)} =$$

$$= \frac{e^{ikt/n}(1 - e^{i2k\pi})}{1 + e^{ik\pi/n}} = \begin{cases} 0, & k \neq (2j+1)n, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \\ 2ne^{i(2j+1)t}, & k = (2j+1)n, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

де k і n — довільні натуральні числа, одержуємо

$$G(t) = 2n\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi((2\nu+1)n)\cos\left((2\nu+1)nt - \frac{\beta_{(2\nu+1)n}\pi}{2}\right),$$

а отже, з урахуванням рівності (14) маємо

$$G\left(\frac{\theta_n\pi}{n}\right) = 2n\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi((2\nu+1)n)\cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n}\pi}{2}\right) = 0. \tag{16}$$

Застосовуючи лему 1 у випадку, коли $K(t) = \Psi_{\bar\beta}(t)$, $\lambda = \theta_n/n$, отримуємо

$$\Psi_{\bar\beta}\left(\frac{\theta_n\pi + (2n-1)\pi}{n}\right) = T^*_{n-1}\left(\frac{\theta_n\pi + (2n-1)\pi}{n}\right).$$

Отже, різниця $\Psi_{\bar\beta}(t) - T^*_{n-1}(t)$ має на періоді $2n$ нулів. Подальша наша задача — показати, що їх на періоді не більше. Для цього різницю $\Psi_{\bar\beta}(t) - T^*_{n-1}(t)$ подамо у зручному для дослідження вигляді, аналогічно тому, як це зроблено у [7, 13, 21].

Покладемо $u = t - \theta_n\pi/n$. Тоді

$$\Psi_{\bar\beta}(t) = \Psi_{\bar\beta}\left(u + \frac{\theta_n\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(ku + \frac{k\theta_n\pi}{n} - \frac{\beta_k\pi}{2}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos ku + \sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin ku, \tag{17}$$

де

$$a_k = \psi(k)\cos\left(\frac{k\theta_n\pi}{n} - \frac{\beta_k\pi}{2}\right), \quad b_k = -\psi(k)\sin\left(\frac{k\theta_n\pi}{n} - \frac{\beta_k\pi}{2}\right).$$

Нехай $T^{(1)}_{n-1}(u)$ і $T^{(2)}_{n-1}(u)$ — тригонометричні поліноми порядку $n-1$, що інтерполюють функції $\sum_{k=n}^{\infty}a_k\cos ku$ та $\sum_{k=n}^{\infty}b_k\sin ku$ відповідно у нулях функції $\sin nu$. Використавши співвідношення [7, с. 137]

$$\sin nt\left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cos kt\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}(\alpha_{n-j} - \alpha_{n+j})\sin jt +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=n}^{\infty}(\alpha_{j-n} - \alpha_{j+n})\sin jt, \tag{18}$$

$$\sin nt\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\sin kt = \frac{1}{2}\left(\gamma_n + \sum_{j=1}^{n-1}(\gamma_{n-j} + \gamma_{n+j})\cos jt\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=n}^{\infty}(\gamma_{j+n} - \gamma_{j-n})\cos jt, \tag{19}$$

які мають місце при довільних α_k і γ_k, що прямують до нуля при $k \to \infty$ у кожній точці t, у якій збігаються ряди $\alpha_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cos kt$ та $\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\sin kt$, можна показати, що

$$\sum_{j=n}^{\infty} b_j \sin ju - T_{n-1}^{(2)}(u) =$$

$$= \sum_{j=n}^{\infty} b_j \sin ju + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} (b_{2n\nu-j} - b_{2n\nu+j}) \right\} \sin ju =$$

$$= 2\sin nu \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{(2\nu-1)n+j} \right\} \cos ju + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{(2\nu-1)n} \right) \tag{20}$$

та

$$\sum_{j=n}^{\infty} a_j \cos ju - T_{n-1}^{(1)}(u) =$$

$$= \sum_{j=n}^{\infty} a_j \cos ju - \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{2n\nu} + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{2n\nu-j} + a_{2n\nu+j}) \right\} \cos ju \right) =$$

$$= 2\sin nu \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ -\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{(2\nu-1)n+j} \right\} \sin ju. \tag{21}$$

Для того щоб переконатись у справедливості (20), досить покласти у формулі (18) $\alpha_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{(2\nu-1)n+k}$. Аналогічно, щоб перевірити рівність (21), досить у формулі (19) покласти $\gamma_k = -\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{(2\nu-1)n+k}$.

Об'єднуючи (20) і (21), маємо

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k \cos ku + \sum_{k=n}^{\infty} b_k \sin ku - (T_{n-1}^{(1)}(u) + T_{n-1}^{(2)}(u)) =$$

$$= -2\sin nu \left(\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi((2\nu+1)n) \sin\left((2\nu+1)\theta_n \pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n}\pi}{2} \right) + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi((2\nu+1)n+j) \sin\left((2\nu+1)\theta_n \pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n+j}\pi}{2} + j\frac{\theta_n \pi}{n} \right) \cos ju +$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi((2\nu+1)n+j) \cos\left((2\nu+1)\theta_n \pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n+j}\pi}{2} + j\frac{\theta_n \pi}{n} \right) \sin ju \right) =$$

$$= -2\sin nu \left(\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi((2\nu+1)n) \sin\left((2\nu+1)\theta_n \pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n}\pi}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi((2\nu+1)n+j) \sin\left((2\nu+1)\theta_n \pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n+j}\pi}{2} + j\left(u + \frac{\theta_n \pi}{n} \right) \right) \right) =$$

$$= -2\sin nu \left(\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi((2\nu+1)n) \sin\left((2\nu+1)\theta_n \pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n}\pi}{2} \right) + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi((2\nu+1)n+j) \sin\left((2\nu+1)\theta_n \pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n+j}\pi}{2} \right) \cos jt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi((2\nu+1)n+j)\cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n+j}\pi}{2}\right)\sin jt \Bigg) =$$

$$= -2\sin nu\, W_n(t), \tag{22}$$

де

$$W_n(t) = \frac{c_0^{(n)}}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (c_j^{(n)}\cos jt + d_j^{(n)}\sin jt), \tag{23}$$

$$c_j^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi((2\nu+1)n+j)\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n+j}\pi}{2}\right), \tag{24}$$

$$d_j^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi((2\nu+1)n+j)\cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n+j}\pi}{2}\right). \tag{25}$$

Із рівностей (17) і (22) одержуємо зображення

$$T_{n-1}^*(t) = T_{n-1}^{(1)}\left(t - \frac{\theta_n\pi}{n}\right) + T_{n-1}^{(2)}\left(t - \frac{\theta_n\pi}{n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta_k\pi}{2}\right),$$

а отже, і рівність

$$\Psi_{\bar\beta}(t) - T_{n-1}^*(t) = -2\sin n\left(t - \frac{\theta_n\pi}{n}\right)W_n(t). \tag{26}$$

Із формули (26) видно, що доведення нерівності

$$W_n(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in [0, 2\pi] \tag{27}$$

дозволить стверджувати, що різниця $\Psi_{\bar\beta}(t) - T_{n-1}^*(t)$ дорівнює нулю тільки в нулях функції $\sin(nt - \theta_n\pi)$. Покажемо, що при виконанні умов (11), (12) нерівність (27) дійсно має місце.

Подаючи коефіцієнти $c_j^{(n)}$ і $d_j^{(n)}$, що задаються формулами (24) і (25), у вигляді

$$c_j^{(n)} = \psi(n+j)\sin\left(\theta_n\pi - \frac{\beta_{n+j}\pi}{2}\right) + r_{n,j}^{(1)}, \tag{28}$$

$$d_j^{(n)} = \psi(n+j)\cos\left(\theta_n\pi - \frac{\beta_{n+j}\pi}{2}\right) + r_{n,j}^{(2)}, \tag{29}$$

де

$$r_{n,j}^{(1)} \overset{\text{df}}{=} \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi((2\nu+1)n+j)\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n+j}\pi}{2}\right), \tag{30}$$

$$r_{n,j}^{(2)} \overset{\text{df}}{=} \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi((2\nu+1)n+j)\cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n+j}\pi}{2}\right), \tag{31}$$

переписуємо рівність (23) таким чином:

$$W_n(t) = \frac{1}{2}\psi(n)\sin\left(\theta_n\pi - \frac{\beta_n\pi}{2}\right) + \sum_{j=1}^{\infty}\psi(n+j)\sin\left(\theta_n\pi - \frac{\beta_{n+j}\pi}{2} + jt\right) +$$

$$+\ \frac{r_{n,0}^{(1)}}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(r_{n,j}^{(1)}\cos jt + r_{n,j}^{(2)}\sin jt\right) =$$

$$= \sin\left(\theta_n\pi - \frac{\beta_n\pi}{2}\right)\left(\frac{\psi(n)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\psi(n+j)\cos\left(jt + \frac{(\beta_n - \beta_{n+j})\pi}{2}\right)\right) + R_n(t), \quad (32)$$

де

$$R_n(t) \overset{\text{df}}{=} \cos\left(\theta_n\pi - \frac{\beta_n\pi}{2}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\psi(n+j)\sin\left(jt + \frac{(\beta_n - \beta_{n+j})\pi}{2}\right) +$$

$$+\ \frac{r_{n,0}^{(1)}}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(r_{n,j}^{(1)}\cos jt + r_{n,j}^{(2)}\sin jt\right). \quad (33)$$

На підставі умови (11)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\psi((2\nu+1)n+j) \le \psi(3n+j)\sum_{\nu=0}^{\infty}\rho^{2n\nu} \le \psi(n+j)\frac{\rho^{2n}}{1-\rho^{2n}}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \quad (34)$$

звідки, виходячи із (30), (31) та (14), одержуємо співвідношення

$$\left|r_{n,0}^{(1)}\right| \le \sum_{\nu=1}^{\infty}\psi((2\nu+1)n) \le \psi(n)\frac{\rho^{2n}}{1-\rho^{2n}}, \quad (35)$$

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(r_{n,j}^{(1)}\cos jt + r_{n,j}^{(2)}\sin jt\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\psi((2\nu+1)n+j)\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n+j}\pi}{2} + jt\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\psi((2\nu+1)n+j) \le \frac{\rho^{2n}}{1-\rho^{2n}}\sum_{j=1}^{\infty}\psi(n+j) \le$$

$$\le \frac{\rho}{1-\rho}\frac{\rho^{2n}}{1-\rho^{2n}}\psi(n), \quad (36)$$

$$\left|\cos\left(\theta_n\pi - \frac{\beta_n\pi}{2}\right)\right| = \left|\frac{1}{\psi(n)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\psi((2\nu+1)n)\cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n}\pi}{2}\right)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\psi(n)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\psi((2\nu+1)n) \le \frac{\rho^{2n}}{1-\rho^{2n}}. \quad (37)$$

Об'єднуючи нерівності (35) – (37), отримуємо оцінки

$$|R_n(t)| \le \frac{\rho^{2n}}{1-\rho^{2n}}\sum_{j=1}^{\infty}\psi(n+j) + \psi(n)\frac{\rho^{2n}}{1-\rho^{2n}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\rho}{1-\rho}\right) \le$$

$$\le \psi(n)\frac{1+3\rho}{2(1-\rho)}\frac{\rho^{2n}}{1-\rho^{2n}}. \quad (38)$$

Якщо параметри ρ і n такі, що

$$\rho^{2n} < \frac{1}{2} \tag{39}$$

$\Bigg($ оскільки $\rho \in (0, 1)$, то нерівність (39) справджується для усіх номерів n, починаючи з номера $n_0 = \left[\frac{\ln\sqrt{2}}{\ln 1/\rho}\right] + 1$, де $[a]$ — ціла частина числа a $\Bigg)$, то на підставі (37)

$$\left|\sin\left(\theta_n\pi - \frac{\beta_n\pi}{2}\right)\right| \geq \sqrt{1 - \frac{\rho^{4n}}{(1-\rho^{2n})^2}} = \frac{\sqrt{1-2\rho^{2n}}}{1-\rho^{2n}}. \tag{40}$$

Умова (39) є наслідком умови (12), тому виходячи з нерівностей (12), (38) і (40), одержуємо

$$\left|\sin\left(\theta_n\pi - \frac{\beta_n\pi}{2}\right)\left(\frac{\psi(n)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\psi(n+j)\cos\left(jt + \frac{(\beta_n - \beta_{n+j})\pi}{2}\right)\right)\right| >$$

$$> \psi(n)\frac{1+3\rho}{2(1-\rho)}\frac{\rho^{2n}}{1-\rho^{2n}} \geq |R_n(t)|. \tag{41}$$

Співставляючи формули (32) і (41), бачимо, що

$$\operatorname{sign} W_n(t) = \operatorname{sign}\sin\left(\theta_n\pi - \frac{\beta_n\pi}{2}\right) \quad \forall\, t \in [0, 2\pi]. \tag{42}$$

Із (40) і (42) випливає нерівність (27).

Отже, як випливає із (26) і (27), різниця $\Psi_{\bar\beta}(t) - T^*_{n-1}(t)$ змінює знак у точках, які є нулями функції $\sin(nt - \theta_n\pi)$ (і тільки у цих точках). На підставі теореми Маркова [22, с. 96] серед всеможливих поліномів $T_{n-1}(t)$ порядку $n-1$ поліном $T^*_{n-1}(t)$ є поліномом найкращого наближення ядра $\Psi_{\bar\beta}(t)$ у метриці L. Функція $\Psi_{\bar\beta}(t)$ є неперервною функцією, тому, згідно з теоремою Джексона [22, с. 89], при заданому порядку $n-1$ поліном $T^*_{n-1}(t)$ її найкращого наближення у метриці L є єдиним. Це означає, що інших точок $\theta_n \in [0, 1)$, які б задовольняли рівняння (14), бути не може.

Із викладеного випливають включення $\Psi_{\bar\beta} \in N^*_n \subset A^*_n$ для будь-якого натурального n, що задовольняє умови (11), (12). Тому для вказаного n мають місце формули (10). Далі, на підставі рівності

$$\operatorname{sign}\left(\Psi_{\bar\beta}(t) - T^*_{n-1}(t)\right) = \varepsilon_0 \operatorname{sign}\sin(nt - \theta_n\pi), \quad \varepsilon_0 = \pm 1,$$

одержуємо

$$E_n(\Psi_{\bar\beta})_L = \left\|\Psi_{\bar\beta}(t) - T^*_{n-1}(t)\right\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\Psi_{\bar\beta}(t) - T^*_{n-1}(t)\right| dt =$$

$$= \left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(\Psi_{\bar\beta}(t) - T^*_{n-1}(t)\right)\operatorname{sign}\sin(nt - \theta_n\pi)\,dt\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_{\bar\beta}(t)\operatorname{sign}\sin(nt - \theta_n\pi)\,dt\right|. \tag{43}$$

Розкладаючи функції $\Psi_{\bar\beta}(t)$ та $\operatorname{sign}\sin(nt - \theta_n\pi)$ у ряди Фур'є

$$\Psi_{\bar\beta}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi(k)\cos(kt - \beta_k \pi/2),$$

$$\operatorname{sign}\sin(nt - \theta_n\pi) = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin((2\nu+1)(nt-\theta_n\pi))}{2\nu+1}$$

і застосовуючи узагальнену рівність Парсеваля, із (43) отримуємо

$$E_n(\Psi_{\bar\beta})_L = 4\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\psi((2\nu+1)n)}{2\nu+1}\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n}\pi}{2}\right)\right|. \qquad (44)$$

Поєднання рівностей (44) і (10) дозволяє записати (13).

Теорему доведено.

Наведемо декілька наслідків із теореми 1.

Теорема 2. *Нехай послідовність* $\psi(k)$ *ядра* $\Psi_{\bar\beta}$ *вигляду* (5) *задовольняє умову*

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} < \rho, \qquad \rho \in \left(0, \frac{1}{3}\right), \qquad k = n_0, n_0+1, \ldots, \quad n_0 \in \mathbb{N}. \qquad (11')$$

Тоді знайдеться номер n_1, $n_1 \geq n_0$, *такий, що, якою б не була послідовність* $\beta_k \in \mathbb{R}$, *справджується включення*

$$\Psi_{\bar\beta} \in N_n^*, \quad n = n_1, n_1+1, \ldots,$$

і виконуються рівності (13).

Доведення. Покажемо, що при виконанні умови (11′) існує номер n_1, $n_1 \geq n_0$, такий, що має місце нерівність (12) при $n = n_1, n_1+1, \ldots$. Дійсно, оскільки на підставі (11′)

$$\frac{\psi(n+j)}{\psi(n)} = \prod_{i=0}^{j-1} \frac{\psi(n+i+1)}{\psi(n+i)} < \rho^j, \quad n = n_0, n_0+1, \ldots,$$

то, якою б не була послідовність $\beta_k \in \mathbb{R}$, виконуються співвідношення

$$\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\psi(n+j)}{\psi(n)}\cos\left(jt + \frac{(\beta_n - \beta_{n+j})\pi}{2}\right) \geq \frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\psi(n+j)}{\psi(n)} > \frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{\infty}\rho^j =$$

$$= \frac{1-3\rho}{2(1-\rho)}, \quad n = n_0, n_0+1, \ldots. \qquad (45)$$

Оскільки послідовність $\delta_n = \dfrac{\rho^{2n}}{\sqrt{1-2\rho^{2n}}}$ монотонно спадає до нуля, то знайдеться номер $n_1 \geq n_0$ такий, що

$$\frac{1-3\rho}{1+3\rho} \geq \frac{\rho^{2n}}{\sqrt{1-2\rho^{2n}}}, \quad n = n_1, n_1+1, \ldots. \qquad (46)$$

Об'єднавши формули (45) і (46), одержимо (12). Тоді на підставі теореми 1 для будь-якого $n \geq n_1$ виконується включення $\Psi_{\bar\beta} \in N_n^*$ і мають місце рівності (13).

Теорему доведено.

Виникає природне запитання: чи матиме місце теорема 2 при $\rho \in (1/3, 1)$? Виявляється, що такого роду твердження не має місця навіть у випадку, коли $\psi(k) = q^k$, $q \in (1/3, 1)$.

Твердження 1. *Для довільного* $1/3 < q < 1$ *існує номер* n_0 *такий, що при кожному* $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$, *знайдеться послідовність* $\bar{\beta} = \beta_k$, $k \in \mathbb{N}$, *дійсних чисел, для якої* $P_{q,\bar{\beta}}(t) \notin N_n^*$.

Доведення проведемо методом від супротивного. Виберемо довільне $1/3 < q < 1$ і припустимо, що для довільного $n_0 \in \mathbb{N}$ існує номер $n > n_0$ такий, що $P_{q,\bar{\beta}}(t) \in N_n^*$ для будь-якої послідовності $\bar{\beta} = \beta_k$ дійсних чисел. Тобто для ядра $P_{q,\bar{\beta}}(t)$ існують поліном $T_{n-1}^*(t)$ порядку $n-1$ і точка $\xi \in [0, \pi/n)$ такі, що різниця $P_{q,\bar{\beta}}(t) - T_{n-1}^*(t)$ змінює знак на $[0, 2\pi)$ у точках

$$t_k = \xi + \frac{k\pi}{n}, \qquad k = \overline{0, 2n-1}, \tag{47}$$

і тільки в них. Згідно з лемою 1, проінтерполювати ядро $P_{q,\bar{\beta}}(t)$ в усіх точках t_k вигляду (47) можна лише за умови виконання рівності

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k P_{q,\bar{\beta}}\left(\xi + \frac{k\pi}{n}\right) = 0,$$

а отже, з урахуванням (16), і рівності

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{(2\nu+1)n} \cos\left((2\nu+1)n\xi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n}\pi}{2}\right) = 0. \tag{48}$$

Із формул (26) і (32) при $\psi(k) = q^k$, $\theta_n = n\xi/\pi$, $\rho = q$ випливає, що різницю $P_{q,\bar{\beta}}(t) - T_{n-1}^*(t)$ можна записати у вигляді

$$P_{q,\bar{\beta}}(t) - T_{n-1}^*(t) = -2\sin n(t-\xi) W_n(t), \tag{49}$$

де

$$W_n(t) = q^n \sin\left(n\xi - \frac{\beta_n\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} q^j \cos\left(jt + \frac{(\beta_n - \beta_{n+j})\pi}{2}\right)\right) + R_n(t), \tag{50}$$

$$R_n(t) = q^n \cos\left(n\xi - \frac{\beta_n\pi}{2}\right)\sum_{j=1}^{\infty} q^j \sin\left(jt + \frac{(\beta_n - \beta_{n+j})\pi}{2}\right) +$$
$$+ \frac{r_{n,0}^{(1)}}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(r_{n,j}^{(1)} \cos jt + r_{n,j}^{(2)} \sin jt\right), \tag{51}$$

$$r_{n,j}^{(1)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{(2\nu+1)n+j} \sin\left((2\nu+1)\xi n - \frac{\beta_{(2\nu+1)n+j}\pi}{2}\right),$$

$$r_{n,j}^{(2)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{(2\nu+1)n+j} \cos\left((2\nu+1)\xi n - \frac{\beta_{(2\nu+1)n+j}\pi}{2}\right),$$

а $\xi \in [0, \pi/n)$ — корінь рівняння (48). Внаслідок (47) і включення $P_{q,\bar\beta}(t) \in N_n^*$ функція $W_n(t)$ не повинна мати жодної точки зміни знаку на $[0, 2\pi)$, якою б не була послідовність β_k. Ми прийдемо до суперечності, якщо покажемо, що існує послідовність β_k, для якої функція $W_n(t)$ змінює знак на $[0, 2\pi)$.

Нехай n_0 — найменше натуральне число, для якого справджується нерівність

$$\min\left\{\frac{1-q}{1+q}, \frac{3q-1}{3q+1}\right\} > \frac{q^{2n_0}}{\sqrt{1-2q^{2n_0}}},$$

і $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$. В якості $\bar\beta = \beta_k$, $k \in \mathbb{N}$, розглянемо послідовність

$$\beta_k = \begin{cases} 0, & k \in \mathbb{N} \setminus \{n\}, \\ 2, & k = n. \end{cases}$$

У цьому випадку з урахуванням оцінок (38), (40) і (50)

$$W_n(t) = -q^n \sin n\xi \left(\frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{\infty} q^j \cos jt\right) + R_n(t), \tag{52}$$

де

$$|R_n(t)| \le q^n \frac{(1+3q)q^{2n}}{2(1-q)(1-q^{2n})}, \tag{38$'$}$$

$$\left|\sin\left(n\xi - \frac{\beta_n \pi}{2}\right)\right| \ge \frac{\sqrt{1-2q^{2n}}}{1-q^{2n}}. \tag{40$'$}$$

Функція $W_n(t)$ набуває в точках 0 і π значень, протилежних за знаком і відмінних від 0. Дійсно, на підставі (50)

$$W_n(0) = -q^n \sin n\xi \frac{1-3q}{2(1-q)} + R_n(0),$$

$$W_n(\pi) = -q^n \sin n\xi \frac{1+3q}{2(1+q)} + R_n(\pi)$$

і з урахуванням (51), (38$'$) та (40$'$)

$$q_n|\sin n\xi|\frac{3q-1}{2(1-q)} > q^n \frac{(1+3q)q^{2n}}{2(1-q)(1-q^{2n})} \ge |R_n(0)|,$$

$$q_n|\sin n\xi|\frac{3q+1}{2(1+q)} > q^n \frac{(1+3q)q^{2n}}{2(1-q)(1-q^{2n})} \ge |R_n(\pi)|.$$

Це означає, що $|W_n(0)| > 0$, $|W_n(\pi)| > 0$ і

$$\operatorname{sign} W_n(0) = -\operatorname{sign} W_n(\pi).$$

Внаслідок неперервності і 2π-періодичності функція $W_n(t)$ має принаймні 2 точки зміни знаку на $[0, 2\pi)$. Одержана суперечність доводить справедливість твердження 1.

Із доведення теореми 2 випливає, що номер n_1, який фігурує у її формулюванні, безпосередньо визначається нерівністю (46). Якщо число ρ_* вибране з умови

$$\frac{1-3\rho_*}{1+3\rho_*} = \frac{\rho_*^2}{\sqrt{1-2\rho_*^2}}, \quad \rho_* \in \left(0, \frac{1}{3}\right), \tag{53}$$

то для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ і $\rho \in (0, \rho_*]$ виконуватимуться нерівності (46). Нехай послідовність $\psi(k) > 0$ підпорядкована умові

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} < \rho_*, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{54}$$

тоді при будь-якому $0 < \rho \le \rho_*$ справджуватимуться оцінки (45) і (46) (а отже, і (12)) для всіх натуральних n. На підставі теореми 1 для будь-якого ядра $\Psi_{\bar\beta}(t)$, породженого вказаною послідовністю $\psi(k)$ і довільною послідовністю β_k дійсних чисел, має місце включення $\Psi_{\bar\beta} \in N_n^*$ для всіх натуральних номерів n і, як наслідок, справджуються рівності (13). Обчислення показують, що $\rho_* = 0{,}280647\ldots$. Із викладеного випливає наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай послідовність* $\psi(k)$ *ядра* $\Psi_{\bar\beta}(t)$ *вигляду* (5) *задовольняє умову* (54), *у якій* $\rho_* = 0{,}280647\ldots$ — *корінь рівняння* (53). *Тоді, якою б не була послідовність* β_k *дійсних чисел, для всіх натуральних* n *виконуються включення* $\Psi_{\bar\beta} \in N_n^*$ *і мають місце рівності* (13).

Зазначимо, що при $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, теорема 3 випливає із теореми 2 роботи [21].

Для повноти викладу наведемо декілька наслідків із теореми 1 у випадку $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, які раніше були доведені автором у [21].

Теорема 4. *Нехай послідовність коефіцієнтів* $\psi(k)$ *ядра* $\Psi_\beta(t)$ *вигляду*

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \psi(k) > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{55}$$

що породжує класи $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ і $L_{\beta,1}^{\psi}$, *задовольняє умову* (11) *при* $\rho \in (0, 1)$ *і опукла, починаючи з номера* $n \in \mathbb{N}$, *тобто така, що*

$$\Delta^2 \psi(k) = \psi(k) - 2\psi(k+1) + \psi(k+2) \ge 0, \quad k = n, n+1, \ldots. \tag{56}$$

Тоді виконання умови

$$\frac{\Delta^2 \psi(n)}{\psi(n)} > \frac{(1+3\rho)\rho^{2n}}{(1-\rho)\sqrt{1-2\rho^{2n}}} \tag{57}$$

гарантує включення $\Psi_\beta \in N_n^*$ *і справедливість рівностей*

$$E_n(C_{\beta,\infty}^{\psi})_C = E_n(L_{\beta,1}^{\psi})_L = \frac{1}{\pi} E_n(\Psi_\beta)_L = \left\| \Psi_\beta * \operatorname{sign} \sin n(\cdot) \right\|_C =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\psi((2\nu+1)n)}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n \pi - \frac{\beta\pi}{n}\right) \right|, \tag{58}$$

де $\theta_n = \theta_n(\psi, \beta) \in (0, 1)$ *і* θ_n *є коренем рівняння*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \psi((2\nu+1)n)\cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) = 0. \tag{59}$$

Щоб одержати твердження теореми 4 із теореми 1, досить показати, що умови (56) і (57) забезпечують виконання нерівності (12), яка при $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, має вигляд

$$\frac{1}{\psi(n)}\left(\frac{\psi(n)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \psi(n+j)\cos jt\right) > \frac{\rho^{2n}(1+3\rho)}{2\sqrt{1-2\rho^{2n}(1-\rho)}}. \tag{12′}$$

Перетворимо суму

$$\Phi_n(t) = \frac{\psi(n)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \psi(n+j)\cos jt$$

за допомогою дворазово застосованого перетворення Абеля. В результаті одержимо

$$\Phi_n(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\,\Delta^2\psi(n+\nu)\,F_\nu(t), \tag{60}$$

де

$$F_\nu(t) = \frac{2}{\nu+1}\left(\frac{\sin(\nu+1)t/2}{2\sin t/2}\right)^2, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

— ядра Фейєра порядку ν. Із співвідношення (60) та опуклості послідовності $\psi(\nu)$, $\nu = n, n+1, \ldots$, маємо

$$\Phi_n(t) \geq \Delta^2\psi(n)\,F_0(t) = \frac{1}{2}\Delta^2\psi(n) \quad \forall\, t \in R. \tag{61}$$

Співставивши нерівності (57) і (61), одержимо (12′). Згідно з теоремою 1 для ядра Ψ_β має місце включення $\Psi_\beta \in N_n^*$ при будь-якому значенні $\beta \in \mathbb{R}$, і при цьому справджуються рівності (58).

Теорему доведено.

Як показано у [21, с. 188 – 190], із теореми 4 випливає наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай послідовність коефіцієнтів* $\psi(k)$ *ядра* $\Psi_\beta(t)$ *вигляду* (55), *яке породжує класи* $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ *і* $L_{\beta,1}^{\psi}$, *задовольняє умову*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q, \quad q \in [0, 1). \tag{62}$$

Тоді знайдеться залежний від $\psi(k)$ *номер* n_0 *такий, що для будь-якого натурального числа* n, *більшого за* n_0, *має місце включення* $\Psi_\beta \in N_n^*$ *і виконуються рівності* (58).

Прикладами функцій $\psi(k)$, що задовольняють умову (62), є, зокрема, функції $\psi_1(k) = k^\gamma q^{k^r}$, $\gamma \in (-\infty, +\infty)$, $q \in (0, 1)$, $r \geq 1$, $\psi_2(k) = (k!/k^k)^\alpha$, $\alpha \in (0, \infty)$ та інші.

2. Оцінки колмогоровських поперечників класів $C_{\bar\beta,\infty}^{\Psi}$ і $L_{\bar\beta,1}^{\Psi}$ в рівномірній та інтегральній метриках. Нехай $\mathfrak{N}$ — центрально-симетрична множина банахового простору X ($\mathfrak{N} \subset X$). M-вимірним поперечником за Колмогоровим множини $\mathfrak{N}$ у просторі X називають величину

$$d_M(\mathfrak{N}, X) = \inf_{L_M \subset X} \sup_{x \in \mathfrak{N}} \inf_{y \in L_M} \|x - y\|_X, \tag{63}$$

де зовнішня точна нижня межа розглядається по всіх можливих лінійних підпросторах L_M розмірності M ($M \in \mathbb{N}$). Величини $d_M(\mathfrak{N}, X)$ вигляду (63) були запроваджені А. М. Колмогоровим у 1936 р. [23]. Він же, спираючись на геометричні властивості гільбертових просторів, обчислив точні значення поперечників класів W_2^r, $r = 1, 2, \ldots$, у просторі L_2.

Задача про обчислення поперечників $d_M(\mathfrak{N}, X)$, як правило, розпадається на дві частини. Спочатку фіксується деякий підпростір $L_M^* \subset X$ розмірності $M \in \mathbb{N}$) (частіше за все це підпростір тригонометричних поліномів чи сплайнів) і обчислюється величина

$$E(L_M^*, \mathfrak{N})_X = \sup_{x \in \mathfrak{N}} \inf_{y \in L_M^*} \|x - y\|_X.$$

Очевидно, що

$$E(L_M^*, \mathfrak{N})_X \geq d_M(\mathfrak{N}, X).$$

Потім для поперечника $d_M(\mathfrak{N}, X)$ отримують оцінку знизу.

Як випливає з п. 1 роботи, на класах $W_{\beta,p}^r$, $p = 1, \infty$, $r > 0$, а також $C_{\beta,\infty}^\psi$ і $L_{\beta,1}^\psi$ при $\psi \in \mathfrak{M}$, $\beta \in \mathbb{Z}$ і деяких незначних додаткових обмеженнях на характер спадання до нуля послідовності $\psi(k)$ перша частина задачі по відшуканню точних значень поперечників фактично була розв'язана у роботах Ж. Фавара, Н. І. Ахієзера та М. Г. Крейна, Б. Надя, С. М. Нікольського, В. К. Дзядика, С. Б. Стєчкіна, Сунь Юн-шена та ін. Щодо другої частини задачі (про оцінку колмогоровських поперечників знизу), то її розв'язання стало можливим завдяки суттєвому залученню ідей із суміжних розділів математики. В. М. Тихомиров [24], вперше застосувавши топологічні методи до задач про поперечники (мається на увазі теорема Борсука про антиподи [25]), довів відому теорему про поперечники кулі і обчислив точні оцінки знизу поперечників $d_{2n-1}(W_\infty^r, C)$, $r \in \mathbb{N}$, а потім (1969 р.) показав [26], що

$$d_{2n-1}(W_\infty^r, C) = d_{2n}(W_\infty^r, C).$$

Точні оцінки знизу для непарних поперечників $d_{2n-1}(W_1^r, L)$, $r \in \mathbb{N}$, отримали незалежно Ю. М. Субботін [27, 28] та Ю. І. Маковоз [29], а для парних поперечників $d_{2n}(W_1^r, L)$ — В. І. Рубан (див. коментарі до гл. 10 роботи [30]).

Класи W_p^r, $r \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, є класами згорток із ядрами Бернуллі $B_r(t)$, які є так званими CVD-ядрами [31, 32]. Нагадаємо, що періодичну сумовну функцію $K(\cdot)$ називають CVD-ядром (ядром, що не збільшує осциляції) і записують $K \in CVD$, якщо для довільної неперервної 2π-періодичної функції f виконується нерівність $\nu(K * f) \leq \nu(f)$, де $\nu(g)$ — число змін знака 2π-періодичної функції g на періоді $[0, 2\pi)$.

У 1979 р. А. Пінкус [31] (див. також [32]), вважаючи CVD-ядро $K(\cdot)$ неперервною функцією, а систему функцій $\{K(\cdot - y_i)\}_{i=0}^{2n+1}$ при довільних $0 \leq y_0 < < y_1 < \ldots < y_{2n+1} < 2\pi$ лінійно незалежною, довів, що $K \in N_n^*$, і обчислив колмогоровські поперечники $d_{2n-1}(K*U_p^0, L_q)$ і $d_{2n}(K*U_p^0, L_q)$ при $p = \infty$, $1 \le q \le \infty$, а також при $1 \le p \le \infty$, $q = 1$, де

$$K * U_p^0 = \left\{ f \in L : f(x) = c + (K*\varphi)(x),\ c \in \mathbb{R},\ \varphi \in U_p^0 \right\},$$

$$U_p^0 = \left\{ \varphi \in L_p : \|\varphi\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^p dt \right)^{1/p} \le 1,\ \varphi \perp 1 \right\}$$

(для класів W_p^r, $r \in \mathbb{N}$, вказані результати незалежно і різними методами одержали також А. О. Лигун [33] і Ю. І. Маковоз [34].)

Умова *CVD* є досить жорсткою, в міркуваннях вона фактично замінює теорему Ролля і багато відомих ядер її не задовольняють $\Big($наприклад, ядра

$$B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos(kt - \beta\pi/2), \quad r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{64}$$

при певних співвідношеннях між параметрами r і β, ядро Пуассона $P(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (1/7)^k \cos kt$, ядро $K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/(5^k k!) \cos kt$ та ін. не є *CVD*-ядрами (див., зокрема, [35, с. 1318, 1319; 19, с. 1264]) $\Big)$.

Останнім часом оцінки знизу поперечників у деяких важливих випадках вдавалось отримати на базі розробленого О. К. Кушпелем апарату *SK*-сплайнів для класів згорток, породжених ядрами, що задовольняють так звану умову $C_{y,2n}$ (див. [35, 36]). Зокрема, у роботах [35, 36] доведено, що при $\beta \in \mathbb{Z}$ умову $C_{y,2n}$, $n \in \mathbb{N}$, задовольняють функції $\Psi_\beta(t)$ вигляду (55) з коефіцієнтами $\psi(k) = \varphi(k)\rho^k$, $1 < \rho \le 1/7$, де $\varphi(k)$ — довільні додатні незростаючі функції натурального аргументу. Згодом В. Т. Шевалдін [37, 38] довів, що умову $C_{y,2n}$ задовольняють ядра Пуассона $P_{q,\beta}(t)$ при $1 < q < q(\beta)$, де $q(\beta) = 0,2$, якщо $\beta \in \mathbb{Z}$, і $q(\beta) = 0{,}196881$, якщо $\beta \notin \mathbb{Z}$, а також ядра $B_{r,\beta}(t)$ вигляду (64) при $r \ge 1$, $n \le c(\beta)(r+1)$, де $c(\beta) = 0{,}249971$, якщо $\beta \in \mathbb{Z}$, і $c(\beta) = 0{,}247812$, якщо $\beta \notin \mathbb{Z}$. У роботі О. І. Степанця і автора [39] доведено, що умови $C_{y,2n}$, $n \in \mathbb{N}$, задовольняють усі ядра $\Psi_\beta(t)$ вигляду (55) з коефіцієнтами $\psi(k)$, що підпорядковані нерівностям

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} \le \rho(\beta), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

де $\rho(\beta) = 0{,}2$, якщо $\beta \in \mathbb{Z}$, і $\rho(\beta) = 0{,}196881$, якщо $\beta \notin \mathbb{Z}$.

Зазначимо, що в кожному із перелічених вище випадків для класів функцій $C_{\beta,\infty}^\psi$ та $L_{\beta,1}^\psi$, породжених відповідними ядрами, були одержані оцінки знизу поперечників $d_{2n}(C_{\beta,\infty}^\psi, C)$ та $d_{2n-1}(L_{\beta,1}^\psi, L)$, які виявились рівними з найкращими наближеннями $E_n(C_{\beta,\infty}^\psi)_C$ і $E_n(L_{\beta,1}^\psi)_L$ на відповідних класах функцій. Тим самим вдалось одержати точні значення поперечників за Колмогоровим класів $C_{\beta,\infty}^\psi$ і $L_{\beta,1}^\psi$ у метриках просторів C і L.

У роботі [20] доведено, що умови $C_{y,2n}$, $n \in \mathbb{N}$, задовольняють також ядра $\Psi_{\bar\beta}(t)$ вигляду (5), коефіцієнти $\psi(k)$ яких підпорядковані нерівностям

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} \le \rho_{**}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{65}$$

де ρ_{**} — абсолютна стала, $\rho_{**} = 0{,}1912822\ldots$, і, як наслідок, одержано наступне твердження.

Теорема А. *Нехай послідовність* $\psi(k)$ *ядра* $\Psi_{\bar\beta}(t)$ *вигляду* (5) *задовольняє умову* (65). *Тоді, якою б не була послідовність* β_k *дійсних чисел, для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *виконуються нерівності*

$$d_{2n}(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}, C) \ge \left\| \Psi_{\bar\beta} * \operatorname{sign} \sin n(\cdot) \right\|_C, \tag{66}$$

$$d_{2n-1}(L^{\psi}_{\bar\beta,1}, C) \ge \left\| \Psi_{\bar\beta} * \operatorname{sign} \sin n(\cdot) \right\|_C. \tag{67}$$

Слід зазначити, що до останнього часу питання про точність одержаних у теоремі А оцінок знизу поперечників залишалось відкритим.

Легко помітити, що при виконанні умови (65) справджуються всі умови теореми 3. Отже, співставляючи оцінки (66) і (67) із рівностями (13) та очевидними нерівностями

$$E_n(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty})_C \ge d_{2n-1}(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}, C),$$

$$E_n(L^{\psi}_{\bar\beta,1})_L \ge d_{2n-1}(L^{\psi}_{\bar\beta,1}, L),$$

$$d_{2n-1}(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}, C) \ge d_{2n}(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}, C),$$

одержуємо наступне твердження.

Теорема 6. *Нехай послідовність* $\psi(k)$ *ядра* $\Psi_{\bar\beta}(t)$ *вигляду* (5), *що породжує класи* $C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}$ *і* $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$, *задовольняє умову* (65). *Тоді, якою б не була послідовність* β_k *дійсних чисел, для всіх натуральних* n *виконуються рівності*

$$\begin{aligned} d_{2n-1}(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}, C) &= d_{2n}(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(L^{\psi}_{\bar\beta,1}, L) = E_{n-1}(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty})_C = \\ &= E_{n-1}(L^{\psi}_{\bar\beta,1})_L = \frac{1}{\pi} E_n(\Psi_{\bar\beta})_L = \left\| \Psi_{\bar\beta} * \operatorname{sign} \sin n(\cdot) \right\|_C = \\ &= \frac{4}{\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\psi((2\nu+1)n)}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n \pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n}\pi}{2} \right) \right|, \end{aligned} \tag{68}$$

де $\theta_n = \theta_n(\psi, \bar\beta) \in [0, 1)$ *і* θ_n *є коренем рівняння* (14).

Безпосередньо із теореми 6 випливає таке твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай послідовність коефіцієнтів* $\psi(k)$ *ядра* $\Psi_{\bar\beta}(t)$ *вигляду* (5), *яке породжує класи* $C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}$ *і* $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$, *задовольняє умову*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q, \tag{69}$$

$q \in [0, \rho_{**})$, $\rho_{**} = 0{,}1912822\ldots$. *Тоді знайдеться номер* n_0 *такий, що для будь-якого натурального числа* n, *більшого за* n_0, *якою б не була послідовність* β_k *дійсних чисел, виконуються рівності* (68).

Аналогічний факт для класів $C^{\psi}_{0,\infty}$ і $L^{\psi}_{0,1}$, породжених ядрами Пуассона

$$P_{q,0}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt, \qquad q \in (0, 1),$$

був помічений у роботі Нгуен Тхи Тх'єу Хоа [40, с. 211], а для класів $C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}$ і $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$, породжених ядрами

$$\Psi_{\bar\beta}(t) = \phi_{\alpha,r,\bar\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k) e^{-\alpha k^r} \cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right), \qquad \alpha > 0, \quad r > 1,$$

де $\varphi(k)$ — довільні незростаючі послідовності дійсних чисел, β_k — довільні послідовності дійсних чисел, — у роботі автора [41, с. 298]. При $q = 0$ і $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, наслідок 1 випливає із теореми 4 роботи [21].

3. Про найкращий лінійний метод та оцінки лінійних поперечників класів $C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}$ і $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$ в рівномірній та інтегральній метриках. У цьому пункті буде вказано лінійний метод, який забезпечує на класах функцій $C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}$ і $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$ найкраще наближення в метриках просторів C і L відповідно.

Наслідуючи Б. Надя [5] (див. також [6, 8]), задамо системи чисел

$$\begin{aligned} &\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}, \\ &\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1} \end{aligned} \tag{70}$$

і побудуємо для кожної функції із $C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}$ (чи відповідно $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$) тригонометричний поліном $U_{n-1}(x)$ порядку $n-1$

$$U_{n-1}(x) = U_{n-1}(f; x; \mu, \nu) =$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \big(\mu_k (a_k \cos kt + b_k \sin kt) + \nu_k (a_k \sin kt - b_k \cos kt)\big), \tag{71}$$

що означається системами чисел (70), де a_k і b_k — коефіцієнти Фур'є функції $\varphi = f^{\psi}_{\bar\beta}$. Поліноми $U_{n-1}(f; x; \mu, \nu)$ лінійно залежать від φ і називаються лінійними методами наближення функцій f вигляду (1), що визначаються системами чисел (70).

У якості міри наближення функцій f класів $C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}$ і $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$ за допомогою поліномів $U_{n-1}(f; x; \mu, \nu)$ розглядають верхні межі

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}; \mu, \nu)_C = \sup_{f \in C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}} \| f(\cdot) - U_{n-1}(f; \cdot; \mu, \nu) \|_C, \tag{72}$$

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\bar\beta,1}; \mu, \nu)_L = \sup_{f \in L^{\psi}_{\bar\beta,1}} \| f(\cdot) - U_{n-1}(f; \cdot; \mu, \nu) \|_1. \tag{72'}$$

Метод наближення вигляду (71) називають найкращим для класу $C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}$ (чи відповідно $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$) у метриці простору $C(L)$, якщо він визначається такими системами чисел (70), для яких точна верхня межа (72) (відповідно (72′)) буде найменшою серед усіх можливих.

Як випливає із роботи С. М. Нікольського [6, с. 235, 236] (теореми 6 – 8), має місце наступне твердження.

Теорема B. *Нехай неперервне ядро* $\Psi_{\bar\beta}(t)$ *вигляду* (5), *що породжує класи* $C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}$ *і* $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$, *задовольняє умову* N^*_n $(\Psi_{\bar\beta}\in N^*_n)$. *Тоді лінійний метод* $U_{n-1}(x)$ *вигляду* (71) *є найкращим для класів* $C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}$ *і* $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$ *при* $\mu_k=\mu^*_k$, $\nu_k=\nu^*_k$, $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$, *де* μ^*_k *і* ν^*_k — *коефіцієнти Фур'є тригонометричного полінома*

$$T^*_{n-1}(t) = \frac{1}{2}\mu^*_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(\mu^*_k\cos kt + \nu^*_k\sin kt), \tag{73}$$

який серед усіх можливих поліномів порядку $\le n-1$ *є поліномом найкращого наближення функції* $\Psi_{\bar\beta}$ *у метриці* L *і, отже, є поліномом, що інтерполює функцію* $\Psi_{\bar\beta}(t)$ *в точках*

$$t_k = \xi + \frac{k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1. \tag{74}$$

При цьому

$$\mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty};\mu^*,\nu^*)_C = \frac{1}{\pi}E_n(\Psi_{\bar\beta})_L = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\Psi_{\bar\beta}(t)-T^*_{n-1}(t)\right|dt, \tag{75}$$

$$\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\bar\beta,1};\mu^*,\nu^*)_L = \frac{1}{\pi}E_n(\Psi_{\bar\beta})_L = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\Psi_{\bar\beta}(t)-T^*_{n-1}(t)\right|dt. \tag{75′}$$

Вказаний найкращий лінійний метод для класів $C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}$ *і* $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$ *є єдиним.*

Зазначимо, що коефіцієнти μ^*_k і ν^*_k тригонометричного полінома T^*_{n-1} вигляду (73), який фігурує в теоремі B, можна виразити в явному вигляді через параметри твірного ядра $\Psi_{\bar\beta}$ вигляду (5) (а саме, через послідовності $\psi(k)$ і β_k). Дійсно, якщо $\Psi_{\bar\beta}\in N^*_n$, то з огляду на лему 1 проінтерполювати $\Psi_{\bar\beta}$ по системі точок t_k вигляду (74) можна тоді і тільки тоді, коли $\xi=\theta_n\pi/n$, де $\theta_n\in[0,1)$ і θ_n є коренем рівняння (14). Крім того, як випливає з доведення теореми 1 (формули (20) – (26)), тригонометричний поліном T^*_{n-1} вигляду (73), що інтерполює ядро $\Psi_{\bar\beta}$ по системі точок (74) при $\xi=\theta_n\pi/n$, зображується у вигляді

$$T^*_{n-1}(t) = T^{(1)}_{n-1}\left(t-\frac{\theta_n\pi}{2}\right) + T^{(2)}_{n-1}\left(t-\frac{\theta_n\pi}{n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta_k\pi}{2}\right), \tag{76}$$

де

$$T^{(1)}_{n-1}\left(t-\frac{\theta_n\pi}{n}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty}a_{2n\nu} + \sum_{j=1}^{n-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_{2n\nu-j}+a_{2n\nu+j})\right\}\cos\left(jt-\frac{j\theta_n\pi}{n}\right), \tag{77}$$

$$T_{n-1}^{(2)}\left(t-\frac{\theta_n\pi}{n}\right) = \sum_{j=1}^{n-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}(-b_{2n\nu-j}+b_{2n\nu+j})\right\}\sin\left(jt-\frac{j\theta_n\pi}{n}\right), \tag{78}$$

$$a_k = \psi(k)\cos\left(\frac{k\theta_n\pi}{n}-\frac{\beta_k\pi}{2}\right), \quad k\in\mathbb{N}, \tag{79}$$

$$b_k = -\psi(k)\sin\left(\frac{k\theta_n\pi}{n}-\frac{\beta_k\pi}{2}\right), \quad k\in\mathbb{N}. \tag{80}$$

Об'єднуючи формули (76) – (80), одержуємо

$$T_{n-1}^{*}(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\psi(2n\nu)\cos\left(2\nu\theta_n\pi-\frac{\beta_{2n\nu}\pi}{2}\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\psi(2n\nu-j)\cos\left((2n\nu-j)\frac{\theta_n\pi}{n}-\frac{\beta_{2n\nu-j}\pi}{2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ \psi(2n\nu+j)\cos\left((2n\nu+j)\frac{\theta_n\pi}{n}-\frac{\beta_{2n\nu+j}\pi}{2}\right)\right)\right\}\cos\left(jt-\frac{j\theta_n\pi}{n}\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\psi(2n\nu-j)\sin\left((2n\nu-j)\frac{\theta_n\pi}{n}-\frac{\beta_{2n\nu-j}\pi}{2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ \psi(2n\nu+j)\sin\left((2n\nu+j)\frac{\theta_n\pi}{n}-\frac{\beta_{2n\nu+j}\pi}{2}\right)\right)\right\}\sin\left(jt-\frac{j\theta_n\pi}{n}\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1}\psi(j)\cos\left(jt-\frac{\beta_j\pi}{2}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\psi(2n\nu)\cos\left(2\nu\theta_n\pi-\frac{\beta_{2n\nu}\pi}{2}\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1}\left\{\psi(j)\cos\frac{\beta_j\pi}{2}+\cos\frac{j\theta_n\pi}{n}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\psi(2n\nu-j)\cos\left((2n\nu-j)\frac{\theta_n\pi}{n}-\frac{\beta_{2n\nu-j}\pi}{2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\ \psi(2n\nu+j)\cos\left((2n\nu+j)\frac{\theta_n\pi}{n}-\frac{\beta_{2n\nu+j}\pi}{2}\right)\right) -$$

$$-\ \sin\frac{j\theta_n\pi}{n}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\psi(2n\nu-j)\sin\left((2n\nu-j)\frac{\theta_n\pi}{n}-\frac{\beta_{2n\nu-j}\pi}{2}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\ \psi(2n\nu+j)\sin\left((2n\nu+j)\frac{\theta_n\pi}{n}-\frac{\beta_{2n\nu+j}\pi}{2}\right)\right)\right\}\cos jt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1}\left\{\psi(j)\sin\frac{\beta_j\pi}{2}+\sin\frac{j\theta_n\pi}{n}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\psi(2n\nu-j)\cos\left((2n\nu-j)\frac{\theta_n\pi}{n}-\frac{\beta_{2n\nu-j}\pi}{2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\ \psi(2n\nu+j)\cos\left((2n\nu+j)\frac{\theta_n\pi}{2}-\frac{\beta_{2n\nu+j}\pi}{2}\right)\right) +$$

$$+\ \cos\frac{j\theta_n\pi}{n}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\psi(2n\nu-j)\sin\left((2n\nu-j)\frac{\theta_n\pi}{n}-\frac{\beta_{2n\nu-j}\pi}{2}\right)-\right.$$

$$- \psi(2n\nu + j)\sin\left((2n\nu + j)\frac{\theta_n \pi}{n} - \frac{\beta_{2n\nu+j}\pi}{2}\right)\Bigg)\Bigg\}\sin jt =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi(2n\nu)\cos\left(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta_{2n\nu}\pi}{2}\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1}\left\{\psi(j)\cos\frac{\beta_j\pi}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\psi(2n\nu - j)\cos\left(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta_{2n\nu-j}\pi}{2}\right) +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \psi(2n\nu + j)\cos\left(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta_{2n\nu+j}\pi}{2}\right)\right)\right\}\cos jt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1}\left\{\psi(j)\sin\frac{\beta_j\pi}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\psi(2n\nu - j)\sin\left(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta_{2n\nu-j}\pi}{2}\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \psi(2n\nu + j)\sin\left(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta_{2n\nu+j}\pi}{2}\right)\right)\right\}\sin t. \qquad (81)$$

Співставляючи рівності (73) і (81), бачимо, що коефіцієнти μ_k^* і ν_k^* полінома T_{n-1}^* виражаються за допомогою рівностей

$$\mu_0^* = 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\psi(2n\nu)\cos\left(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta_{2n\nu}\pi}{2}\right), \qquad (82)$$

$$\mu_k^* = \psi(k)\cos\frac{\beta_k\pi}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\psi(2n\nu - k)\cos\left(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta_{2n\nu-k}\pi}{2}\right) +\right.$$

$$\left. + \psi(2n\nu + k)\cos\left(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta_{2n\nu+k}\pi}{2}\right)\right), \quad k = \overline{1, n-1}, \qquad (83)$$

$$\nu_k^* = \psi(k)\sin\frac{\beta_k\pi}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\psi(2n\nu - k)\sin\left(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta_{2n\nu-k}\pi}{2}\right) -\right.$$

$$\left. - \psi(2n\nu + k)\sin\left(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta_{2n\nu+k}\pi}{2}\right)\right), \quad k = \overline{1, n-1}, \qquad (84)$$

$\theta_n \in [0, 1)$ — корінь рівняння (14). Отже, теорему В можна переформулювати у наступному вигляді.

Теорема В$'$. *Нехай неперервне ядро* $\Psi_{\bar\beta}(t)$ *вигляду* (5), *що породжує класи* $C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}$ *і* $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$, *задовольняє умову* N_n^* $(\Psi_{\bar\beta} \in N_n^*)$. *Тоді лінійний метод* $U_{n-1}(x)$ *вигляду* (71) *є найкращим для класів* $C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}$ *і* $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$ *у метриках просторів* C *і* L *відповідно, якщо* $\mu_k = \mu_k^*$, $\nu_k = \nu_k^*$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, *де* μ_k^* *і* ν_k^* *означаються формулами* (82) – (84). *При цьому мають місце рівності* (75) і (75$'$), *а вказаний найкращий лінійний метод для класів* $C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}$ і $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$ *є єдиним.*

Із теорем 1 – 3 і теореми В$'$ випливає такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай виконуються всі умови однієї з теорем* 1 – 3. *Тоді виконуються рівності*

$$E_n(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty})_C = \mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty};\mu^*,\nu^*)_C = E_n(L^{\psi}_{\bar\beta,1})_L = \mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\bar\beta,1};\mu^*,\nu^*)_L =$$

$$= \frac{1}{\pi}E_n(\Psi_{\bar\beta})_L = \left\|\Psi_{\bar\beta} * \operatorname{sign}\sin n(\cdot)\right\|_C =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\psi((2\nu+1)n)}{2\nu+1}\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n}\pi}{2}\right)\right|, \qquad (85)$$

де системи чисел $\mu^* = \{\mu_k^*\}_{k=0}^{n-1}$ *і* $\nu^* = \{\nu_k^*\}_{k=1}^{n-1}$ *означаються за допомогою формул* (82) – (84), *а* $\theta_n = \theta_n(\psi, \bar\beta)$ — *єдиний на* $[0, 1)$ *корінь рівняння* (14).

У випадку $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, коефіцієнти μ_k^* *і* ν_k^* тригонометричного полінома T_{n-1}^* набирають вигляду

$$\mu_0^* = 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\psi(2n\nu)\cos\left(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad (82')$$

$$\mu_k^* = \psi(k)\cos\frac{\beta\pi}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(\psi(2n\nu-k)+\psi(2n\nu+k))\cos\left(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad k = \overline{1, n-1}, \qquad (83')$$

$$\nu_k^* = \psi(k)\sin\frac{\beta\pi}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(\psi(2n\nu-k)-\psi(2n\nu+k))\sin\left(2\nu\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad k = \overline{1, n-1}, \qquad (84')$$

де $\theta_n = \theta_n(\psi, \beta) \in [0, 1)$ — корінь рівняння (59).

Із теорем 4 і 5 та теореми B$'$, застосованої в ситуації, коли $\beta_k \equiv \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, одержуємо такий наслідок.

Наслідок 3. *Нехай виконуються всі умови однієї з теорем* 4, 5. *Тоді*

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C = \mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty};\mu^*,\nu^*)_C = E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_L = \mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1};\mu^*,\nu^*)_L =$$

$$= \frac{1}{\pi}E_n(\Psi_{\beta})_L = \left\|\Psi_{\beta} * \operatorname{sign}\sin n(\cdot)\right\|_C =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\psi((2\nu+1)n)}{2\nu+1}\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|, \qquad (85')$$

де системи чисел $\mu^* = \{\mu_k^*\}_{k=0}^{n-1}$ *і* $\nu^* = \{\nu_k^*\}_{k=1}^{n-1}$ *означаються за допомогою формул* (82$'$) – (84$'$), *а* $\theta_n = \theta_n(\psi, \beta)$ — *єдиний на* $[0, 1)$ *корінь рівняння* (59).

У 1960 р. В. М. Тихомиров [24] ввів до розгляду величини $b_M(\mathfrak{N}, X)$ — поперечники за Бернштейном — та $\lambda_M(\mathfrak{N}, X)$ — лінійні поперечники.

Нехай $\mathfrak{N}$ — центрально-симетрична множина банахового простору X ($\mathfrak{N} \subset \subset X$) з одиничною кулею B. M-вимірним поперечником за Бернштейном множини $\mathfrak{N}$ у просторі X називають величину

$$b_M(\mathfrak{N}, X) = \sup_{L_{M+1}\subset X}\sup_{\varepsilon>0}\{\mathfrak{N}\cap L_{M+1} \supset \varepsilon B \cap L_{M+1}\},$$

де зовнішній супремум розглядається по усіх можливих лінійних підпросторах L_{M+1} розмірності $M+1$ ($M \in \mathbb{N}$).

M-вимірним лінійним поперечником множини $\mathfrak{N}$ у просторі X називають величину

$$\lambda_M(\mathfrak{N}, X) = \inf_{L_M \subset X} \inf_{\Lambda \in \mathcal{L}(X, L_M)} \sup_{x \in \mathfrak{N}} \| x - \Lambda x \|_X,$$

де $\mathcal{L}(X, L_M)$ — клас неперервних лінійних відображень, що діють із X в L_M, а зовнішній інфімум розглядається по усіх можливих лінійних підпросторах L_M розмірності M $(M \in \mathbb{N})$.

Повторюючи міркування, використані при доведенні теореми із роботи О. К. Кушпеля [36], можна показати, що при виконанні умов теореми А виконуються нерівності

$$d_{2n}(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}, C) \geq b_{2n-1}(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}, C) \geq \left\| \Psi_{\bar\beta} * \operatorname{sign} \sin n(\cdot) \right\|_C, \tag{66$'$}$$

$$d_{2n-1}(L^{\psi}_{\bar\beta,1}, L) \geq b_{2n-1}(L^{\psi}_{\bar\beta,1}, L) \geq \left\| \Psi_{\bar\beta} * \operatorname{sign} \sin n(\cdot) \right\|_C. \tag{67$'$}$$

Неважко помітити, що при виконанні умови (65) справджуються всі умови теореми 3 і наслідку 2. Тому, співставляючи оцінки (66′) і (67′) з рівностями (85) і очевидними співвідношеннями

$$d_{2n}(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}, C) \leq \lambda_{2n}(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}, C) \leq \lambda_{2n-1}(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}, C) \leq \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}; \mu^*, \nu^*)_C,$$

$$d_{2n-1}(L^{\psi}_{\bar\beta,1}, L) \leq \lambda_{2n-1}(L^{\psi}_{\bar\beta,1}, L) \leq \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\bar\beta,1}; \mu^*, \nu^*)_L,$$

приходимо до наступного твердження.

Теорема 7. *Нехай послідовність* $\psi(k)$ *ядра* $\Psi_{\bar\beta}(t)$ *вигляду* (5), *що породжує класи* $C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}$ *і* $L^{\psi}_{\bar\beta,1}$, *задовольняє умову* (65). *Тоді, якою б не була послідовність* β_k *дійсних чисел, для всіх натуральних* n *виконуються рівності*

$$d_{2n-1}(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}, C) = d_{2n}(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}, C) = b_{2n-1}(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}, C) = \lambda_{2n}(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}, C) =$$

$$= \lambda_{2n-1}(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(L^{\psi}_{\bar\beta,1}, L) = b_{2n-1}(L^{\psi}_{\bar\beta,1}, L) = \lambda_{2n-1}(L^{\psi}_{\bar\beta,1}, L) =$$

$$= E_n(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty})_C = \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,\infty}; \mu^*, \nu^*)_C = E_n(L^{\psi}_{\bar\beta,1})_L = \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\bar\beta,1}; \mu^*, \nu^*)_L =$$

$$= \frac{1}{\pi} E_n(\Psi_{\bar\beta})_L = \left\| \Psi_{\bar\beta} * \operatorname{sign} \sin n(\cdot) \right\|_C =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\psi((2\nu+1)n)}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\theta_n \pi - \frac{\beta_{(2\nu+1)n}\pi}{2} \right) \right|,$$

де системи чисел $\mu^* = \{\mu^*_k\}_{k=0}^{n-1}$ *і* $\nu^* = \{\nu^*_k\}_{k=1}^{n-1}$ *означаються формулами* (82) – (84), *а* $\theta_n = \theta_n(\psi, \bar\beta)$ — *єдиний на* $[0, 1)$ *корінь рівняння* (14).

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 286 с.
2. *Favard J.* Sur l'approximation des fonctions périodiques par des polynomes trigonométriques // C. r. Acad. sci. – 1936. – **203**. – P. 1122 – 1124.
3. *Favard J.* Sur les meilleurs procédes d'approximations de certains classes de fonctions par des polynomes trigonométriques // Bull. sci. math. – 1937. – **61**. – P. 209 – 224, 243 – 256.
4. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций // Докл. АН СССР. – 1937. – **15**, № 3. – С. 107 – 112.

5. *Nagy B.* Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I. Periodischer Fall, Berichte der math.-phys. Kl. Acad. der Wiss. zu Leipzig. – 1938. – **90**. – P. 103 – 134.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**. – С. 207 – 256.
7. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную $(0 < s < 1)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1953. – **17**. – С. 135 – 162.
8. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций // Там же. – 1959. – **23**. – С. 933 – 950.
9. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Мат. заметки. – 1974. – **16**, № 5. – С. 691 – 701.
10. *Стечкин С. Б.* О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1956. – **20**. – С. 643 – 648.
11. *Стечкин С. Б.* О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами // Там же. – С. 197 – 206.
12. *Сунь Юн-шен.* О наилучшем приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами // Успехи мат. наук. – 1958. – **13**, № 2. – С. 238 – 241.
13. *Сунь Юн-шен.* О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1959. – **23**. – С. 67 – 92.
14. *Сунь Юн-шен.* О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами (второе сообщение) // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1961. – **25**. – С. 143 – 152.
15. *Крейн М. Г.* К теории наилучшего приближения периодических функций // Докл. АН СССР. – 1938. – **18**, № 4-5. – С. 245 – 249.
16. *Бушанский А. В.* О наилучшем в среднем гармоническом приближении некоторых функций // Исследования по теории приближения функций и их приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. – С. 29 – 37.
17. *Шевалдин В. Т.* Поперечники классов сверток с ядром Пуассона // Мат. заметки. – 1992. – **51**, № 6. – С. 126 – 136.
18. *Нгуен Тхи Тхьеу Хоа.* Оператор $D(D^2+1^2)\ldots(D^2+n^2)$ и тригонометрическая интерполяция // Anal. math. – 1989. – **15**. – P. 291 – 306.
19. *Сердюк А. С.* О наилучшем приближении классов сверток периодических функций тригонометрическими полиномами // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1261 – 1265.
20. *Сердюк А. С.* Поперечники та найкращі наближення класів згорток періодичних функцій // Там же. – 1999. – **51**, № 5. – С. 674 – 687.
21. *Сердюк А. С.* Про найкраще наближення на класах згорток періодичних функцій // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **35**. – С. 172 – 194.
22. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947. – 323 с.
23. *Kolmogorov A. N.* Uber die beste Annaherung von Functionen einer gegebenen Functionenklasse // Ann. Math. – 1936. – **37**, № 2. – P. 107 – 110.
24. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория приближения // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
25. *Borsuk K.* Drei Satze uber die n-dimensionale euklidische Sphare // Fund. math. – 1933. – **20**. – S. 177 – 190.
26. *Тихомиров В. М.* Наилучшие методы приближения и интерполирования в пространствах $C[-1,1]$ // Мат. сб. – 1969. – **80**, № 2. – С. 290 – 304.
27. *Субботин Ю. Н.* Поперечники класса W^rL в $L(0,2\pi)$ и приближение сплайн-функциями // Там же. – 1970. – **7**, № 1. – С. 43 – 52.
28. *Субботин Ю. Н.* Приближение „сплайн”-функциями и оценки поперечников // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1971. – **109**. – С. 35 – 60.
29. *Маковоз Ю. И.* Поперечники некоторых функциональных классов в пространстве L // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. – 1969. – № 4. – С. 19 – 28.
30. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
31. *Pinkus A.* On n-widths of periodic functions // J. Anal. Math. – 1979. – **35**. – P. 209 – 235.

32. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. – Berlin etc.: Springer, 1985. – 291 p.
33. *Лигун А. А.* О поперечниках некоторых классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. – 1980. – **27**, № 1. – С. 61–75.
34. *Маковоз Ю. И.* Поперечники соболевских классов и сплайны, наименее уклоняющиеся от нуля // Там же. – 1979. – **26**, № 5. – С. 805 – 812.
35. *Кушпель А. К.* Точные оценки поперечников классов сверток // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – **52**, № 6. – С. 1305–1322.
36. *Кушпель А. К.* Оценки поперечников классов сверток в пространствах C и L // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 8. – С. 1070–1076.
37. *Шевалдин В. Т.* Поперечники классов сверток с ядром Пуассона // Мат. заметки. – 1992. – **51**, № 6. – С. 126–136.
38. *Шевалдин В. Т.* Оценки снизу поперечников классов периодических функций с ограниченной дробной производной // Там же. – 1993. – **52**, № 2. – С. 145–151.
39. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Оценки снизу поперечников классов сверток периодических функций в метриках C и L // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1112–1121.
40. *Нгуен Тхи Тхьеу Хоа.* Экстремальные задачи на некоторых классах гладких периодических функций: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – М., 1994.
41. *Сердюк А. С.* Оцінки поперечників та найкращих наближень класів згорток періодичних функцій // Ряди Фур'є: теорія і застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 1998. – **20**. – С. 286–299.

Одержано 19.07.2004