УДК 519.21

М. П. Карликова (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О СЛАБОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО ПОТОКА СО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

We prove that a stochastic differential equation for an evolutionary flow with interaction whose coefficients do not satisfy the global Lipschitz condition possesses a weak solution.

Доведено, що стохастичне диференціальне рівняння для еволюційного потоку зі взаємодією з коефіцієнтами, що не задовольняють глобальну умову Ліпшиця, має слабкий розв'язок.

1. Введение. В настоящей статье рассматривается следующее уравнение [1] для потока со взаимодействием:

$$
\begin{gathered}
dx(u,t) = a\big(x(u,t),\mu_t\big)\,dt + b\big(x(u,t),\mu_t\big)\,dw(t), \\
x(u,0) = u, \quad t \ge 0, \quad u \in \mathbb{R}^d,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $\mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot,t)^{-1}$ — случайная мера, определяемая равенством

$$
\mu_t(\Delta) = \mu_0\big(u : x(u,t) \in \Delta\big), \quad \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),
$$

для начальной вероятностной меры μ_0. Здесь $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ — борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^d$. Это уравнение можно рассматривать как описание движения континуальной системы частиц в случайной среде, когда траектории отдельных частиц зависят от положений остальных частиц.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ пространство вероятностных мер в $\mathbb{R}^d$ и определим на нем метрику Вассерштейна

$$
\gamma(\mu,\nu) = \inf_{\kappa \in Q(\mu,\nu)} \iint_{\mathbb{R}^d} \frac{\|u-v\|}{1+\|u-v\|}\,\kappa(du,dv).
$$

Здесь $Q(\mu,\nu)$ — множество вероятностных мер в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, имеющих μ и ν своими проекциями. Известно [2], что метрика γ соответствует слабой сходимости и $(\mathfrak{M},\gamma)$ — полное сепарабельное метрическое пространство.

В [1] доказан следующий факт.

Теорема 1. *Пусть для некоторого* $L > 0$ *и для любых* $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^d$, ν_1, $\nu_2 \in \mathfrak{M}$

$$
\big\|a(u_1,\nu_1) - a(u_2,\nu_2)\big\| + \big\|b(u_1,\nu_1) - b(u_2,\nu_2)\big\| \le L\big(\|u_1-u_2\| + \gamma(\nu_1,\nu_2)\big).
$$

Тогда уравнение (1) *имеет единственное сильное решение.*

Для стохастических дифференциальных уравнений без взаимодействия (когда a и b не зависят от μ) существует другое общепринятое условие существования и единственности сильного решения [3]:

существуют $C > 0$ и последовательность $\{L_N,\ N \ge 1\}$ такие, что

$$
\forall\, u \in \mathbb{R}^d : \big\|a(u)\big\| + \big\|b(u)\big\| \le C(1+\|u\|),
$$

$$
\forall\, u, v \in B(0,N) : \big\|a(u)-a(v)\big\| + \big\|b(u)-b(v)\big\| \le L_N\big\|u-v\big\|.
$$

В данной статье сделана попытка перенести это условие на случай уравнений со взаимодействием. При этом важную роль будет играть мерозначный процесс $\{\mu_t,\ t \geq 0\}$, который в соответствии с [1] будем называть эволюционным процессом.

2. Слабая компактность семейства эволюционных мерозначных процессов. Прежде всего установим некоторые свойства решений уравнения (1).

Лемма 1. *Пусть* $\{a^\alpha, b^\alpha,\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *удовлетворяют условию*

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^d, \quad \mu \in \mathfrak{M}: \left\| a^\alpha(u,\mu) \right\| + \left\| b^\alpha(u,\mu) \right\| \leq C(1 + \|u\|),$$

$\{x^\alpha,\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *удовлетворяют уравнениям*

$$dx^\alpha(u,t) = a^\alpha\big(x^\alpha(u,t), \mu_t^\alpha\big)dt + b^\alpha\big(x^\alpha(u,t), \mu_t^\alpha\big)dw(t),$$

$$x^\alpha(u,0) = u, \qquad \mu_t^\alpha = \mu_0^\alpha \circ x^\alpha(\cdot,t)^{-1},$$

причем семейство $\left\{\mu_0^\alpha,\ \alpha \in \mathfrak{A}\right\}$ *слабо компактно. Тогда*:

$$\forall\, p > 1 \quad \exists\, C_p > 0: \quad \forall\, t \in [0,1]$$

1) $\mathrm{E} \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} \left\| x^\alpha(u,t) \right\|^p \leq C_p\big(1 + \|u\|^p\big)$;

2) $\mathrm{E} \sup\limits_{t \leq s \leq t+\delta} \left\| x^\alpha(u,t) - x^\alpha(u,s) \right\|^p \leq C_p\big(1 + \|u\|^p\big)\delta^{p/2}$.

Доказательство. 1. Используя неравенство Буркхольдера [3], получаем

$$\mathrm{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \left\| x^\alpha(u,s) \right\|^p \leq$$

$$\leq C_p'\left(\|u\|^p + \mathrm{E}\int_0^t \left\| a^\alpha\big(x^\alpha(u,s), \mu_s^\alpha\big) \right\|^p ds + \mathrm{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \left\| \int_0^t b^\alpha\big(x^\alpha(u,\tau), \mu_\tau^\alpha\big) dw(\tau) \right\|^p \right) \leq$$

$$\leq C_p''\left(\|u\|^p + \mathrm{E}\int_0^t \left(1 + \left\| x^\alpha(u,s) \right\|^p\right) ds + \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathrm{E}\left(\int_0^t \left(1 + \left\| x^\alpha(u,s) \right\|^2\right) ds \right)^{p/2} \right) \leq$$

$$\leq C_p'''\left(\|u\|^p + \int_0^t \mathrm{E}\left(1 + \sup_{0 \leq \tau \leq s} \left\| x^\alpha(u,\tau) \right\|^p\right) ds \right),$$

откуда согласно лемме Гронуолла

$$\mathrm{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \left(1 + \left\| x^\alpha(u,s) \right\|^p\right) \leq C_p'''\big(1 + \|u\|^p\big) e^{C_p''' t}.$$

Тогда

$$\mathrm{E} \sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| x^\alpha(u,t) \right\|^p \leq C_p\big(1 + \|u\|^p\big).$$

2. Аналогично,

$$\mathrm{E} \sup_{t \leq s \leq t+\delta} \left\| x^\alpha(u,t) - x^\alpha(u,s) \right\|^p \leq$$

$$\leq C_p'\left(\delta^{p-1}\, \mathrm{E}\int_t^{t+\delta} \left\| a^\alpha\big(x^\alpha(u,\tau), \mu_\tau^\alpha\big) \right\|^p d\tau + \mathrm{E} \sup_{t \leq s \leq t+\delta} \left\| \int_t^s b^\alpha\big(x^\alpha(u,\tau), \mu_\tau^\alpha\big) dw(\tau) \right\|^p \right) \leq$$

$$\leq C_p''\left(\delta^{p-1}\mathrm{E}\int_t^{t+\delta}\left(1+\left\|x^\alpha(u,\tau)\right\|^p\right)d\tau+\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\mathrm{E}\left(\int_t^{t+\delta}\left(1+\left\|x^\alpha(u,\tau)\right\|^2\right)d\tau\right)\right)^{p/2} \leq$$

$$\leq C_p'''\delta^{p/2-1}\int_t^{t+\delta}\left(1+\left\|x^\alpha(u,\tau)\right\|^p\right)d\tau \leq C_p\left(1+\|u\|^p\right)\delta^{p/2}.$$

Лемма доказана.

Нам потребуется критерий слабой компактности семейства случайных элементов в $C([0,1],\mathfrak{M})$ из [1]. Рассмотрим две последовательности функций $\{f_n,\ n\geq 1\}$ и $\{g_N,\ n\geq 1\}$ в $C_b(\mathbb{R}^d)$ такие, что:

1) $f_1 \equiv 1 \quad \forall\, n\geq 2: f_n\in C_0(\mathbb{R}^d)$;

2) $\forall\, n\geq 1: \max\limits_{\mathbb{R}^d}\|f_n\| \leq 1$;

3) $\forall\, \varphi\in C_0(\mathbb{R}^d): \max\limits_{\mathbb{R}^d}\|\varphi\| \leq 1 \quad \exists\left\{f_{n_k},\ k\geq 1\right\}$:

$$\max_{\mathbb{R}^d}\left\|\varphi-f_{n_k}\right\|\to 0, \quad k\to\infty;$$

4) $\forall\, x\in\mathbb{R}^d,\ n\geq 1: 0 \leq g_n(x) \leq 1$;

5) $\forall\, x\in\mathbb{R}^d,\ \left\|x\right\|\leq n: g_n(x) = 0$;

6) $\forall\, x\in\mathbb{R}^d,\ \left\|x\right\|\geq n+1: g_n(x) = 1$.

Лемма 2 [1]. *Семейство* $\{\xi_\alpha,\ \alpha\in\mathfrak{A}\}$ *случайных элементов в* $C([0,1],\mathfrak{M})$ *слабо компактно тогда и только тогда, когда*:

1) *для каждого* $k\geq 1$ *семейство случайных процессов* $\{\langle\xi_\alpha, f_k\rangle,\ \alpha\in\mathfrak{A}\}$ *слабо компактно в* $C([0,1])$;

2) *семейство* $\{\langle\xi_\alpha, g_k\rangle,\ \alpha\in\mathfrak{A},\ k\geq 1\}$ *слабо компактно в* $C([0,1])$;

3) $\forall\, t\in[0,1]\ \ \forall\,\varepsilon>0: \sup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}}\mathrm{P}\{\langle\xi_\alpha(t), g_k\rangle>\varepsilon\},\ k\to\infty.$

Здесь использовано обозначение

$$\langle\mu, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(u)\mu(du).$$

Далее будем выбирать f_k удовлетворяющими условию Липшица с постоянными A_k, g_k — с общей постоянной A.

Приведенный критерий позволяет установить слабую компактность семейства эволюционных процессов, соответствующих уравнению (1), в терминах его коэффициентов.

Теорема 2. *В условиях леммы* 1 *семейство мерозначных процессов* $\{\mu_\cdot^\alpha,\ \alpha\in\mathfrak{A}\}$ *слабо компактно в* $C([0,1],\mathfrak{M})$.

Доказательство. Проверим условия леммы 2.

1. Для слабой компактности семейства случайных процессов $\{\xi^\alpha,\ \alpha\in\mathfrak{A}\}$ в $C([0,1])$ достаточно, чтобы [4]

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathrm{P}\Big\{\big|\xi^{\alpha}(0)\big|\geq N\Big\}\to 0,\quad N\to\infty,$$

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \frac{1}{\delta}\mathrm{P}\left\{\sup_{t\leq s\leq t+\delta}\big|\xi^{\alpha}(t)-\xi^{\alpha}(s)\big|>\varepsilon\right\}\to 0,\quad \delta\to 0+.$$

В рассматриваемом случае

$$\mathrm{P}\Big\{\Big|\Big\langle \mu_0^{\alpha}, f_k\Big\rangle\Big|\geq N\Big\} = 1\!\!1\Big\{\Big|\Big\langle \mu_0^{\alpha}, f_k\Big\rangle\Big|\geq N\Big\}\to 0,\quad N\to\infty,$$

равномерно по α, так как

$$\Big\langle \mu_0^{\alpha}, f_k\Big\rangle \leq \sup_{\mathbb{R}^d}\|f_k\| \leq 1.$$

Оценим теперь с помощью леммы 2 для $p>2$

$$\mathrm{E}\sup_{t\leq s\leq t+\delta}\Big|\Big\langle \mu_s^{\alpha}, f_k\Big\rangle-\Big\langle \mu_t^{\alpha}, f_k\Big\rangle\Big|^p =$$

$$= \mathrm{E}\sup_{t\leq s\leq t+\delta}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Big(f_k\big(x^{\alpha}(u,s)\big)-f_k\big(x^{\alpha}(u,t)\big)\Big)\mu_0^{\alpha}(du)\right|^p \leq$$

$$\leq \mathrm{E}\left(A_k\int\limits_{K_k}\mathrm{E}\sup_{t\leq s\leq t+\delta}\Big\|x^{\alpha}(u,t)-x^{\alpha}(u,s)\Big\|\mu_0^{\alpha}(du)\right)^p \leq$$

$$\leq A_k^p\int\limits_{K_k}C_p\Big(1+\|u\|^p\Big)\delta^{p/2}\mu_0^{\alpha}(du) \leq A_k^p\sup_{u\in K_k}\Big(1+\|u\|^p\Big)\delta^{p/2},$$

где K_k — компакт, на котором сосредоточена f_k. Отсюда

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{A}}\frac{1}{\delta}\mathrm{P}\left\{\sup_{t\leq s\leq t+\delta}\Big|\Big\langle \mu_s^{\alpha}, f_k\Big\rangle-\Big\langle \mu_t^{\alpha}, f_k\Big\rangle\Big|>\varepsilon\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta}\frac{A_k^p\sup_{u\in K_k}\Big(1+\|u\|^p\Big)}{\varepsilon^p}\delta^{p/2}\to 0,\quad \delta\to 0.$$

Следовательно, $\Big\{\Big\langle \mu_{\cdot}^{\alpha}, f_k\Big\rangle,\ \alpha\in\mathfrak{A}\Big\}$ слабо компактны в $C([0,1])$.

2. Имеем $\Big\langle \mu_0^{\alpha}, g_k\Big\rangle \leq 1$, поэтому первое условие слабой компактности в $C([0,1])$ для $\Big\{\Big\langle \mu_{\cdot}^{\alpha}, g_k\Big\rangle,\ \alpha\in\mathfrak{A},\ k\geq 1\Big\}$ выполнено. Далее,

$$\sup_{t\leq s\leq t+\delta}\Big|\Big\langle \mu_s^{\alpha}, g_k\Big\rangle-\Big\langle \mu_t^{\alpha}, g_k\Big\rangle\Big| \leq A\int\limits_{K_\varepsilon}\Big\|x^{\alpha}(u,s)-x^{\alpha}(u,t)\Big\|\mu_0^{\alpha}(du) + \frac{\varepsilon}{2},$$

где K_ε — такой компакт, что

$$\forall\,\alpha\in\mathfrak{A}:\ \mu_0^{\alpha}\Big(\mathbb{R}^d\setminus K_\varepsilon\Big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, как и в предыдущем пункте,

$$\frac{1}{\delta}\mathrm{P}\left\{\sup_{t\leq s\leq t+\delta}\Big|\Big\langle \mu_s^{\alpha}, g_k\Big\rangle-\Big\langle \mu_t^{\alpha}, g_k\Big\rangle\Big|>\varepsilon\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta}\mathrm{P}\left\{\sup_{t\leq s\leq t+\delta}\int\limits_{K_\varepsilon}\Big\|x^{\alpha}(u,s)-x^{\alpha}(u,t)\Big\|\mu_0^{\alpha}(du)>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\to 0,\quad \delta\to 0,$$

равномерно по α. Следовательно, $\left\{ \langle \mu^{\alpha}_{\cdot}, g_k \rangle, \ \alpha \in \mathfrak{A}, \ k \geq 1 \right\}$ слабо компактно в $C([0,1])$.

3. Проверим третье условие леммы 2:

$$\mathrm{P}\left\{ \langle \mu^{\alpha}_t, g_k \rangle > \varepsilon \right\} \leq \mathrm{P}\left\{ \mu^{\alpha}_0\left(u: \left\| x^{\alpha}(u,t) \right\| \geq k\right) > \varepsilon \right\} \leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{ \mu^{\alpha}_0\left(u: \|u\| \geq N, \ \left\| x^{\alpha}(u,t) \right\| \geq k\right) > \frac{\varepsilon}{2} \right\} +$$

$$+ \mathrm{P}\left\{ \mu^{\alpha}_0\left(u: \|u\| \leq N, \ \left\| x^{\alpha}(u,t) \right\| \geq k\right) > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left\{ \mu^{\alpha}_0(u: \|u\| \geq N) > \frac{\varepsilon}{2} \right\} + \mathrm{P}\left\{ \frac{\int_{\|u\| \leq N} \left\| x^{\alpha}(u,t) \right\|^2 \mu^{\alpha}_0(du)}{k^2} > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \leq$$

$$\leq \mathbb{1}\left\{ \mu^{\alpha}_0(u: \|u\| \geq N) > \frac{\varepsilon}{2} \right\} + \frac{C_2 \int_{\|u\| \leq N} \left(1 + \|u\|^2\right) \mu^{\alpha}_0(du)}{\varepsilon k^2}.$$

Последнее неравенство следует из леммы 1.

Выбирая N так, чтобы для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ выполнялось

$$\mu^{\alpha}_0(u: \|u\| \geq N) < \frac{\varepsilon}{2},$$

получаем

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathrm{P}\left\{ \langle \mu^{\alpha}_t, g_k \rangle > \varepsilon \right\} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда для любого набора* $\{u_1, u_2, \ldots, u_N\} \subset \mathbb{R}^d$ *семейство*

$$\left\{ x^{\alpha}(u_1, \cdot), x^{\alpha}(u_2, \cdot), \ldots, x^{\alpha}(u_N, \cdot), \ \alpha \in \mathfrak{A} \right\}$$

слабо компактно в $C([0,1], \mathbb{R}^{dN})$.

Доказательство следует из оценок леммы 1 аналогично доказательству теоремы 2.

3. Существование слабого решения. Пусть a и b удовлетворяют условию A): $\exists \, C > 0, \ \{L_N, \ n \geq 1\}$,

$$\forall \, u \in \mathbb{R}^d, \quad \mu \in \mathfrak{M}: \left\| a(u,\mu) \right\| + \left\| b(u,\mu) \right\| \leq C(1 + \|u\|),$$

$$\forall \, u, v \in \mathbb{R}^d, \quad \mu, \nu \in \mathfrak{M}: \left\| a(u,\mu) - a(v,\nu) \right\| + \left\| b(u,\mu) - b(v,\nu) \right\| \leq$$

$$\leq L_N(\|u - v\| + \gamma(\mu, \nu)).$$

Лемма 3. *Пусть* a, b *удовлетворяют условию* A). *Пусть, кроме того,* $\{x^{\alpha}, \ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *удовлетворяют уравнению* (1) *с начальными мерами* μ^{α}_0, *причем семейство* $\left\{ \mu^{\alpha}_0, \ \alpha \in \mathfrak{A} \right\}$ *слабо компактно. Тогда для любого компакта* $K \subset \mathbb{R}^d$

$$\forall \, \varepsilon > 0 \quad \exists \, C(\varepsilon) > 0 \quad \forall \, u, v \in K, \quad t \in [0,1]:$$

$$\mathrm{E}\left\| x^{\alpha}(u,t) - x^{\alpha}(v,t) \right\| \leq \varepsilon + C(\varepsilon)\|u - v\|.$$

Доказательство. Пусть $N > 0$. Обозначим $\sigma_u^\alpha = \inf\left\{t \geq 0 \colon \left\| x^\alpha(u,t) \right\| \geq N(1+\|u\|)\right\}$, $\sigma_{u,v}^\alpha = \sigma_u^\alpha \wedge \sigma_v^\alpha$. Тогда в силу леммы 1

$$\mathrm{P}\left\{\sigma_{u,v}^\alpha \leq 1\right\} \leq \mathrm{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq 1}\left\| x^\alpha(u,t)\right\| \geq N(1+\|u\|)\right\} +$$

$$+ \mathrm{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq 1}\left\| x^\alpha(v,t)\right\| \geq N(1+\|v\|)\right\} \leq \frac{C_2\left(1+\|u\|^2\right)}{N^2(1+\|u\|)^2} + \frac{C_2\left(1+\|v\|^2\right)}{N^2(1+\|v\|)^2} \leq \frac{2C_2}{N^2}.$$

Далее

$$\mathrm{E}\left\| x^\alpha\left(u, t\wedge\sigma_{u,v}^\alpha\right) - x^\alpha\left(v, t\wedge\sigma_{u,v}^\alpha\right)\right\|^2 \leq$$

$$\leq 3\left(\|u-v\|^2 + \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\sigma_{u,v}^\alpha}\left\| a\left(x^\alpha(u,s),\mu_s^\alpha\right) - a\left(x^\alpha(v,s),\mu_s^\alpha\right)\right\|^2 ds \right. +$$

$$\left. + \mathrm{E}\left\|\int_0^{t\wedge\sigma_{u,v}^\alpha}\left(b\left(x^\alpha(u,s),\mu_s^\alpha\right) - b\left(x^\alpha(v,s),\mu_s^\alpha\right)\right)dw(s)\right\|^2\right) \leq$$

$$\leq 3\left(\|u-v\|^2 + 2L_N^2\,\mathrm{E}\int_0^t \left\| x^\alpha(u, s\wedge\sigma_{u,v}^\alpha) - x^\alpha\left(v, s\wedge\sigma_{u,v}^\alpha\right)\right\|^2 ds\right),$$

откуда согласно лемме Гронуолла

$$\mathrm{E}\left\| x^\alpha\left(u, t\wedge\sigma_{u,v}^\alpha\right) - x^\alpha\left(v, t\wedge\sigma_{u,v}^\alpha\right)\right\|^2 \leq C(N)\|u-v\|^2 e^{C(N)t}.$$

Тогда

$$\mathrm{E}\left\| x^\alpha(u,t) - x^\alpha(v,t)\right\| \leq \mathrm{E}\left\| x^\alpha\left(u, t\wedge\sigma_{u,v}^\alpha\right) - x^\alpha\left(v, t\wedge\sigma_{u,v}^\alpha\right)\right\| \mathbb{1}\left\{\sigma_{u,v}^\alpha > 1\right\} +$$

$$+ \mathrm{E}\left\| x^\alpha(u,t) - x^\alpha(v,t)\right\| \mathbb{1}\left\{\sigma_{u,v}^\alpha \leq 1\right\} \leq$$

$$\leq \sqrt{C(N)\|u-v\|^2 e^{C(N)t}} + \sqrt{C_2\left(2+\|u\|^2+\|v\|^2\right)\frac{2C_2}{N^2}} \leq$$

$$\leq C(N)e^{C(N)}\|u-v\| + \frac{C}{N}(1+\|u\|+\|v\|).$$

Выбирая N так, чтобы выполнялось

$$\frac{C}{N}(1+\|u\|+\|v\|) < \varepsilon,$$

получаем требуемое неравенство.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\mu_0 = \sum_{k=1}^N c_k\,\delta_{u_k}$, *где* $c_k > 0$, $k = 1,\ldots,N$, $\sum_{k=1}^N c_k = 1$. *Пусть, кроме того,* a, b *удовлетворяют условию* A). *Тогда уравнение* (1) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Уравнение (1) в данном случае имеет вид

$$dx(u_k,t) = a\left(x(u_k,t), \sum_{i=1}^N c_i\,\delta_{x(u_i,t)}\right)dt + b\left(x(u_k,t), \sum_{i=1}^N c_i\,\delta_{x(u_i,t)}\right)dw(t), \qquad (2)$$

$$k = 1,\ldots,N;$$

$$dx(u,t) = a\left(x(u,t), \sum_{i=1}^{N} c_i\,\delta_{x(u_i,t)}\right)dt + b\left(x(u,t), \sum_{i=1}^{N} c_i\,\delta_{x(u_i,t)}\right)dw(t), \quad u \in \mathbb{R}^d. \tag{3}$$

На $x(u_k,t)$, $k = 1,\ldots,N$, имеем систему уравнений (2), коэффициенты которой

$$\tilde{a}_k(u_1,u_2,\ldots,u_N) = a\left(u_k, \sum_{i=1}^{N} c_i\,\delta_{u_i}\right),$$

$$\tilde{b}_k(u_1,u_2,\ldots,u_N) = b\left(u_k, \sum_{i=1}^{N} c_i\,\delta_{u_i}\right)$$

удовлетворяют условию линейного роста и локальному условию Липшица. Следовательно, эта система имеет единственное решение. Кроме того, из непрерывности $x(u_i,\cdot)$ следует, что

$$\mu_{\cdot} = \sum_{i=1}^{N} c_i\,\delta_{x(u_i,\cdot)} \in C([0,1],\mathfrak{M}).$$

Для остальных $u \notin \{u_1,\ldots,u_n\}$ коэффициенты уравнения (3) также будут удовлетворять локальному условию Липшица и условию линейного роста, а кроме того, будут непрерывны по t. Следовательно, (3) также будет иметь решение.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_N$ — *полные метрические пространства. Семейство случайных элементов* $\left\{\left(\xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha,\ldots,\xi_N^\alpha\right),\ \alpha \in \mathfrak{A}\right\}$ *слабо компактно в* $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \times \ldots \times \mathfrak{X}_N$ *тогда и только тогда, когда* $\left\{\xi_1^\alpha,\ \alpha \in \mathfrak{A}\right\},\ldots$ $\ldots,\left\{\xi_N^\alpha,\ \alpha \in \mathfrak{A}\right\}$ *слабо компактны в* $\mathfrak{X}_1,\ldots,\mathfrak{X}_N$ *соответственно.*

Доказательство стандартно и поэтому не приводится.

Аналогично случаю уравнения без взаимодействия введем следующее определение.

Определение. *Уравнение* (1) *имеет слабое решение, если найдутся: вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *неубывающее семейство* σ*-алгебр* $\{\mathcal{F}_t,\ t \in [0,1]\}$, $\mathcal{F}_t$*-согласованный непрерывный по* (u,t) *случайный процесс* $\tilde{x}(u,t)$ *и винеровский* $\mathcal{F}_t$*-мартингал* $\tilde{w}$ *такие, что выполнено* (1).

Теорема 4. *Пусть коэффициенты* a, b *удовлетворяют условию* A). *Тогда уравнение* (1) *имеет слабое решение.*

Доказательство. Пусть μ_0^n — дискретные меры и $\mu_0^n \Rightarrow \mu_0$, $n \to \infty$. Согласно лемме 4 для них существуют решения уравнения (1). Обозначим их $x^n(\cdot,t)$. В силу теоремы 2 семейство мерозначных процессов $\left\{\mu_\cdot^n,\ n \geq 1\right\}$ слабо компактно в $C([0,1],\mathfrak{M})$, а согласно теореме 3 семейство $\left\{x^n(u_1,\cdot), x^n(u_2,\cdot),\ldots\right.$ $\left.\ldots, x^n(u_N,\cdot),\ n \geq 1\right\}$ слабо компактно в $C([0,1],\mathbb{R}^{dN})$ для любых $\{u_1,u_2,\ldots$ $\ldots,u_N\} \subset \mathbb{R}^d$. Пусть (не более чем счетное) множество U — множество точек в $\mathbb{R}^d$, в которых сосредоточены μ_0^n, $n \geq 1$. Тогда согласно лемме 5 для любого набора $\{u_1,u_2,\ldots,u_N\} \subset U$ семейство $\left\{\mu_\cdot^n, x^n(u_1,\cdot), x^n(u_2,\cdot),\ldots,x^n(u_N,\cdot),\right.$ $\left.w_\cdot,\ n \geq 1\right\}$ слабо компактно в $C([0,1],\mathfrak{M} \times \mathbb{R}^{dN} \times \mathbb{R}^d)$. Используя диагональный метод Кантора, можно выбрать подпоследовательность индексов n_k, $k \geq 1$, такую, что

$$\left\{\left(\mu_{\cdot}^{n_k}, x^{n_k}(u_1,\cdot),\ldots,x^{n_k}(u_N,\cdot), w_{\cdot}\right),\ n\geq 1\right\}$$

слабо сходится для любого набора $\{u_1, u_2, \ldots, u_N\} \subset U$. Обозначим ее так же, как исходную. Рассмотрим предел этой последовательности

$$\left(\mu_t,\ t\in[0,1],\ \tilde{y}(u,t),\ u\in U,\ t\in[0,1],\ \tilde{w}_t,\ t\in[0,1]\right).$$

Прежде всего покажем, что $\tilde{w}_{\cdot}$ — винеровский мартингал относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}_t = \sigma\{\tilde{w}(s), \mu_s, \tilde{y}(u,s),\ u\in U,\ s\leq t\}$. Для любой $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^{dk(1+m)}\times\mathfrak{M}^k)$ и $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k \leq s,\ u_1, \ldots, u_m \in U$ рассмотрим

$$\mathrm{E}e^{i\lambda(\tilde{w}(t)-\tilde{w}(s))}\varphi\left(\tilde{w}(\tau_1),\ldots,\tilde{w}(\tau_k),\mu_{\tau_1},\ldots,\mu_{\tau_k},\tilde{y}(u_1,\tau_1),\ldots,\tilde{y}(u_m,\tau_k)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\mathrm{E}e^{i\lambda(w(t)-w(s))}\varphi\left(w(\tau_1),\ldots,w(\tau_k),\mu_{\tau_1}^n,\ldots,\mu_{\tau_k}^n,x^n(u_1,\tau_1),\ldots,x^n(u_m,\tau_k)\right) =$$

$$= e^{-\lambda^2(t-s)/2}\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\varphi\left(w(\tau_1),\ldots,w(\tau_k),\mu_{\tau_1}^n,\ldots,\mu_{\tau_k}^n,x^n(u_1,\tau_1),\ldots,x^n(u_m,\tau_k)\right) =$$

$$= e^{-\lambda^2(t-s)/2}\mathrm{E}\varphi\left(\tilde{w}(\tau_1),\ldots,\tilde{w}(\tau_k),\mu_{\tau_1},\ldots,\mu_{\tau_k},\tilde{y}(u_1,\tau_1),\ldots,\tilde{y}(u_m,\tau_k)\right), \qquad s\leq t,$$

откуда следует, что $\tilde{w}$ — винеровский $\mathcal{F}_t$-мартингал.

Рассмотрим уравнение для $\tilde{x}$:

$$\begin{gathered} d\tilde{x}(u,t) = a(\tilde{x}(u,t),\mu_t)dt + b(\tilde{x}(u,t),\mu_t)d\tilde{w}(t), \\ \tilde{x}(u,0) = u. \end{gathered} \tag{4}$$

Отметим, что это уравнение без взаимодействия, так как процесс $\{\mu_t\}$ сейчас известен. В силу условия A) оно имеет единственное решение, непрерывное по $u,\ t$ [3]. Для $u\in U$ выражения

$$x^n(u,t) - u - \int_0^t a\left(x^n(u,s),\mu_s^n\right)ds - \int_0^t b\left(x^n(u,s),\mu_s^n\right)dw(s)$$

слабо сходятся к

$$\tilde{y}(u,t) - u - \int_0^t a(\tilde{y}(u,s),\mu_s)ds - \int_0^t b(\tilde{y}(u,s),\mu_s)d\tilde{w}(s).$$

С другой стороны, эти выражения равны 0, поэтому в силу единственности решения (4) для $u\in U$ $\tilde{y}(u,t) = \tilde{x}(u,t)$ п. н.

Заметим далее, что так как $\mu_0^n \Rightarrow \mu_0,\ n\to\infty$, то

$$\gamma\left(\mu_t, \mu_0\circ\tilde{x}(\cdot,t)^{-1}\right) = \lim_{k\to\infty}\gamma\left(\mu_t,\mu_0^k\circ\tilde{x}(\cdot,t)^{-1}\right)$$

с вероятностью 1. В свою очередь из-за совместной слабой сходимости μ^n и x^n на элементах из U

$$\mathrm{E}\gamma\left(\mu_t,\mu_0^k\circ\tilde{x}(\cdot,t)^{-1}\right) = \mathrm{E}\gamma\left(\mu_t,\mu_0^k\circ\tilde{y}(\cdot,t)^{-1}\right) = \lim_{k\to\infty}\mathrm{E}\gamma\left(\mu_t^n,\mu_0^k\circ x^n(\cdot,t)^{-1}\right).$$

Оценим

$$\mathrm{E}\gamma\left(\mu_t^n,\mu_0^k\circ x^n(\cdot,t)^{-1}\right) \leq \varepsilon + \mathrm{E}\iint_{K_\varepsilon^2}\left\|x^n(u,t)-x^n(v,t)\right\|\kappa(du,dv),$$

где K_ε — такой компакт, что

$$\forall\, n:\ \mu_0^n\big(\mathbb{R}^d \setminus K\big) \ < \ \frac{\varepsilon}{2},$$

$\kappa \in Q\big(\mu_0^n, \mu_0^k\big)$. Выберем κ так, чтобы

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\|u-v\|}{1+\|u-v\|}\kappa(du, dv) \ \le \ 2\gamma\big(\mu_0^n, \mu_0^k\big).$$

Тогда согласно лемме 3

$$\mathrm{E}\,\gamma\big(\mu_t^n, \mu_0^k \circ x^n(\cdot, t)^{-1}\big) \le \ 2\varepsilon \ + \ 2C(\varepsilon) \sup_{u,v\in K_\varepsilon} (1+\|u-v\|)\gamma\big(\mu_0^n, \mu_0^k\big).$$

Выбирая сначала ε, затем k, а затем n, получаем

$$\mathrm{E}\,\gamma\big(\mu_t, \mu_0 \circ \tilde{x}(\cdot, t)^{-1}\big) \ = \ 0,$$

откуда следует, что $\mu_t = \mu_0 \circ \tilde{x}(\cdot, t)^{-1}$, т. е. $\tilde{x}$ является слабым решением уравнения (1).

Теорема доказана.

1. *Dorogovtsev A. A., Kotelenez P.* Stochastic flows with interaction and random measures. – Kluwer Acad. Publ., 2004. – 186 p.
2. *Dudley R. M.* Real analysis and probability. – Cambridge Univ. Press, 2002. – 566 p.
3. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations. – Cambridge Univ. Press, 1997. – 360 p.
4. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.

Получено 30.04.2004