УДК 519.217

В. В. Сарафян, Р. Г. Сафарян

Об асимптотике решения задачи Дирихле для дифференциального оператора с малым параметром

Рассмотрим задачу Дирихле

$$L^{\varepsilon}U^{\varepsilon}(x)=(\varepsilon L_1+L_0)\,U^{\varepsilon}(x)=0,\quad x\in D\subset R^r,\quad U(x)|_{\partial D}=\psi(x). \qquad (1)$$

Здесь

$$L_1=\frac{1}{2}\sum_{1}^{r}a^{ij}(x)\,\partial^2/\partial x^i\partial x^j,\qquad L_0=\frac{1}{2}\sum_{1}^{r}A^{ij}(x)\,d^2/\partial x^i\partial x^j+\sum_{1}^{r}B^i(x)\,\partial/\partial x^i,$$

D — ограниченная область в R^r с достаточно гладкой границей ∂D. Коэффициенты предполагаются достаточно гладкими; например, заведомо достаточно считать их дважды непрерывно дифференцируемыми. Оператор L_1 предполагается строго эллиптическим. Оператор L_0, напротив, может вырождаться, и именно этот случай представляет интерес. В частности, оператор L_0 может вырождаться в оператор первого порядка.

В случае, когда L_0 — оператор первого порядка, предельное поведение решения задачи (1) при $\varepsilon\to 0$ изучалось многими авторами (см. [1, 2]). Оказывается, что в этом случае предельное поведение при $\varepsilon\to 0$ существенно зависит от поведения траекторий характеристической системы

$$\dot{x}=B(x),\quad x\in R^r,\quad B(x)=(B^1(x),\ldots,B^r(x)). \qquad (2)$$

Большое разнообразие поведения характеристик, особенно в больших размерностях, не позволяет полностью описать все возможные случаи. Здесь приходится ограничиваться рассмотрением «крайних случаев». Общий случай является комбинацией этих «крайних случаев» и некоторых вырожденных ситуаций. При этом рассмотрение каждого отдельного «крайнего случая» требует преодоления серьезных трудностей.

При исследовании поведения решения задачи (1) роль характеристик оператора L_0 играют траектории диффузионного процесса, управляемого оператором L_0 [3].

Предельное поведение $U^{\varepsilon}(x)$ при $\varepsilon\to 0$ определяется предельным поведением траекторий диффузионного процесса X_t^{ε}, управляемого оператором L^{ε}. Траектории процесса X_t^{ε} при $\varepsilon\to 0$ выходят из ограниченной области D с вероятностью 1; однако если траектории диффузионного процесса, управляемого оператором L^{ε}, не выходят из области D с вероятностью 1, момент выхода $\tau^{\varepsilon}=\inf\{t: X_t^{\varepsilon}\notin D\}$ при $\varepsilon\to 0$ с положительной вероятностью стремится к бесконечности. Можно сказать, что различные типы поведения $U^{\varepsilon}(x)$ при $\varepsilon\to 0$ соответствуют различным скоростям стремления τ^{ε} к бесконечности, и чем больше эта скорость, тем сложнее задача.

В настоящей работе рассмотрена ситуация, когда быстрая составляющая движения (т. е. отвечающая оператору L_0) препятствует выходу траектории X_t^{ε} из области D. За счет возмущений при $\varepsilon\to 0$ процесс X_t^{ε} выйдет из области с вероятностью 1, но этот выход произойдет за весьма большое при $\varepsilon\to 0$ время (например, порядка $\exp\{\mathrm{const}/\sqrt{\varepsilon}\}$). За такие времена траектории X_t^{ε} и X_t^0 успеют далеко разойтись и выход из области D будет определяться большими уклонениями траекторий X_t^{ε} от X_t^0. Предельная функция зависит от возмущений и будет в этом случае постоянной или кусочно постоянной.

Если L_0 — оператор первого порядка и его характеристики пересекают границу ∂D области D по направлению снаружи внутрь, то выход процесса X_t^{ε} из области D может произойти только за счет больших уклонений от предельной динамической системы. Наличие в L_0 членов со вторыми производными в некотором смысле «облегчает» выход траекторий процесса X_t^ε из области D; однако если вырождение L_0 достаточно сильное, то выход на ∂D все равно происходит за счет больших уклонений X_t^ε от процесса X_t^0. В этих случаях время выхода процесса X_t^ε из области D очень быстро растет с уменьшением ε.

Рассмотрим функционал $S_{0T}(\varphi)$ на пространстве $C_{0T}(R^r)$ непрерывных функций φ_s, $s \in [0, T]$, со значениями в R^r. Положим для абсолютно непрерывных функций $\varphi \in C_{0T}(R^r)$

$$S_{0T}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^T \sum_1^r a_{ij}(\varphi_s)(\dot{\varphi}_s^i - B^i(\varphi_s))(\dot{\varphi}_s^j - B^j(\varphi_s))\,ds,$$

где $(a_{ij}(x))$ — матрица, обратная к матрице $(a^{ij}(x))$ коэффициентов при вторых производных в L_1. Для неабсолютно непрерывных $\varphi \in C_{0T}(R^r)$ полагаем $S_{0T}(\varphi) = +\infty$.

Связное открытое множество G назовем перемешивающим для процесса X_t^0, если для любых точек $x, y \in G$ и любого $\delta > 0$ найдется $T \geqslant 0$ такое, что $P_x\{|X_T^0 - y| < \delta\} > 0$.

Легко дать различные достаточные условия для того, чтобы множество G было перемешивающим. Например, достаточно, чтобы в G оператор L_0 не вырождался, но нетрудно убедиться, что это свойство выполняется и при довольно сильных вырождениях оператора L_0.

Теорема 1. *Пусть в области D с гладкой границей ∂D выделены область Π, гомеоморфная кольцу, Γ — внешняя граница этой области, которую мы считаем гладкой, и область G. Предположим*: 1) $\rho(G, \Pi) > 0$, $\rho(\Pi, \partial D) > 0$, $\rho(G, \partial D) > 0$; 2) *траектории динамической системы* (2) *пересекают ∂D и Γ под ненулевым углом по направлению снаружи внутрь и эта динамическая система не имеет точек своего ω-предельного множества вне объединения областей G и G_1, ограниченного кривой* Γ; 3) *Π и G — перемешивающие области и вне $G_1 \cup G$ все коэффициенты в операторе L_0 при вторых производных равны* 0; 4) *все функции φ_s, на которых достигается*

$$\min\left(\inf_{\substack{\varphi:\Gamma\to\partial D\\ T>0}} S_{0T}(\varphi),\ \inf_{\substack{\varphi\in\Gamma\to\partial G\\ T>0}} S_{0T}(\varphi) + \inf_{\substack{\varphi:\partial G\to\partial D\\ T>0}} S_{0T}(\varphi)\right) = V_0, \tag{3}$$

оканчиваются на ∂D в одной и той же точке x_0. Тогда $\lim U^\varepsilon(x) = \psi(x_0)$.

Доказательство. Пусть Γ^δ — граница δ-окрестности кривой Γ, δ — малое положительное число. Положим $\sigma_0^\varepsilon = \inf\{t: X_t^\varepsilon \in \Gamma \cup \partial D\}$, $\varkappa_1^\varepsilon = \inf\{t > \sigma_0^\varepsilon : X_t^\varepsilon \in \Gamma^\delta\}, \ldots, \sigma_{n-1}^\varepsilon = \inf\{t: X_t^\varepsilon \in \partial D,\ t > \varkappa_{n-1}^\varepsilon\}$, $\varkappa_n^\varepsilon = \inf\{t > \sigma_{n-1}^\varepsilon : X_t^\varepsilon \in \Gamma^\delta\} \ldots$. Последовательность $Z_n^\varepsilon = X_{\sigma_n^\varepsilon}^\varepsilon$ образует марковскую цепь с фазовым пространством $\Gamma \cup \partial D$. Конечно, с подавляющей вероятностью при малых ε переходы в этой цепи происходят на Γ, исходя из любого начального состояния $x \in \Gamma \cup \partial D$; тем не менее при $\varepsilon \to 0$ цепь Z_n^ε рано или поздно попадет на ∂D. Покажем, что при любом $\mu > 0$ первый выход на ∂D произойдет в μ-окрестности точки x_0.

В силу предположения о единственности точки x_0

$$\min\left(\inf_{\substack{\Gamma\to\partial D\setminus U_\mu(x_0)\\ T>0}} S_{0T}(\varphi),\ \inf_{\substack{\varphi:\Gamma\to\partial D\\ T>0}} S_{0T}(\varphi) + \inf_{\substack{\varphi:\partial G\to\partial D\setminus U_\mu(x_0),\\ T>0}} S_{0T}(\varphi)\right) = V_\mu > V_0.$$

Обозначим $\lambda = (V_\mu - V_0)/2$. Покажем, что

$$\inf_{x\in\Gamma} P_x(Z_1 \in U_{\delta/2}(x_0) \cap \partial D\} > \exp\{-(V_0 + \lambda/2)/\varepsilon\}. \tag{4}$$

Действительно, если минимум в (4) достигается на первой величине, то это утверждение следует из оценок, имеющихся для случая оператора первого порядка L_0.

Если $V_0 = \inf\limits_{\substack{\varphi:\Gamma\to\partial D,\\ T>0}} S_{0T}(\varphi) + \inf\limits_{\substack{\varphi:\partial G\to\partial D,\\ T>0}} S_{0T}(\varphi)$, то пусть φ_s^1, $s \in [0, T_1]$, и φ_s^2, $s \in$

$\in[0, T_2]$, таковы, что $S_{0T_1}(\varphi^{(1)})+S_{0T_2}(\varphi^{(2)})<V_0+\lambda/4$, $\varphi_0^1\in\Gamma$, $\varphi_{T_1}^{(1)}\in\partial G$, $\varphi_0^{(2)}\in\partial G$, $\varphi_{T_2}^{(2)}\in\partial D\cap U_{\delta/4}(x_0)$. Используя оценки с функционалом действия [4], получим:

$$P_{\varphi_0^1}\{\sup_{0\leqslant s\leqslant T_1}|X_s^\varepsilon-\varphi_s^{(1)}|<\delta/4\}>\exp\{-[S_{0T_1}(\varphi^{(1)})+\lambda/10]/\varepsilon\},$$

$$P_{\varphi_0^2}\{\sup_{0\leqslant s\leqslant T_2}|X_s^\varepsilon-\varphi_s^{(2)}|<\delta/4\}>\exp\{-[S_{0T_2}(\varphi^{(2)})+\lambda/10]/\varepsilon\}. \qquad (5)$$

Так как области Π и G перемешивающие, то $\forall x\in\Pi$ при некоторых θ_1 и θ_2 $P_x\{X_{\theta_1}^0\in U_{\delta/8}(\varphi_0^{(1)})\}>\alpha_1>0$, $P_{\varphi_{T_1}^{(1)}}\{X_{\theta_2}^0\in U_{\delta/8}(\varphi_0^{(2)})\}>\alpha_1>0$. Из стандартных оценок (см., напр., [3]) следует, что $\forall$ $T>0$ и $\forall\varepsilon<\varepsilon_0$ $P_y\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t^\varepsilon-X_t^0|>\delta/8\}<\alpha_1/2$. Используя это соотношение, из последних неравенств заключаем, что при $\varepsilon<\varepsilon_0$

$$P_x\{X_{\theta_1}^\varepsilon\in U_{\delta/4}(\varphi_0^{(1)})\}>\alpha_1/2,\quad P_{\varphi_{T_1}^{(1)}}\{X_{\theta_2}^\varepsilon\in U_{\delta/4}(\varphi_0^{(2)})\}>\alpha_1/2. \qquad (6)$$

Из неравенств (5) и (6) вытекает (4), если принять во внимание строгую марковость процесса X_t^ε. Далее, используя оценки сверху для вероятностей больших уклонений (см. [4, 5]), нетрудно показать, что

$$\sup_{x\in\Pi}P_x\{Z_1\in\partial D\setminus U_{\delta/4}(x_0)\}<\exp\{-(V_0+\lambda)/\varepsilon\}. \qquad (7)$$

Для этого можно, например, отдельно оценить сверху вероятность перехода с Γ на ∂D вдоль траекторий, не задевающих область G (это делается в точности так же, как для оператора L_0 первого порядка) и вероятность траекторий, ведущих с Γ на ∂D с заходом в G. Последняя вероятность оценивается сверху произведением

$$\sup_{x\in\Gamma}P_x(\tau_G^\varepsilon<\sigma_1^\varepsilon\}\sup_{x\in\partial D}P_x\{X_{\sigma_0^\varepsilon}^\varepsilon\in\partial D\setminus U_{\delta/2}(x_0)\}, \qquad (8)$$

где $\tau_G^\varepsilon=\inf\{t: X_t^\varepsilon\in\partial G\}$ Каждый сомножитель в (8) оценивается сверху с помощью функционала действия стандартным образом, так что в результате получается оценка (7). Из оценок (4) и (7) утверждение теоремы 1 выводится совершенно так же, как для оператора L_0 первого порядка. Следует только еще иметь ввиду, что траектории процесса X_t^ε выходят из области G_1, ограниченной кривой Γ, обязательно пересекая в некоторый момент Γ, поэтому структура оператора L_0 внутри области $G_1\setminus\Pi$ не влияет на $\lim_{\varepsilon\to0}U^\varepsilon(x)$. Таким образом, наличие перемешивающих областей приводит к «облегчению» достижения диффундирующей частицей границы области. Фактически это происходит за счет того, что в операторе L_0 имеются члены,

облегчающие движение против динамической системы $x=B(x)$. Наличие членов со вторыми производными в операторе L_0 может облегчить движение против указанной динамической системы и в том случае, когда в области D нет перемешивающих множеств. Пусть оператор L^ε в полярных координатах имеет вид

$$L^\varepsilon=\frac{1}{2}A(r,\varphi)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+B^1(r,\varphi)\frac{\partial}{\partial r}+B^2(r,\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\varepsilon}{2}\Big(a^{22}(r,\varphi)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+$$
$$+a^{11}(r,\varphi)\frac{\partial^2}{\partial r^2}+2a^{12}(r,\varphi)\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}\Big)=L_0+\varepsilon L_1,\quad A(r,\varphi)>0, \qquad (9)$$
$$\det(a^{ij}(r,\varphi))>0.$$

Рассмотрим уравнение $L^\varepsilon U^\varepsilon=0$ в области D, гомеоморфной кольцу. Предположим, что траектории динамической системы входят в область D и притягиваются к предельному циклу Γ. Пусть $\partial_1 D$ — внешняя, а $\partial_2 D$ — внутренняя часть границы ∂D области D. Обозначим M_1 ближайшую к началу отсчета 0 точку $\partial_1 D$, M_2 — наиболее удаленную от 0 точку $\partial_2 D$; $|0M_1|=$ $=r$, $|0M_2|=r_2$. Пусть N_2 — ближайшая к 0, а N_1 — наиболее удаленная от 0 точка цикла Γ; $|0N_1|=\rho_1$, $|0N_2|=\rho_2$. Предполагаем, что $r_1>\rho_1>\rho_2>$

$> r_2$. Чтобы исследовать поведение при $\varepsilon \to 0$ функции $U^\varepsilon(x)$, являющейся решением задачи $L^\varepsilon U^\varepsilon(x) = 0$, $x \in D$, $U^\varepsilon(x)|_{\partial D} = \psi(x)$, рассмотрим функционал $R_{0T}(\mu)$, определенный для непрерывных функций $\mu_t(r_t, \varphi_t)$, $t \in [0, T]$, со значениями в R^r; (r, φ) — полярные координаты точки $\mu \in R^r$. Для функций μ_t с абсолютно непрерывной компонентой φ_t положим $R_{0T}(\mu_s) =$

$$= R_{0T}(r_s, \varphi_s) = \frac{1}{2}\int_0^T a_{11}(r_s, \varphi_s)[r_s - B^1(r_s, \varphi_s)]^2 ds, \quad \text{где} \quad (a_{ij}(x)) = (a^{ij}(x))^{-1};$$

для остальных μ_s считаем $R_{0T}(\mu) = +\infty$. Далее положим для функций r_s, $s \in [0, T]$, $\tilde{S}_{0T}(r) = \inf\limits_{\varphi_s \in C_{0T}(R^1)} R_{0T}(r, \varphi)$. Наконец, обозначим $S_{0T}(r)$ полунепрерывный снизу вариант функционала $\tilde{S}_{0T}(r)$: $S_{0T}(r) = \varliminf\limits_{\rho_{0T}(\tilde{r}, r) \to 0} \tilde{S}_{0T}(\tilde{r})$.

Функционал $S_{0T}(r)$ является функционалом действия для семейства процессов r_t^ε (первой компоненты процесса $X_t^\varepsilon(r_t^\varepsilon, \varphi_t^\varepsilon)$) при $\varepsilon \downarrow 0$. Это значит, что для всякой непрерывной функции $\rho_s : [0, T] \to R^1$, $\min\limits_{0 \leqslant s \leqslant T} \rho_s > \varkappa > 0$, и $\forall h, \delta > 0$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$P_{r_0}\{\sup_{0 \leqslant s \leqslant T} |r_s^\varepsilon - \rho_s| < \delta\} > \exp\{-[S_{0T}(\rho) + h]/\varepsilon\}, \; P_{r_0}\{\rho(r^\varepsilon, \Phi_{0T}(s)) > \delta\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\{-(s - h)/\varepsilon\}, \tag{10}$$

где $\Phi_{0T}(s) = \{\rho \in C_{0T}(R^1) : S_{0T}(\rho) \leqslant s\}$.

Положим $V_1 = \inf\{S_{0T}(g) : g \in C_{0T}(R^1),\ g_0 = \rho_1,\ g_T = r_1,\ T > 0\}$, $V_2 = \inf\{S_{0T}(g) : g \in C_{0T}(R^1),\ g_0 = \rho_2,\ g_T = r_2,\ T > 0\}$.

Теорема 2. *Пусть оператор L^ε задается формулой* (9) *и выполнены перечисленные выше условия. Предположим, что $V_1 < V_2$. Тогда $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} U^\varepsilon(x) = \psi(M_1)$ при $x = (r, \varphi) \in \{r_2 < r \leqslant r_1\} = \overline{\Pi}$. При $x \in D \setminus \overline{\Pi}$ $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} U^\varepsilon(x) = U^0(x)$ существует и функция $U^0(x)$ — единственное решение задачи $L_0 U^0(x) = 0$, $x \in D \setminus \overline{\Pi}$, $U^0(x)|_{\partial D} = \psi(x)$.*

Доказательство. Кольцо $\Pi = \{(r, \varphi) : \rho_2 < r < \rho_1\}$ является перемешивающей областью. Из любой точки этого кольца можно попасть в окрестность любой другой за счет движения по предельному циклу и диффузии по углу. Как и в случае теоремы 1, можно ввести марковскую цепь с фазовым пространством $\partial_1 D \cup \partial_2 D \cup \{(r, \varphi) : r = \rho_1\} \cup \{(r, \varphi) : r = \rho_2\}$. Переходы в состояния, принадлежащие $\partial D = \partial_1 D \cup \partial_2 D$, при малых ε маловероятны. Если $V_1 < V_2$, то из оценок (10) стандартным образом выводится, что вероятность достижения окружности $r = r_2$ из точек кольца Π бесконечно мала при $\varepsilon \to 0$ по сравнению с вероятностью достижения окружности $r = r_1 + \delta$, если δ достаточно мало. Отсюда немедленно выводится, что с подавляющей при малых ε вероятностью $X^\varepsilon_{\tau^\varepsilon} \in U_{2\delta}(M_1) \cap \partial_1 D$. Из этого утверждения, с учетом непрерывности граничной функции, вытекает, что $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} U^\varepsilon(x) = \psi(M_1)$ при $x \in \overline{\Pi}$. Если $x \in D \setminus \overline{\Pi}$, то утверждение теоремы вытекает из теоремы 1 работы [5].

1. *Levinson N.* The first boudnary value problem for $\varepsilon\Delta И + A(x, y) U_x + B(x, y) U_y + C(x, y) U = D(x, y)$ for small ε.— Ann. Math. Ser. 2, 1950, p. 428—445.
2. *Хасьминский Р. З.* О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией.— Теор. вероятн. и ее применение, 1963, 8, № 1, с. 3—25.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов.— М. : Наука, 1965.— 655 с.
4. *Сарафян В. В.* Об асимптотике первого собственного значения эллиптического оператора с малым параметром.— Докл. АН АрмССР, 1982, 25, № 3, с. 79—83.
5. *Сафарян Р. Г.* Некоторые краевые задачи с малым параметром для вырождающихся диффузионных процессов и соответствующих дифференциальных уравнений.— Изв. АН АрмССР. Математика, 1980, 15, № 4, с. 258—267.

Арм. пед. ин-т

Поступила 29.02.84