УДК 519.41/47

А. Н. Ткаченко

Силовские подгруппы почти локально-нормальных групп

Цель настоящей работы — изучение свойств силовских подгрупп в почти локально-нормальной группе. Выбор класса почти локально-нормальных групп в качестве основного объекта изучения обусловлен близостью групп этого класса к локально-нормальным группам; для последних, как известно, получены естественные аналоги теорем Силова и Холла (см., напр., [1—3]).

Как показывают построенные ниже примеры 1—3, аналогичные теоремы для почти локально-нормальных групп, вообще говоря, не имеют места. Однако если из всех силовских подгрупп выделить лишь некоторые, удовлетворяющие определенным условиям, то с помощью таких подгрупп удается получить ряд факторизационных результатов.

1. Определение и свойства проекционных холловских π-подгрупп. Пусть π — множество простых чисел. Согласно терминологии, принятой в [4], конечная группа G называется D_π -группой, если любая силовская π-подгруппа из G холловская и любые две холловские π-подгруппы сопряжены в G. Под D_π^*-группой понимаем D_π-группу, все подгруппы которой также обладают свойством D_π. Нетрудно показать, что свойство D_π^* наследуется подгруппами и фактор-группами. Группу, обладающую свойством D_π^* локально, будем для краткости называть LD_π^*-группой.

Максимальную π-подгруппу G_π почти локально-нормальной группы G назовем проекционной холловской π-подгруппой, если в G существует такая локальная система конечных подгрупп G_λ, $\lambda \in \Lambda$, что для любого λ пересечение $G_\pi \cap G_\lambda$ — холловская π-подгруппа в G_λ. В случае $\pi = \{p\}$ вместо термина «проекционная холловская $\{p\}$-подгруппа» будем использовать термин «проекционная силовская p-подгруппа». Если G счетна, то такое определение соответствует, очевидно, определению проекционной силовской p-подгруппы, данному в работе [5]. Отметим, что в несчетных локально-конечных группах определенных таким образом проекционных силовских p-подгрупп может и не существовать (см., напр., [6]).

Доказательство следующей леммы имеет выкладочный характер, и поэтому мы его опускаем.

Лемма 1. *Пусть B — конечная подгруппа LD_π^*-группы G, холловская π-подгруппа которой содержится в некоторой максимальной π-подгруппе G_π из G. Тогда для любой конечной нормальной подгруппы N пересечение $G_\pi \cap (BN)$ — холловская π-подгруппа в BN.*

Следствие 1. *Если G_π — максимальная π-подгруппа LD_π^*-группы G и N — конечная нормальная подгруппа из G, то пересечение $G_\pi \cap N$ — холловская π-подгруппа в N.*

Следствие. 2. *Если G_π — максимальная π-подгруппа LD_π^*-группы G и R — FC-центр G, то пересечение $G_\pi \cap R$ — проекционная холловская π-подгруппа в R.*

Теорема 1. *Представим почти локально-нормальную LD_π^*-группу в виде*

$$G = RB, \tag{1}$$

где R — FC-центр, B — конечная подгруппа в G. Максимальная π-подгруппа G_π группы G, содержащая некоторую холловскую π-подгруппу из B, является проекционной холловской π-подгруппой в G. Наоборот, если G_π — проекционная холловская π-подгруппа в G, то существует разложение вида (1), *при котором холловская π-подгруппа из B содержится в G_π.*

Доказательство. Пусть G — силовская π-подгруппа, содержащая холловскую π-подгруппу из B, и N_λ, $\lambda \in \Lambda$,— локальная система конечных нормальных в G подгрупп FC-центра R. Существование такой локальной системы вытекает из леммы Дицмана. Ввиду леммы 1 пересечение $G_\pi \cap (N_\lambda B)$ — холловская π-подгруппа в $N_\lambda B$. Так как система подгрупп $N_\lambda B$, $\lambda \in \Lambda$, локальна в G, то G_π — проекционная холловская π-подгруппа в G.

Докажем вторую часть теоремы. С этой целью представим группу G в виде $G = RK$, где K — конечная подгруппа. Из определения проекционной холловской π-подгруппы вытекает существование такой конечной подгруппы B, содержащей K, что $G_\pi \cap B$ — холловская π-подгруппа в B. Тогда разложение $G = RB$ искомое.

Следствие 3. *В почти локально-нормальной LD_π^*-группе существуют проекционные холловские π-подгруппы. В частности, для любого простого числа p в произвольной почти локально-нормальной группе существуют проекционные силовские p-подгруппы.*

Следствие 4. *Максимальная π-подгруппа почти локально-нормальной LD-группы G является проекционной холловской тогда и только тогда, когда она содержит сопряженную любой конечной π-подгруппы из G.*

Доказательство. Необходимость следствия очевидна. Для доказательства достаточности представим группу G в виде (1). По условию для холловской π-подгруппы B_π из B существует такой элемент x, что $B_\pi^x \leqslant G_\pi$. Но B_π^x — холловская π-подгруппа группы B^x и $G = RB^x$. Ввиду теоремы 1 G_π — проекционная холловская π-подгуппа в G. Следствие доказано

Следствие 5. *Пусть N — нормальная подгруппа почти локально-нормальной LD_π^*-группы G, содержащаяся в ее FC-центре R. Максимальная π-подгруппа G_π группы G тогда и только тогда является проекционной холловской, когда $G_\pi N/N$ — проекционная холловская π-подгруппа в G/N. В частности, подгруппа G тогда и только тогда является проекционной холловской, когда $G_\pi R/R$ — холловская π-подгруппа в G/R.*

Доказательство. Необходимость следствия очевидна. Докажем достаточность. Для этого возьмем в G произвольную конечную π-подгруппу H и покажем, что некоторая подгруппа, сопряженная H, содержится в G_π. В самом деле, так как по условию $G_\pi N/N$ — проекционная холловская подгруппа G/N, то для некоторого $y \in G$ выполняется включение $H^y \leqslant G_\pi N = G_1$. Далее, подгруппа N по условию содержится в FC-центре группы G, а поэтому и в FC-центре R_1 подгруппы G_1. Тогда существует разложение $G_1 = R_1 B_1$, где B_1 — конечная подгруппа из G_π. Ввиду теоремы 1 G_π — проекционная холловская π-подгруппа в G_1, поэтому $H^z \leqslant G_\pi$ для некоторого $z \in G_1$. Полагая $x = yz$, получаем $H^x \leqslant G_\pi$, что с учетом следствия 4 дает утверждение достаточности. Следствие доказано.

Следующее предложение является обобщением результата работы [7].

Следствие 6. *Образ проекционной холловской π-подгруппы почти локально-нормальной LD_π^*-группы G в любой фактор-группе G/N — проекционная холловская π-подгруппа последней. Наоборот, если S/N — проекционная холловская π-подгруппа G/N, то существует такая проекционная холловская π-подгруппа G_π группы G, что $G_\pi N = S$.*

2. Факторизации проекционными холловскими подгруппами.

Теорема 2. *Пусть почти локально-нормальная группа G одновременно обладает свойствами LD_π^* и $LD_{\pi'}$. Если G_π и $G_{\pi'}$ — соответственно проекционные холловские π- и π'-подгруппы G, то $G = G_\pi G_{\pi'}$.*

Доказательство. Согласно теореме 1 существуют такие разложения $G = RL = RK$, что $L_\pi \leqslant G_\pi$ для некоторой холловской π-подгруппы L_π из L и $K_{\pi'} \leqslant G_{\pi'}$ для некоторой холловской π'-подгруппы K_π из K. Возьмем в группе G такую конечную нормальную подгруппу N, что $NL = NK$. Из последнего равенства и леммы 1 следует, что $G_\pi \cap (NL)$ (соответственно $G_{\pi'} \cap (NL)$) — холловская π-подгруппа (соответственно холловская π'-подгруппа) в NL. Если теперь N_λ, $\lambda \in \Lambda$, — локальная система конечных нормальных в G подгрупп FC-центра R, то пересечение $G_\pi^{(\lambda)} = G_\pi \cap (N_\lambda NL)$ (соответственно пересечение $G_{\pi'}^{(\lambda)} = G_{\pi'} \cap (N_\lambda NL)$) — холловская π-подгруппа (соответственно холловская π'-подгруппа) в $N_\lambda NL$, поэтому для любого λ имеем разложения $N_\lambda NL = G^{(\lambda)}G_{\pi'}^{(\lambda)}$, откуда получаем разложение $G = G_\pi G_{\pi'}$.

С другой стороны, если почти локально-нормальная группа, обладающая свойствами LD_π^* и $LD_{\pi'}^*$, разложима в произведение своих двух π и π'-подгрупп, то, как вытекает из следствия 5, последние являются проекционными холловскими π- и π'-подгруппами в G.

Следствие 7. *Если силовская π-подгруппа G_π почти локально нормальной группы G нормальна, то в группе G существуют проекционные холловские π'-подгруппы и для любой такой подгруппы $G_{\pi'}$ имеет место разложение $G = G_\pi \leftthreetimes G_{\pi'}$.*

Следствие 8. *Пусть G — локально-разрешимая почти локально-нормальная группа. Если G_π — ее проекционная холловская π-подгруппа и $G_{\pi'}$ — ее проекционная холловская π'-подгруппа, то $G = G_\pi G_{\pi'}$.*

Заметим, что следствие 7 обобщает на почти локально-нормальные группы один из результатов работы [3]. Следующая теорема — обобщение другого результата этой работы.

Теорема 3. *Почти локально-нормальная группа локально-разрешима тогда и только тогда, когда любая ее проекционная силовская p-подгруппа дополняема.*

Доказательство. Необходимость теоремы вытекает из следствия 8. Докажем достаточность. Пусть G/N — конечная фактор-группа, S/N — ее силовская p-подгруппа. Из следствия 6 вытекает существование такой проекционной силовской p-подгруппы G_p группы G, что $S = G_pN$. По условию подгруппа G_p имеет в G дополнение K. Покажем, что оно является p'-группой. С этой целью предположим противное: пусть x — элемент порядка p, принадлежащий дополнению K. Так как G_p — проекционная силовская p-подгруппа, то $x^y \in G_p$. При этом, очевидно, можно считать, что $y \in K$. Но тогда $x^y \in K$, что, однако, противоречит соотношению $G_p \cap K = \langle 1 \rangle$. Таким образом, K — p'-подгруппа, поэтому KN/N — дополнение подгруппы $GN/N = S/N$ в группе G/N. Следовательно, по теореме Холла группа G/N разрешима. Ввиду финитной аппроксимируемости фактор-группы $G/Z(R)$, где R — FC-центр G, последняя локально-разрешима. Отсюда вытекает, что группа G также локально-разрешима. Теорема доказана.

Система попарно-перестановочных силовских p-подгрупп G_p, $p \in \pi(G)$, группы G называется силовской базой (см., напр., [8]), если $G = \langle G_p \mid p \in \pi(G) \rangle$.

Теорема 4. *Почти локально-нормальная группа локально-разрешима тогда и только тогда, когда она обладает силовской базой.*

Доказательство. Представим локально-разрешимую почти локально-нормальную группу G в виде (1) и рассмотрим локальную систему N_λ, $\lambda \in \Lambda$, конечных подгрупп из R, нормальных в G. Пусть $G_\lambda = BN_\lambda$. Зафиксируем в группе B некоторую силовскую базу и обозначим A_λ множество таких силовских баз группы G_λ, которые содержат зафиксированную базу подгруппы B. A_λ непусто (см. [9]) и, очевидно, конечно. Применяя к системе множеств A_λ метод проекционных множеств из [10, § 55], получим силовскую базу группы G. Необходимость доказана.

Достаточность теоремы вытекает из естественного аналога теоремы Виландта — Кегеля: если группа, обладающая нормальным рядом с конечными факторами, разложима в произведение попарно-перестановочных локально-нильпотентных подгрупп, то она локально-разрешима. Теорема доказана.

Неверно, однако, было бы считать, что любая проекционная силовская p-подгруппа локально-разрешимой почти локально-нормальной группы принадлежит некоторой силовской базе (см. ниже пример 3). Вместе с тем, как вытекает из следствия 5, силовские p-подгруппы, образующие силовскую базу почти локально-нормальной группы, всегда являются проекционными.

3. Примеры почти локально-нормальных групп. Ниже построены три примера почти локально-нормальных групп. Первый показывает, что силовская p-подгруппа разрешимой почти локаль-

но-нормальной группы может не быть проекционной и не иметь в группе дополнений. Из второго примера следует, что даже проекционные силовские p-подгруппы почти локально-нормальной группы, вообще говоря, неизоморфны. Из третьего следует, что, вообще говоря, не любая проекционная силовская p-подгруппа разрешимой почти локально-нормальной группы содержится в некоторой силовской базе последней.

Пример 1. Пусть $G_n = \langle a_n \rangle \leftthreetimes \langle b_n \rangle$, где $|a_n| = 3$, $|b_n| = 2$, $a_n^{b_n} = a_n^{-1}$, и пусть $G = \left(\mathop{\mathrm{X}}\limits_{n=1}^{\infty} G_n \right) \leftthreetimes \langle a \rangle$, где $|a| = 4$, $g_n^a = g_n^{b_n} \,\forall\, g_n \in G_n$. Нетрудно показать, что $\left(\mathop{\mathrm{X}}\limits_{n=1}^{\infty} \langle b_n^{a_n} \rangle \right) \times \langle a^2 \rangle$—недополняемая силовская 2-подгрупп группы G.

Пример 2. Пусть $G_n = (\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle) \curlywedge K_n$, где $|a_n| = |b_n| = 2$, K_n—группа автоморфизмов подгруппы $\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle$. Обозначим P_n такую силовскую 2-подгруппу группы G_n, что $a_n \in Z(P_n)$, и Q_n — такую силовскую 2-подгруппу группы G_n, что $a_n \notin Z(Q_n)$. Положим

$G = \left(\mathop{\mathrm{X}}\limits_{n=1}^{\infty} G_n \right) \times \langle a \rangle$, где $|a| = 2$, $g_n^a = g_n^{a_n} \,\forall\, g_n \in G_n$. Подгруппы $\left(\mathop{\mathrm{X}}\limits_{n=1}^{\infty} P_n \right) \times$ $\times \langle a \rangle$ и $\left(\mathop{\mathrm{X}}\limits_{n=1}^{\infty} Q_n \right) \leftthreetimes \langle a \rangle$ — проекционные силовские 2-подгруппы группы G, первая из которых локально-нормальна, а вторая—почти локально-нормальна.

Пример 3. Пусть $G_n = \langle a_n \rangle \leftthreetimes \langle b_n \rangle$, где $|a_n| = 7$, $|b_n| = 3$, $a_n^{b_n} = a_n^2$ и пусть $G = \left(\mathop{\mathrm{X}}\limits_{n=1}^{\infty} G_n \right) \leftthreetimes \langle a \rangle$, где $|a| = 2$, $a_n^a = a_n^{-1}$, $b_n^a = b_n$. Подгруппа $\left(\mathop{\mathrm{X}}\limits_{n=1}^{\infty} \langle b_n^{a_n} \rangle \right)$ — проекционная силовская 2-подгруппа в группе G, не перестановочная, очевидно, ни с какой 2-подгруппой; следовательно, она не может содержаться в силовской базе.

Основные результаты работы анонсированы в [11] и [12].

1. *Baer R.* Sylow theorems for infinite groups.—Duke math. J., 1940, N 3, p. 598—614.
2. *Голберг П. А.* Силовские π-подгруппы локально-нормальных групп.— Мат. сб., 1946, 19, № 2 с. 451—460.
3. *Черников С. Н.* О дополняемости силовских π-подгрупп в некоторых классах бесконечных групп.— Мат. сб., 1955, 37, № 3, с. 557—566.
4. *Чунихин С. А.* Подгруппы конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1964.— 158 с.
5. *Шунков В. П.* О проблеме минимальности для локально-конечных групп.— Алгебра и логика, 1970, 9, № 2, с. 220—240.
6. *Каргаполов М. И.* Некоторые вопросы теории нильпотентных и разрешимых групп.— Докл. АН СССР, 1959, 127, № 5, с. 1164—1166.
7. *Каргаполов М. И.* О сопряженности силовских p-подгрупп локально-нормальной группы.— Успехи мат. наук, 1957, 12, № 4, с. 297—300.
8. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. М.* Теория групп.— М. : Наука, 1977.— 240 с.
9. *Huppert B.* Endliche Gruppen. B. I.— Berlin, Springer-Verl., 1967.— 793 p.
10. *Курош А. Г.* Теория групп.— М. : Наука, 1967.— 648 с.
11. *Ткаченко А. Н.* О теоремах типа Силова — Холла в классе почти локально-нормальных групп.— В кн.: 14-я Всесоюзная алгебраическая конференция : Тез. докл. Новосибирск, 1977, ч. 1, с. 68—69.
12. *Ткаченко А. Н.* О силовской структуре почти локально-нормальных групп.— В кн.: VI Всесоюзный симпозиум по теории групп: Тез. докл. Киев : Наук. думка, 1978, с. 63.

Криворож. пед. ин-т

Поступила 15.06.83,
после доработки — 24.01.84