УДК 517.919

В. А. Еременко

Инвариантные торы линейных расширений динамических систем на торе с вырожденной матрицей при производных

Объектом изучения является система уравнений на торе

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \varepsilon A(\varphi)\dot{x} = B(\varphi)x + f(\varphi), \quad \det A(\varphi) \equiv 0, \tag{1}$$

где $\varphi \in R^m$, $x \in R^n$, A и B — n-мерные квадратные матрицы; $a, A, B, f \in C^r(R^m, 2\pi)$, $r \geqslant 1$; ε — положительный параметр; точкой обозначена производная по независимой переменной t. Здесь под $C^r(R^m, T)$ понимается пространство r раз непрерывно дифференцируемых вещественных векторных или матричных функций $\Phi(\varphi)$, зависящих от m переменных $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ и периодических по каждой из них с периодом T, с обычной нормой, введенной, например, в работе [1].

Задача состоит в изучении условий существования единственного, при каждом фиксированном ε, инвариантного тороидального многообразия $x = u(\varphi, \varepsilon)$ системы (1) для произвольного вектора неоднородности f. В работе [2] исследовался случай, когда ранг матрицы A, изменяясь при изменении φ, не превосходит 1. В данной заметке рассматривается случай, когда ранг A тождественно равен $n-1$.

Обозначим $\tilde{A} = \{\lambda_{ij}\}$ n-мерную квадратную матрицу, где λ_{ij} — алгебраическое дополнение a_{ji} (элемента j-й строки и i-го столбца матрицы AB^{-1}).

Сформулируем основное утверждение.

Теорема. *Пусть относительно системы уравнений* (1) *выполняются следующие условия:*

1) $a, A, B, f \in C^r(R^m, 2\pi)$, $r \geqslant 1$;

2) $\operatorname{rank} A(\varphi) \equiv n - 1 \quad \forall \varphi \in R^m, \quad n > m + 1$;

3) $\det B(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in R^m$;

4) $$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A(\varphi) B^{-1}(\varphi) \\ \tilde{A}(\varphi) \end{pmatrix} \equiv n, \tag{2}$$

причем существуют n-мерные квадратные матрицы $Q_1(\varphi)$ и $Q_2(\varphi)$ из $C^r(R^m, 2\pi)$ такие, что для матрицы

$$Q(\varphi) = A(\varphi) B^{-1}(\varphi) + \tilde{A}^*(\varphi) Q_1(\varphi) + Q_2(\varphi) \tilde{A}(\varphi) \tag{3}$$

выполняется одно из неравенств

$$\max_{\|x\|=1} \langle Q(\varphi)x, x\rangle \leqslant -\beta, \tag{4}$$

$$\min_{\|x\|=1} \langle Q(\varphi)x, x\rangle \geqslant \beta, \tag{5}$$

где звездочка обозначает операцию транспонирования матрицы, β — положительная постоянная, не зависящая от $\varphi \in R^m$.

Тогда можно указать положительное число ε_0 такое, что для всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ система (1) *обладает инвариантным тором $x = u(\varphi, \varepsilon)$, $u \in C^{r-1}(R^m, 2\pi)$, удовлетворяющим оценкам*

$$|u(\varphi, \varepsilon)|_l \leqslant K |f(\varphi)|_l, \quad l = \overline{0, r-1}, \tag{6}$$

с положительной постоянной K, которая не зависит от $\varphi \in R^m$ и ε, и экспоненциально устойчивым при выполнении неравенства (4) *и неустойчивым при выполнении* (5).

Доказательство. Покажем вначале, что условия 1 — 2 гарантируют существование n-мерной квадратной ортогональной матрицы $V(\varphi) \in C^r(R^m, 4\pi)$ такой, что

$$V(\varphi) A(\varphi) = \begin{pmatrix} A_1(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $(n-1) \times n$-матрица $A_1(\varphi)$ имеет ранг $n-1$.

Рассмотрим уравнение

$$yA(\varphi) = 0, \quad y \in R^n, \tag{8}$$

и докажем, что матрицу $A(\varphi)$ в (8) можно заменить некоторой матрицей ортогонального проектирования ранга $n-1$ таким образом, что при этом не изменяется пространство решений уравнения (8) для каждого фиксированного $\varphi \in R^m$. Очевидно, что каждые два вектора из векторов $\lambda_1(\varphi), \ldots, \lambda_n(\varphi)$, являющихся строками матрицы $\tilde{A}(\varphi)$, линейно зависимы при каждом фиксированном φ и хотя бы один из этих векторов ненулевой. По каждому такому ненулевому вектору можно построить матрицу проектирования вдоль этого вектора на дополняемое ортогональное пространство. Например, вектору $\lambda_i(\varphi_0)$, $\|\lambda_i(\varphi_0)\| \neq 0$, соответствует такая матрица проектирования

$$C_i(\varphi_0) = I_n - \|\lambda_i(\varphi_0)\|^{-2} \lambda_i^*(\varphi_0) \lambda_i(\varphi_0), \tag{9}$$

где I_n — единичная n-мерная матрица, $\|\lambda_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}^2$. Будем считать, что нулевому вектору соответствует нулевая матрица. Таким образом, при каждом фиксированном $\varphi \in R^m$ получен набор матриц проектирования

$$C_1(\varphi), C_2(\varphi), \ldots, C_n(\varphi), \tag{10}$$

по крайней мере одна из которых ненулевая для каждого φ. Если в (10) имеется более одной ненулевой матрицы, то они, очевидно, будут одинаковыми. Через $C(\varphi)$ обозначим ненулевую матрицу, выбранную из набора (10) при каждом $\varphi \in R^m$. С учетом (9) нетрудно убедиться в справедливости включения $C(\varphi) \in C^r(R^m, 2\pi)$, а также равносильности уравнений (8) и

$$yC(\varphi) = 0, \tag{11}$$

где $C(\varphi)$ — матрица ортогонального проектирования ранга $n-1$. В работе [3] показано, что уравнение (11) обладает решением $y = v(\varphi) \in C^r(R^m, 4\pi)$, $\|v(\varphi)\| \equiv 1$. Согласно результатам работы [4] выполнение неравенства $n > m+1$ гарантирует дополняемость до полного ортонормированного базиса вектора $v(\varphi)$ векторами $v_1(\varphi), \ldots, v_{n-1}(\varphi)$ из $C^r(R^m, 4\pi)$. Следовательно, искомая матрица имеет вид $V = \mathrm{col}(v_1, \ldots, v_{n-1}, v)$.

Умножив слева второе уравнение системы (1) на $V(\varphi)$, с учетом (7) получаем

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \varepsilon M(\varphi)[A(\varphi)\dot{x} = B(\varphi)x + f(\varphi)], \tag{12}$$

$$0 = v(\varphi)[B(\varphi)x + f(\varphi)], \tag{13}$$

где $M = \mathrm{col}(v_1, \ldots, v_{n-1})$. Общее решение уравнения (13) в силу невырожденности матрицы B и ортогональности матрицы V имеет вид

$$x = B^{-1}(\varphi)[M^*(\varphi)y - f(\varphi)], \tag{14}$$

где y — произвольный $(n-1)$-мерный вектор. Подставив (14) в (12), придем к уравнению относительно y:

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \varepsilon A_1(\varphi)\dot{y} = B_1(\varphi, \varepsilon)y + \varepsilon f_1(\varphi), \tag{15}$$

где

$$A_1 = MAB^{-1}M^*, \quad B_1 = I_{n-1} - \varepsilon MA \frac{\partial}{\partial\varphi}(B^{-1}M^*)a, \quad f_1 = MA\frac{\partial}{\partial\varphi}(B^{-1}f)a. \tag{16}$$

Выясним условия невырожденности и знакоопределенности матрицы A_1, что позволит нормализовать систему (15), установить существование инвариантного тора, а также изучить его устойчивость. При этом будут использованы схемы доказательств утверждений работы [5].

В соответствии с предложением 6.2 работы [6] для произвольных постоянных прямоугольных матриц L и N согласованной размерности имеет место равенство

$$\operatorname{rank} LN = \operatorname{rank} N - \dim\{\ker L \cap \Psi(N)\}, \tag{17}$$

где $\ker L$ — ядро матрицы L, т. е. множество решений системы $Lz = 0$, $\Psi(N)$ — пространство вектор-столбцов матрицы N. Зафиксировав произвольным образом $\varphi \in R^m$ и положив в (17) $L = M(\varphi)$, $N = A^*(\varphi)$, получаем следующую цепочку равенств:

$$\operatorname{rank} A_1(\varphi) = \operatorname{rank} V(\varphi) A(\varphi) B^{-1}(\varphi) M^*(\varphi) = \operatorname{rank} M(\varphi) (A(\varphi) B^{-1}(\varphi))^* =$$
$$= \operatorname{rank} A(\varphi) - \dim\{\ker M(\varphi) \cap \Psi((B^{-1}(\varphi))^* A^*(\varphi))\} = n - 1 - \dim\{b(\varphi) v^*(\varphi) \cap$$
$$\cap \Psi((B^{-1}(\varphi))^* A^*(\varphi))\},$$

где $b(\varphi)$ — произвольная скалярная функция. Таким образом, $\det A_1(\varphi) \neq 0$ $\forall \varphi \in R^m$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\dim\{b(\varphi) v^*(\varphi) \cap \cap \Psi((B^{-1}(\varphi))^* A^*(\varphi))\} = 0 \quad \forall \varphi \in R^m$ или

$$\operatorname{rank}(v^*(\varphi), \quad (B^{-1}(\varphi))^* A^*(\varphi)) \equiv n \quad \forall \varphi \in R^m. \tag{18}$$

Из определения матрицы $\tilde{A}(\varphi)$ и построения вектора $v(\varphi)$ следуют равенства $\operatorname{rank} \tilde{A}(\varphi) \equiv \operatorname{rank}(v^*(\varphi), \tilde{A}^*(\varphi)) \equiv 1$, которые гарантируют равносильность условий (18) и (2).

При выполнении условия (2) система (15) примет вид

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{y} = \varepsilon^{-1} A_1^{-1}(\varphi) B_1(\varphi, \varepsilon) y + A_1^{-1}(\varphi) f_1(\varphi). \tag{19}$$

Пусть матрица $Q(\varphi)$ отрицательно определена. Тогда с учетом равенства $M(\varphi) \tilde{A}^*(\varphi) = 0$ $\forall \varphi \in R^m$ $A_1(\varphi) = M(\varphi) A(\varphi) B^{-1}(\varphi) M^*(\varphi) \equiv M(\varphi) Q(\varphi) M^*(\varphi)$, и в силу теоремы отделения Пуанкаре [7, с. 141] матрица $A_1(\varphi)$ также отрицательно определена, причем $\min\limits_{\|y\|=1} \langle A_1(\varphi) y, y\rangle \geqslant -\gamma_1$, где $-\gamma_1 = \min\limits_{\varphi} \lambda_1(\varphi)$, $\lambda_1(\varphi)$ — минимальное собственное значение матрицы $(Q(\varphi) + Q^*(\varphi))/2$. Нетрудно убедиться, что матрица $A_1^{-1}(\varphi)$ также отрицательно определена, причем

$$\max_{\|y\|=1} \langle A_1^{-1}(\varphi) y, y\rangle \leqslant -\gamma_1^{-1} = -2\gamma. \tag{20}$$

Выбрав $\varepsilon_1 \leqslant \gamma\beta^{-1}$, где $\beta = \max\limits_{\varphi, \|y\|=1} \left| \langle A_1^{-1} M A \frac{\partial}{\partial \varphi} (B^{-1} M^*) a y, y\rangle \right|$, с учетом второго равенства (16) для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ получим оценку

$$\max_{\|y\|=1} \langle A_1^{-1}(\varphi) B_1(\varphi, \varepsilon) y, y\rangle \leqslant -\gamma. \tag{21}$$

Условия теоремы гарантируют существование и единственность решения $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, первого уравнения (19). Для решения уравнения

$$\dot{y} = \varepsilon^{-1} A_1^{-1}(\varphi_t(\varphi)) B_1(\varphi_t(\varphi), \varepsilon) y, \tag{22}$$

используя (21), получаем неравенства

$$\frac{d}{dt} \langle y, y\rangle = 2\varepsilon^{-1} \langle A_1^{-1}(\varphi_t(\varphi)) B_1(\varphi_t(\varphi), \varepsilon) y, y\rangle \leqslant -2\gamma\varepsilon^{-1} \langle y, y\rangle,$$
$$\| y(t, \varphi) \| \leqslant \| y(\tau, \varphi) \| \exp\{-\gamma\varepsilon^{-1}(t - \tau)\}, \quad t \geqslant \tau.$$

Тогда для всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ инвариантное тороидальное многообразие $x = u(\varphi, \varepsilon)$ системы уравнений (19) существует и описывается равенством

$$u(\varphi, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi, \varepsilon) A_1^{-1}(\varphi_\tau(\varphi)) f_1(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau, \quad (23)$$

где $G_0(\tau, \varphi, \varepsilon)$ — функция Грина задачи об инвариантном торе, имеющая вид

$$G_0(\tau, \varphi, \varepsilon) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi, \varepsilon), & \tau < 0, \\ 0, & \tau > 0 \end{cases}$$

и удовлетворяющая оценке $\| G_0(\tau, \varphi, \varepsilon) \| \leqslant K_1 \exp\{-\gamma\varepsilon^{-1} |\tau|\}$ с положительной постоянной K_1, не зависящей от φ, τ и ε, $\Omega_\tau^l(\varphi, \varepsilon)$ — фундаментальная матрица решений системы (22), $\Omega_\tau^\tau(\varphi, \varepsilon) = I_{n-1}$. Нетрудно убедиться в единственности для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ и экспоненциальной устойчивости $u(\varphi, \varepsilon)$.

Пусть $\varepsilon_0 > 0$ удовлетворяет неравенству $\varepsilon_0 < \max\{\gamma (r-1)^{-1}\alpha^{-1}, \varepsilon_1\}$, где $\alpha = \max \alpha(\varphi)$, $\alpha(\varphi)$ — наибольшее собственное число матрицы $(\partial a/\partial\varphi + (\partial a/\partial\varphi)^*)/2$. Тогда, согласно [8], для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ справедливы включение $G_0(\tau, \varphi, \varepsilon) \in C^{r-1}(R^m, 4\pi)$ и оценка $\| D_\varphi^{r-1} G_0(\tau, \varphi, \varepsilon) \| \leqslant L \exp\{-[\gamma\varepsilon^{-1} - (r-1)\alpha] |\tau|\}$, где D_φ^l — оператор дифференцирования по φ порядка l. С учетом (23) и (14) можно сделать вывод, что исходная система (1) обладает при фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ единственным инвариантным тором $x = u(\varphi, \varepsilon)$, $u \in C^{r-1}(R^m, 4\pi)$, удовлетворяющим оценкам (6). Единственность гарантирует периодичность $u(\varphi, \varepsilon)$ по φ с периодом 2π.

Аналогично рассматривается случай (5). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Ограничительное условие $n > m + 1$ можно снять, если дополнять вектор $v(\varphi)$ до ортогональной матрицы $V(\varphi)$, непериодической по φ, а затем использовать функцию Грина задачи об инвариантном (нетороидальном) многообразии и единственность $u(\varphi, \varepsilon)$.

1. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении.—Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, **34**, № 6, с. 1219—1240.
2. *Кулик В. Л., Еременко В. А.* О квазипериодических решениях линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных.—Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 6, с. 746—753.
3. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* О расщепляемости линеаризованных систем дифференциальных уравнений.— Укр. мат. журн., 1982, **34**, № 5, с. 587—593.
4. *Самойленко А. М.* Квазипериодические решения системы линейных алгебраических уравнений с квазипериодическими коэффициентами.— В кн.: Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1975, с. 5—26.
5. *Еременко В. А.* О некоторых свойствах периодических матриц.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 1, с. 19—26.
6. *Marsaglia George, Styan George P. H.* Equalities and Jnequalities for Ranks of Matrices.— Linear and Multilinear Algebra, 1974, **2**, N 3, p. 269—292.
7. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц.— М. : Наука, 1976.— 351 с.
8. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* К вопросу о существовании функции Грина задачи об инвариантном торе.— Укр. мат. журн., 1975, **27**, № 3, с. 348—359.

Тернопол. фин.-экон. ин-т

Поступила 17.05.83