УДК 517.944

Ю. О. Митропольський (Ін-т математики НАН України, Київ),
С. Г. Хома-Могильська (Тернопіл. акад. нар. госп-ва)

УМОВИ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВОЇ ПЕРІОДИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО ЛІНІЙНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. I

We consider the boundary-value periodic problem $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + \omega) = u(x, t)$. By representing a solution of this problem in the form $u(x, t) = u^0(x, t) + \tilde{u}(x, t)$, where $u^0(x, t)$ is a solution of the corresponding homogeneous problem and $\tilde{u}(x, t)$ is the exact solution of the nonhomogeneous equation such that $\tilde{u}(x, t + \omega) = \tilde{u}(x, t)$, we obtain conditions of solvability of the boundary-value nonhomogeneous periodic problem for certain values of a period ω. We show that the obtained solution formula concludes the results established earlier.

На основі зображення розв'язку крайової періодичної задачі $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + \omega) = u(x, t)$ у вигляді $u(x, t) = u^0(x, t) + \tilde{u}(x, t)$, де $u^0(x, t)$ — розв'язок відповідної однорідної задачі, а $\tilde{u}(x, t)$ — точний розв'язок неоднорідного рівняння, такий, що $\tilde{u}(x, t + \omega) = \tilde{u}(x, t)$, одержано умови розв'язності крайової неоднорідної періодичної задачі для конкретних значень періоду ω. Показано, що у знайденій формулі розв'язку містяться відомі раніше результати.

1. Вступ. Постановка задачі. При розв'язанні крайових задач для рівнянь з частинними похідними першочерговими є питання про встановлення умов їх розв'язності та існування єдиного розв'язку вказаних задач [1]. Як приклад можна навести відомі умови Шапіро – Лопатинського, що стосуються розв'язності крайових задач для еліптичних рівнянь.

Наша мета полягає в тому, щоб провести повне дослідження умов розв'язності крайової періодичної задачі $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + \omega) = u(x, t)$ для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$ в залежності від значення періоду ω. Щоб дати відповідь на запитання, що спонукало нас зайнятися даною проблемою, для початку наведемо два різних результати існування розв'язку одного і того ж нелінійного гіперболічного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F(x, t, u)$, одержані П. Рабіновичем [2, 3] і чеськими математиками О. Вейводою і М. Штедри [4]. Згідно з результатом П. Рабіновича [2], єдиний розв'язок (навіть класичний) нелінійної крайової періодичної задачі

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F(x, t, u), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \boldsymbol{R}, \tag{2}$$

$$u(0, t + 2\pi) = u(x, t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \boldsymbol{R}, \tag{3}$$

при достатній гладкості функції $F(x, t, u)$ за всіма змінними і при достатньо малому значенні параметра ε завжди зображується у вигляді $u(x, t) = u^0(x, t) + \varepsilon w(x, t)$, де $u^0(x, t)$ — розв'язок однорідного рівняння $u^0_{tt} - u^0_{xx} = 0$, а $w(x, t)$ — розв'язок неоднорідного рівняння (1). З іншого боку, згідно з результатом О. Вейводи і М. Штедри [4], розв'язок задачі (1) – (3) існує лише для спеціального класу функцій, а саме: $A_3 = \{g : g(x, t) = g(\pi - x, t + \omega/2) = g(x, t + \omega)\}$, причому єдиний розв'язок може існувати лише тоді, коли $u^0(x, t) \equiv 0$. Зауважимо, що робота [4] опублікована у 1984 році, а результати П. Рабіновича — у 1967 і 1969 роках. Як не дивно, але у вказаній роботі О. Вейводи і М. Штедри немає навіть посилання на роботу П. Рабіновича, а отже, немає порівняння отриманих результатів. Природно, виникають запитання: у якому ж вигляді існує єдиний розв'язок крайової періодичної задачі (1) – (3)? А можливо, справедливими є обидва результати? Відповідь на них дають проведені нами дослідження.

Слід відмітити, що вивчення нелінійної крайової періодичної задачі (1) – (3) тісно пов'язане з існуванням єдиного розв'язку відповідної лінійної неоднорідної крайової періодичної задачі

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \boldsymbol{R}, \tag{4}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \boldsymbol{R}, \tag{5}$$

$$u(x, t+\omega) = u(x, t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \boldsymbol{R}, \tag{6}$$

при $\omega = 2\pi$. Нами встановлено, що спеціально введені класи функцій A_i, $i = 1$, 2, 3, О. Вейводи і М. Штедри [4] є додатковими умовами для існування єдиного розв'язку задачі (4) – (6). У цих класах функцій розв'язок відповідної однорідної крайової періодичної задачі

$$u^0_{tt} - u^0_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \boldsymbol{R}, \tag{7}$$

$$u^0(0, t) = u^0(\pi, t) = 0, \quad t \in \boldsymbol{R}, \tag{8}$$

$$u^0(x, t+\omega) = u^0(x, t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \boldsymbol{R}, \tag{9}$$

завжди тривіальний $\left(u^0(x, t) \equiv 0,\ 0 \le x \le \pi,\ t \in \boldsymbol{R}\right)$, у той час як відомо, що задача (7) – (9) має незчисленну множину розв'язків. Таким чином, введені в роботі [4] класи функцій A_i, $i = 1, 2, 3$, в яких існує єдиний розв'язок як задачі (4) – (6), так і задачі (1) – (3), виключають питання про розв'язність однорідної крайової періодичної задачі (7) – (9), а отже, результат П. Рабіновича [2], на нашу думку, є вагомішим, ніж результат О. Вейводи і М. Штедри [4]. Але зазначимо, що результат П. Рабіновича одержано також для спеціального класу функцій, а саме, класу нескінченно диференційовних тригонометричних поліномів вигляду $\sum_{k=1}^{n} u_k(t) \sin kx$, і на сьогодні ще не встановлено, котрий результат містить більш широку інформацію про розв'язки нелінійної крайової періодичної задачі (1) – (3), що мають вигляд $u(x, t) = u^0(x, t) + \varepsilon w(x, t)$, де $u^0(x, t)$ — нетривіальний розв'язок відповідної однорідної задачі (7) – (9). Чи, взагалі кажучи, можливе таке зображення?

2. Частинні періодичні розв'язки неоднорідного лінійного рівняння другого порядку. Введемо деякі позначення. Простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times \boldsymbol{R}$, будемо позначати через C_π. Символом $C_\pi^{k,l}$ будемо позначати простір таких функцій $u \in C_\pi$, що $D_t^k D_x^l u \in C_\pi$. Позначимо через $G_{\pi t}$ простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times \boldsymbol{R}$ разом із похідною по t. Символом Q_ω позначимо простір функцій $g(x, t)$, які задовольняють на $[0, \pi] \times \boldsymbol{R}$ співвідношення $g(x, t+\omega) = g(x, t)$, тобто Q_ω — простір ω-періодичних функцій по змінній t. Сюди будемо включати і ω-періодичні функції $\mu = \mu(t)$ однієї змінної. У подальшому викладі через $L(X, Y)$ будемо позначати простір лінійних і обмежених відображень X в Y.

Безпосередньою перевіркою переконуємось у справедливості таких тверджень.

Теорема А [1, 4]. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \cap Q_\omega$, *то функція*

$$\tilde{u}_1(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau \equiv (S_1 g)(x, t) \tag{10}$$

є класичним ω*-періодичним по* t *розв'язком задачі* (4), (6).

Теорема B [1, 4]. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \cap Q_\omega$, *то функція*

$$\tilde{u}_2(x,t) = -\frac{1}{2}\int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau \equiv (S_2 g)(x,t) \tag{11}$$

є класичним ω*-періодичним по* t *розв'язком задачі* (4), (6).

Теорема C [1, 4]. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \cap Q_\omega$, *то функція*

$$\tilde{u}_H(x,t) = \frac{1}{2}(S_1 g + S_2 g)(x,t) \equiv (Sg)(x,t),$$

де

$$(Sg)(x,t) = -\frac{1}{4}\int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau - \frac{1}{4}\int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau, \tag{12}$$

є класичним ω*-періодичним по* t *розв'язком задачі* (4), (6).

Крім цього, оператор S має такі властивості:

$$S \in L(C_\pi \cap Q_\omega,\ C_\pi^{1,1} \cap Q_\omega), \tag{13}$$

$$S \in L(G_{\pi t} \cap Q_\omega,\ C_\pi^{2,2} \cap Q_\omega). \tag{14}$$

Більш того, якщо $g \in G_{\pi t} \cap A_2 = \{ g\colon g(x,t) = g(\pi - x, t + \pi) = g(x, t + 2\pi) \}$, то функція $\tilde{u}(x,t) = (Sg)(x,t)$ має властивість $\tilde{u}(\pi - x, t + \pi) = \tilde{u}(x,t)$, тобто

$$(Sg)(\pi - x, t + \pi) = (Sg)(x,t). \tag{15}$$

***Зауваження* 1.** Отже, на підставі теореми 3 і рівності (15) стверджуємо, що функція

$$\tilde{u}(\pi - x, t + \pi) = (Sg)(\pi - x, t + \pi) \equiv (Sg)(x,t)$$

при $g \in G_{\pi t} \cap A_2$ є також розв'язком неоднорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = g(x,t)$ у класі 2π-періодичних функцій.

3. Умови розв'язності. Встановимо умови існування єдиного розв'язку лінійної неоднорідної крайової періодичної задачі (4) – (6) у припущенні, що $g(x, t + \omega) = g(x,t)$.

Методом Фур'є легко доводиться, що загальним розв'язком однорідної періодичної задачі (7), (9) є функція

$$u^0(x,t) = Ax + B + \sum_{k=1}^\infty \left(A_k^1 \cos\nu_k x + A_k^2 \sin\nu_k x\right)\cos\nu_k t + \\ + \sum_{k=1}^\infty \left(A_k^3 \cos\nu_k x + A_k^4 \sin\nu_k x\right)\sin\nu_k t, \tag{16}$$

де $\nu_k = 2\pi k/\omega$, A, B, A_k^1, A_k^2, A_k^3, A_k^4, $k \in \boldsymbol{N}$, — довільні сталі.

Припустимо, що відомий частинний розв'язок $\tilde{u}(x,t)$ неоднорідного рівняння (4) такий, що $\tilde{u}(x, t + \omega) = \tilde{u}(x,t)$.

Взагалі кажучи, такі розв'язки дійсно існують і при $g \in G_{\pi t} \cap Q_\omega$ задаються формулами (10) – (12), тобто $\tilde{u}(x,t) = \tilde{u}_1(x,t) \equiv (S_1 g)(x,t)$, або $\tilde{u}(x,t) = \tilde{u}_2(x,t) \equiv (S_2 g)(x,t)$, або $\tilde{u}(x,t) = \tilde{u}_H(x,t) \equiv (Sg)(x,t)$.

Тепер, використовуючи формулу (16), будемо шукати розв'язок крайової періодичної задачі (4) – (6) для неоднорідного лінійного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = g(x,t)$ у вигляді

$$u(x,t) = u^0(x,t) + \tilde{u}(x,t) \equiv$$

$$\equiv Ax + B + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1\cos\nu_k x + A_k^2\sin\nu_k x\right)\cos\nu_k t +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^3\cos\nu_k x + A_k^4\sin\nu_k x\right)\sin\nu_k t + \tilde{u}(x,t), \tag{17}$$

де $\nu_k = 2\pi k/\omega$, A, B, A_k^i, $i = 1, 2, 3, 4$, $k \in \boldsymbol{N}$, — довільні сталі, $\tilde{u}(x,t)$ — частинний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння (4), такий, що $\tilde{u}(x, t+\omega) = \tilde{u}(x,t)$. Наприклад, він може визначатись однією з формул (10) – (12).

Очевидно, що розв'язок (17) буде єдиним формальним розв'язком крайової періодичної задачі (4) – (6), якщо при врахуванні крайових умов $u(0,t) = u(\pi, t) = 0$ система

$$B + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1\cos\nu_k t + A_k^3\sin\nu_k t\right) + \tilde{u}(0,t) = 0,$$

$$A\pi + B + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1\cos\nu_k \pi + A_k^2\sin\nu_k \pi\right)\cos\nu_k t + \tag{18}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^3\cos\nu_k \pi + A_k^4\sin\nu_k \pi\right)\sin\nu_k t + \tilde{u}(\pi,t) = 0$$

відносно невідомих коефіцієнтів A, B, A_k^i, $i = 1, 2, 3, 4$, $k \in \boldsymbol{N}$, має єдиний розв'язок. Проведемо дослідження системи (18) в залежності від конкретно вибраного періоду ω і покажемо, що ряд результатів, одержаних нами раніше, міститься у формулі (17).

4. Основна теорема. Нехай $\nu_k = 2\pi k/\omega \notin \boldsymbol{Q}$, $k \in \boldsymbol{N}$, тобто $\omega \neq 2\pi p/q$, p, $q \in \boldsymbol{N}$.

Припустимо, що ω-періодичні функції $\tilde{u}(0,t)$ і $\tilde{u}(\pi,t)$ розкладаються у такі рівномірно збіжні ряди Фур'є:

$$\tilde{u}(0,t) = \frac{a_0^0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^0\cos\nu_k t + b_k^0\sin\nu_k t\right), \tag{19}$$

$$\tilde{u}(\pi,t) = \frac{a_0^\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^\pi\cos\nu_k t + b_k^\pi\sin\nu_k t\right), \tag{20}$$

де a_k^0, a_k^π, b_k^0, b_k^π — відомі коефіцієнти Фур'є, які визначаються за формулами

$$a_k^0 = \frac{2}{\omega}\int_{-\omega/2}^{\omega/2}\tilde{u}(0,t)\cos\frac{2k\pi}{\omega}t\,dt, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

$$b_k^0 = \frac{2}{\omega}\int_{-\omega/2}^{\omega/2}\tilde{u}(0,t)\sin\frac{2k\pi}{\omega}t\,dt, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$a_k^\pi = \frac{2}{\omega}\int_{-\omega/2}^{\omega/2}\tilde{u}(\pi,t)\cos\frac{2k\pi}{\omega}t\,dt, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

$$b_k^\pi = \frac{2}{\omega}\int\limits_{-\omega/2}^{\omega/2}\tilde{u}(\pi,t)\cos\frac{2k\pi}{\omega}t\,dt, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Основна теорема. *Нехай функції* $\tilde{u}(0,t)$ *і* $\tilde{u}(\pi,t)$ *розкладаються у рівномірно збіжні ряди Фур'є* (19) *і* (20). *Якщо* $\nu_k = 2\pi k/\omega$ *не є раціональним числом, тобто* $\nu_k \notin \boldsymbol{Q}$, $k \in \boldsymbol{N}$, *то система* (18) *має єдиний розв'язок, а отже, крайова періодична задача* (4) – (6) *має єдиний формальний розв'язок.*

Доведення. Справді, при виконанні умов основної теореми, підставляючи ряди (19) і (20) у систему (18), одержуємо

$$B = -\frac{a_0^0}{2}, \qquad A_k^1 = -a_k^0, \qquad A_k^3 = -b_k^0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$A\pi + B = -\frac{a_0^\pi}{2}, \qquad A_k^1\cos\nu_k\pi + A_k^2\sin\nu_k\pi = -a_k^\pi, \tag{21}$$

$$A_k^3\cos\nu_k\pi + A_k^4\sin\nu_k\pi = -b_k^\pi, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Оскільки $\nu_k \notin \boldsymbol{Q}$, то $\sin\nu_k\pi \neq 0$. Отже, згідно з рівностями (21), коефіцієнти A, B, A_k^i, $i = 1, 2, 3, 4$, $k \in \boldsymbol{N}$, визначаються однозначно, що й потрібно було довести.

***Зауваження* 2.** Дане твердження основної теореми давно відоме у літературі і було одержане іншими методами [5]. Наші дослідження спрямовані на більш детальне вивчення умов існування єдиного розв'язку крайової періодичної задачі (4) – (6), і можна стверджувати, що для розглянутого випадку $2\pi/\omega \notin \boldsymbol{Q}$ ми вперше отримали формулу для відшукання єдиного формального розв'язку цієї задачі у вигляді

$$u(x,t) = u^0(x,t) + \tilde{u}(x,t) \equiv$$

$$\equiv Ax + B + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1\cos\nu_k x + A_k^2\sin\nu_k x\right)\cos\nu_k t +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^3\cos\nu_k x + A_k^4\sin\nu_k x\right)\sin\nu_k t + (Sg)(x,t), \tag{22}$$

де функція Sg визначена формулою (12), а коефіцієнти A_k, B — формулами (21).

5. 2π-Періодичні розв'язки крайової 2π-періодичної задачі. Припустимо, що $\omega = 2\pi p/q$, $p = 2s - 1$, $q = 2m - 1$, $s, m \in \boldsymbol{N}$, $(p,q) = 1$, де запис $(p,q) = 1$ означає, що числа p і q є взаємно простими.

***5$_1$.* ($\boldsymbol{\omega = 2\pi}$).** Розглянемо частковий випадок, коли $p = q = 1$, $\omega = 2\pi$. Тоді $\nu_k = k$, $k \in \boldsymbol{N}$, і система (18) (розв'язності крайової 2π-періодичної задачі) набирає вигляду

$$\begin{gathered} B + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1\cos kt + A_k^3\sin kt\right) + \tilde{u}(0,t) = 0, \\ A\pi + B + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1\cos k\pi\cos kt + A_k^3\cos k\pi\sin kt\right) + \tilde{u}(\pi,t) = 0. \end{gathered} \tag{23}$$

Оскільки ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1\cos kt + A_k^3\sin kt\right)$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1\cos k\pi\cos kt + A_k^3\cos k\pi\sin kt\right)$$

збігаються між собою при $k = 2n$ і набувають протилежних значень при $k = 2n + 1$, то найпростішим випадком розв'язності системи (23) буде випадок, коли існує клас функцій $g(x, t)$ правої частини неоднорідного рівняння (4), для яких частинний розв'язок $\tilde{u}(x, t)$ періодичної задачі (4) – (6) при $x = 0$ і $x = \pi$ набуває постійного значення, тобто

$$\tilde{u}(0, t) = \text{const}, \qquad \tilde{u}(\pi, t) = \text{const}. \tag{24}$$

Тоді, припускаючи, що виконуються умови (24), на підставі властивостей рядів Фур'є із системи (23) маємо

$$B = -\tilde{u}(0, t), \qquad A_k^1 = 0, \qquad A_k^3 = 0, \quad k \in \boldsymbol{N}, \qquad A\pi + B = -\tilde{u}(\pi, t),$$

або

$$B = -\tilde{u}(0, t), \quad A = \frac{1}{\pi}(\tilde{u}(0, t) - \tilde{u}(\pi, t)), \quad A_k^1 = 0, \quad A_k^3 = 0, \quad k \in \boldsymbol{N}. \tag{25}$$

Отже, при виконанні умов (24) у випадку $\omega = 2\pi$ лінійна неоднорідна крайова періодична задача (4) – (6) має безліч розв'язків, які задаються формулою

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^2\cos kt + A_k^4\sin kt\right)\sin kx +$$

$$+ \tilde{u}(x, t) + \frac{x}{\pi}(\tilde{u}(0, t) - \tilde{u}(\pi, t)) - \tilde{u}(0, t), \tag{26}$$

де A_k^2, A_k^4 — довільні сталі.

Однак існує клас 2π-періодичних функцій

$$A_2 = \{\, g\colon g(x, t) = g(\pi - x, t + \pi) = g(x, t + 2\pi)\,\}, \tag{27}$$

визначених на $[0, \pi] \times \boldsymbol{R}$, для яких розв'язок крайової періодичної задачі (4) – (6) єдиний у тому розумінні, що розв'язок

$$u_1^0(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^2\cos kt + A_k^4\sin kt\right)\sin kx \tag{28}$$

відповідної однорідної крайової періодичної задачі (7) – (9) при $\omega = 2\pi$ у класі функцій A_2 є тривіальним.

Справджується таке твердження.

Лема 1. *Якщо функція* $u_1^0(x, t)$, *що визначена формулою* (28), *є розв'язком однорідної крайової періодичної задачі* (7) – (9) *при* $\omega = 2\pi$ *і* $u_1^0 \in A_2$, *то* $u_1^0(x, t) \equiv 0$.

Доведення. Оскільки $u_1^0 \in A_2$, то виконується умова

$$u_1^0(\pi - x, t + \pi) = u_1^0(x, t). \tag{29}$$

Підставляючи (28) у рівність (29), знаходимо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^2\cos k(t+\pi)+A_k^4\sin k(t+\pi)\right)\sin k(\pi-x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^2\cos kt+A_k^4\sin kt\right)\sin kx$$

або

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^2\cos kt+A_k^4\sin kt\right)\sin kx = 0.$$

Звідси $A_k^2 \equiv 0$ і $A_k^4 \equiv 0$, $k \in \boldsymbol{N}$, що й потрібно було довести.

Тепер, покладаючи $\tilde{u}(x,t) = (Sg)(x,t)$, де функція $\tilde{u}(x,t) = (Sg)(x,t)$ визначається згідно з формулою (12), одержуємо наступні відомі твердження.

Лема 2 [1]. *Якщо* $g \in C_\pi \cap A_2$, *то функції* $\tilde{u}(0,t) = (Sg)(0,t)$ *і* $\tilde{u}(\pi,t) = (Sg)(\pi,t)$ *є тотожно сталими.*

Таким чином, припускаючи, що $g \in C_\pi \cap A_2$, на підставі лем 1 і 2, використовуючи рівності (12) і (26), отримуємо відому формулу точного розв'язку [1, с. 60]

$$u(x,t) = (R_2 g)(x,t) \equiv$$

$$\equiv (Sg)(x,t) + \frac{\pi-x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi\int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau + \frac{x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi\int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau \qquad (30)$$

крайової 2π-періодичної задачі (4) – (6), яку вперше наведено в роботі [1, с. 60].

Теорема 1 [1]. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \cap A_2$, *то функція* $u(x,t) = (R_2 g)(x,t)$, *визначена формулою* (30), *є єдиною функцією із простору* $C_\pi^{2,2} \cap A_2$, *яка задовольняє умови крайової періодичної задачі* (4) – (6) *при* $\omega = 2\pi$.

5₂. ($\omega = 2\pi$, продовження). Розглянемо ще один частинний випадок розв'язності системи (23) у класі 2π-періодичних функцій, визначених таким чином: $A_2^+ = \{g\colon g(x,t) = -g(\pi-x,t) = -g(x,\pi-t) = g(x,-t)\}$.

Безпосередньою перевіркою переконуємось у справедливості таких тверджень.

Лема 3. *Якщо* $g \in A_2^+$, *то* $g \in A_2$.

Лема 4. *Якщо* $g \in C_\pi \cap A_2^+$, *то* $Sg \in C_\pi^{1,1} \cap A_2^+$.

Теорема 2. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \cap A_2^+$, *то функція* $u(x,t) = (R_2 g)(x,t)$, *визначена формулою*

$$u(x,t) = \left(R_2^+ g\right)(x,t) \equiv (Sg)(x,t) + \frac{\pi-2x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi\int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau, \qquad (31)$$

є єдиною функцією із простору $C_\pi^{2,2} \cap A_2^+$, *яка задовольняє умови крайової періодичної задачі* (4) – (6) *при* $\omega = 2\pi$, *причому*

$$\left\|\left(R_2^+ g\right)(x,t)\right\|_{C_\pi} \le \frac{\pi^2}{2}\|g\|_{C_\pi},$$

$$\left\|\left(R_2^+ g\right)_t(x,t)\right\|_{C_\pi} \le \frac{\pi}{2}\|g\|_{C_\pi}, \qquad (32)$$

$$\left\| \left(R_2^+ g\right)_x (x, t) \right\|_{C_\pi} \leq \pi \| g \|_{C_\pi},$$

де $\| \varphi(x, t) \|_{C_\pi} = \sup\limits_{(x,t) \in [0, \pi] \times \mathbf{R}} | \varphi(x, t) |$.

***Зауваження* 3.** Враховуючи те, що оператор R_2^+ переводить парну по t функцію $g(x, t)$ в парну функцію $R_2^+ g$, нами доведено, що розв'язок $u(x, t) = \left(R_2^+ g\right)(x, t)$ крайової періодичної задачі (4) – (6) при $\omega = 2\pi$ у класі функцій A_2^+ має вигляд

$$u(x, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{2s-1}(x) \cos(2s-1)t.$$

5_3. ($\omega = 2\pi$, *продовження*). Зауважимо, що дослідження умов розв'язності крайової періодичної задачі (4) – (6) при $\omega = 2\pi$ у попередніх пунктах проводилося на основі використання частинного розв'язку $\tilde{u}(x, t) = (Sg)(x, t)$, тобто на основі формули (12).

Однак у випадку $\omega = 2\pi$, як і для подальших досліджень, для розв'язності зчисленної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (23) можна використати і частинний розв'язок $\tilde{u}_1(x, t) = (S_1 g)(x, t)$, записаний у вигляді формули (10) $\tilde{u}(x, t) = \tilde{u}_1(x, t)$. Звідси одержуємо

$$\tilde{u}_1(0, t) \equiv 0, \quad t \in \boldsymbol{R},$$
$$\tilde{u}_1(\pi, t) = -\frac{1}{2} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau, \quad t \in \boldsymbol{R}. \tag{33}$$

Тоді на основі перших рівнянь систем (23) і (33) знаходимо

$$B = 0, \quad A_k^1 = 0, \quad A_k^3 = 0, \quad k \in \boldsymbol{N}, \tag{34}$$

і друге рівняння системи (23) при одержаних $B = A_k^1 = A_k^3 = 0$ набирає вигляду

$$A\pi + \tilde{u}_1(\pi, t) = 0. \tag{35}$$

Таким чином, з (35) маємо $A = -\tilde{u}_1(\pi, t)/\pi$, що суперечить визначеності числа A (A в цьому випадку є функцією t, $t \in \boldsymbol{R}$). Зрозуміло, що в такому разі повинні існувати додаткові умови розв'язності крайової періодичної задачі (4) – (6) при $\omega = 2\pi$. На нашу думку, це пов'язано з структурою самого розв'язку задачі (4) – (6) при $\omega = 2\pi$, який при цьому має вигляд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^2 \cos kt + A_k^4 \sin kt\right) \sin kx + \tilde{u}_1(x, t) - \frac{x}{\pi} \tilde{u}_1(\pi, t), \tag{36}$$

де A_k^2, A_k^4, $k \in \boldsymbol{N}$, — довільні сталі. Зауважимо, що функція

$$u_1^0(x, t) = -\frac{x}{\pi} \tilde{u}_1(\pi, t) \equiv \frac{x}{2\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau, \tag{37}$$

яка входить до розв'язку (36), не завжди буде розв'язком однорідної крайової періодичної задачі $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0$, $u^0(0, t) = u^0(\pi, t) = 0$, $u^0(x, t + 2\pi) = u^0(x, t)$, оскільки безпосередньою перевіркою переконуємося, що $u_{1xx}^0(x, t) \equiv 0$, $x \in [0, \pi]$, $t \in \boldsymbol{R}$, а $u_{1tt}^0 \neq 0$ (не для кожної функції $g(x, t)$ друга похідна u_{1tt}^0 може дорівнювати нулю). Покажемо, що дана проблема розв'язності крайової періодичної задачі (4) – (6) при $\omega = 2\pi$ тісно пов'язана з вибором невідомих коефіцієнтів A_k^2 і A_k^4.

Має місце таке твердження.

Лема 5. *Для кожної функції* $\mu(t) \in C^1(\boldsymbol{R}) \cap Q_{2\pi}$, *яка розкладається у рівномірно збіжний ряд Фур'є*

$$\mu(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt, \tag{38}$$

справедливим є зображення

$$\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\,d\alpha - \frac{x}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^2 \cos kt + A_k^4 \sin kt\right)\sin kx, \tag{39}$$

де $A_k^2 = a_k / k$, $A_k^4 = b_k / k$, $k \in \boldsymbol{N}$.

Отже, на підставі леми 5 розв'язок (36) крайової періодичної задачі (4) – (6) при $\omega = 2\pi$ можна зобразити у вигляді

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\,d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau + \\ + \frac{x}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau - \int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha\right\}. \tag{40}$$

Це дає можливість сформулювати результат, аналогічний результату П. Рабіновича [6].

Теорема 3. *Нехай* $g \in G_{\pi t} \cap Q_{2\pi}$. *Тоді для кожної функції* $\mu(t) \in C^1 \cap \cap Q_{2\pi}$, *яка задовольняє рівняння*

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha = \int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau, \tag{41}$$

функція

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\,d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau \equiv u^0(x,t) + \tilde{u}_1(x,t) \tag{42}$$

є єдиним класичним розв'язком крайової 2π*-періодичної задачі* (4) – (6).

***Зауваження* 4.** Отже, на нашу думку, сформульована теорема 3 підтверджує результат роботи [2] (результат П. Рабіновича) про можливість існування класичних 2π-періодичних розв'язків крайової періодичної задачі (4) – (6) при $\omega = 2\pi$ у вигляді $u(x,t) = u^0(x,t) + \tilde{u}_1(x,t)$, де $u^0(x,t)$ — розв'язок однорідного рівняння $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0$, а $\tilde{u}_1(x,t)$ — розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = g(x,t)$.

Більш того, (41) є рівнянням для відшукання невідомої функції $\mu(t)$, оскільки воно означає рівність двох функцій однієї змінної t. З іншого боку, рівність (41) є умовою виділення класу функцій $g(x,t)$, для яких справедливою є теорема 3. Так, враховуючи, що для кожної неспадної функції $\mu(t) \in C(\boldsymbol{R}) \cap \cap Q_{2\pi}$ виконується умова

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha)\, d\alpha = 0, \quad t \in \boldsymbol{R},$$

має місце наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай* $g \in G_{\pi t} \cap Q_{2\pi}$ *і функція* $g(x, t)$ *задовольняє рівняння*

$$\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau = 0, \quad t \in \boldsymbol{R}. \tag{43}$$

Тоді для кожної непарної функції $\mu(t) \in C^1 \cap Q_{2\pi}$ *функція* $u(x, t)$, *яка визначена формулою* (42), *є єдиним класичним розв'язком крайової періодичної задачі* (4) – (6) *при* $\omega = 2\pi$.

Висновки. 1. Для випадку $2\pi / \omega \notin \boldsymbol{Q}$, ми одержали формулу для відшукання єдиного формального розв'язку крайової ω-періодичної задачі (4) – (6) — формулу (22).

2. На основі умови розв'язності (18) крайової ω-періодичної задачі (4) – (6) одержано ряд відомих результатів.

3. У випадку $\omega = 2\pi$ на підставі умови розв'язності (18) підтверджено результат П. Рабіновича, який сформульовано у вигляді теореми 3. Це результат про можливість існування 2π-періодичних розв'язків крайової періодичної задачі (4) – (6) у вигляді $u(x, t) = u^0(x, t) + \tilde{u}_1(x, t)$, де $u^0(x, t)$ — розв'язок однорідного рівняння $u^0_{tt} - u^0_{xx} = 0$, а $\tilde{u}_1(x, t)$ — розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$.

1. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
2. *Rabinowitz P.* Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations // Communs Pure and Appl. Math. – 1967. – **20**, № 1. – P. 145 – 205.
3. *Rabinowitz P.* Periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations // Ibid. – 1969. – **20**, № 1. – P. 15 – 39.
4. *Вейвода О., Штедры М.* Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 10. – С. 1733 – 1739.
5. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
6. *Хома Г. П., Хома Н. Г., Хома-Могильська С. Г.* Про розв'язки періодичної задачі для гіперболічного рівняння другого порядку // ІІІ Всеукр. наук. конф. „Нелінійні проблеми аналізу" (9 – 12 вересня 2003 р., Івано-Франківськ): Тези доп. – С. 108.

Одержано 16.02.2004