УДК 517.938

Ю. А. Митропольский, В. Л. Кулик

Ограниченные решения нелинейных систем дифференциальных уравнений

При изучении интегральных многообразий [1—6] важным фактором является поведение на всей оси $R =]-\infty, \infty[$ решений линейной системы дифференциальных уарвнений

$$dh/dt = H(t)\,h, \tag{1}$$

в которой $h = (h_1, \ldots, h_n) \in R^n$, $t \in R$, $H(t)$ — непрерывная и ограниченная на всей оси R матричная функция. При этом, как правило, предполагалось, что нормальная фундаментальная матрица решений $\Omega_\tau^t(H)$ $(\Omega_\tau^\tau(H) = I_n$ — n-мерная единичная матрица) удовлетворяет одной из оценок а) $\|\Omega_\tau^t(H)\| \leqslant K \exp\{-\gamma(t-\tau)\}$, $\tau \leqslant t$, $t, \tau \in R$, б) $\|\Omega_\tau^t(H)\| \leqslant K \exp\{\gamma(t-\tau)\}$, $t \leqslant \tau$, или же матрица $H(t)$ представима в блочно-диагональном виде $H(t) = \operatorname{diag}\{H^+(t), H^-(t)\}$, и при этом имеют место следующие неравенства: в) $\|\Omega_\tau^t(H^+)\| \leqslant K \exp\{-\gamma(t-\tau)\}$, $\tau \leqslant t$; $\|\Omega_\tau^t(H^-)\| \leqslant K \exp\{\gamma(t-\tau)\}$, $t \leqslant \tau$, $K, \gamma = \mathrm{const} > 0$; т. е. система (1) обладает экспоненциальной дихотомией на всей оси R. Каждое из этих условий гарантирует существование единственного ограниченного на R решения неоднородной системы уравнений

$$dh/dt = H(t)h + \varphi(t) \tag{2}$$

при непрерывной и ограниченной на R вектор-функции $\varphi(t)$ $(\varphi(t) \in C^0(R))$ Хорошо известно и обратное утверждение: если при каждой вектор-функции $\varphi(t) \in C^0(R)$ система (2) имеет единственное ограниченное на R решение, то матрицант системы (1) $\Omega_\tau^t(H)$ обязательно подчинен одной из оценок а), б), в). Ограниченное на R решение $h(t)$ системы (2) всегда можно представить в интегральной форме

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau)\varphi(\tau)\, d\tau, \tag{3}$$

где $G(t,\tau)$ — функция Грина, имеющая в каждом из случаев а), б), в) следующий вид:

$$\text{а) } G(t,\tau) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(H), & \tau \leqslant t, \\ 0 & \tau > t, \end{cases} \quad \text{б) } G(t,\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leqslant t, \\ -\Omega_\tau^t(H), & \tau > t, \end{cases}$$

$$\text{в) } G(t,\tau) = \begin{cases} \operatorname{diag}\{\Omega_\tau^t(H^+), 0\}, & \tau \leqslant t, \\ -\operatorname{diag}\{0, \Omega_\tau^t(H^-)\}, & \tau > t. \end{cases}$$

Отметим, что интегральное представление (3) позволило получить многие результаты для слабо нелинейных систем, применяя при этом хорошо известный принцип сжатых отображений.

В работе [7] отмечено, что если система (1) обладает слабой регулярностью на R, т. е. при каждой вектор-функции $\varphi(t) \in C^0(R)$ система (2) имеет хотя бы одно ограниченное на R решение, то отсюда, вообще говоря, не следует экспоненциальная дихотомичность системы (1) на всей оси R. В последнее время к изучению вопросов слабой регулярности были применены знакопеременные квадратичные формы. В дальнейшем будем использовать один из основных результатов работы [8], который заключается в следующем. Для слабой регулярности на R системы (1) необходимо и достаточно, чтобы существовала квадратичная форма $V(t, h) = \langle S(t)h, h\rangle$ с непрерывно дифференцируемыми и ограниченными на R коэффициентами: $S(t) \equiv S^T(t) \in C^1(R)$ такая, что производная $\dot{V}(t, h)$ вдоль решений сопряженной системы

$$dh/dt = -H^T(t)h \tag{4}$$

является знакоопределенной:

$$\dot{V}(t,h) = \langle(\dot{S}(t) - S(t)H^T(t) - H(t)S(t))h, h\rangle \leqslant -\|h\|^2. \tag{5}$$

З а м е ч а н и е. Если $\det S(t)$ в некоторый момент времени превращается в нуль, то система (1) имеет нетривиальные ограниченные на R решения, экспоненциально затухающие на $-\infty$ и на $+\infty$. Причем моментов времени $t_1, \ldots, t_k$, в которых определитель симметричной матрицы $S(t)$ превращается в нуль, не более чем n (n — размерность системы (1)). Размерность подпространства $\hat{E}$, состоящего из ограниченных на R решений системы (1), вычисляется по формуле

$$\dim \hat{E} = n^-(T_2) - n^-(T_1), \tag{6}$$

где T_1, T_2 — некоторые фиксированные моменты времени такие, что $T_1 < t_i < T_2$, $i = \overline{1, k}$, $n^-(T)$ — количество отрицательных собственных чисел матрицы $S(T)$. Приведем также один из основных результатов работы [9]. Пусть существует n-мерная симметричная матричная функция $S(t)$, ограниченная и непрерывно дифференцируемая на всей оси R и удовлетворяющая условию (5); тогда существует замена переменных Ляпунова $h = L(t)y$, преобразующая систему уравнений (1) к виду

$$dy_1/dt = H^+(t)\, y_1, \quad dy_2/dt = H^-(t)\, y_2, \tag{7}$$

$$dy_3/dt = H_1(t)\, y_1 + H_2(t)\, y_2 + \hat{H}(t)\, y_3.$$

При этом для матрицантов $\Omega_\tau^t(H^\pm)$, $\Omega_\tau^t(\hat{H})$ имеют место оценки

$$\|\Omega_\tau^t(H^+)\| \leqslant K \exp\{-\gamma(t-\tau)\}, \qquad \tau \leqslant t;$$

$$\|\Omega_\tau^t(H^-)\| \leqslant K \exp\{\gamma(t-\tau)\}, \qquad t \leqslant \tau,$$

$$\|\Omega_\tau^t(\hat{H})\| \leqslant K \begin{cases} \exp\{-\gamma(t-\tau)\}, & 0 \leqslant \tau \leqslant t, \\ \exp\{\gamma(t-\tau)\}, & t \leqslant \tau \leqslant 0, \qquad K, \gamma - \mathrm{const} > 0, \end{cases} \tag{8}$$

$H_1(t)$, $H_2(t)$ — некоторые прямоугольные матричные функции, непрерывные и ограниченные на всей оси R.

Условие слабой регулярности на R системы (1) эквивалентно существованию $n \times n$-мерной матрицы $C(t) \in C^0(R)$ (не обязательно проектирующей) такой, что функция

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(H)\, C(\tau), & \tau \leqslant t, \\ \Omega_\tau^t(H)\,(C(\tau) - I_n), & \tau > t \end{cases} \tag{9}$$

подчинена оценке

$$\|G(t, \tau)\| \leqslant K \exp\{-\gamma|t-\tau|\}, \tag{10}$$

K, γ — const > 0. Функцию (9) с оценкой (10) и называют функцией Грина задачи об ограниченных на R решениях для системы уравнений (1). Отметим, что если симметричная матрица $S(t)$, входящая в оценку (5), хотя бы в один момент времени вырождается, то матрица $C(\tau)$ в (9) не является проектирующей и в ее выборе имеется некий произвол (см. [9]).

Напомним, что через $C^0(R)$ будем обозначать пространство функций $f(t)$, непрерывных и ограниченных на всей оси R, $\|f\|_0 = \sup_{t \in R} \|f(t)\|$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dh/dt = H(t)\, h + Q(t, h) + \varphi(t), \tag{11}$$

в которой нелинейная вектор-функция $Q(t, h)$ определена и непрерывна при всех $(t, h) \in R \times R^n$, $Q(t, 0) \equiv 0$, $H(t)$, $\varphi(t) \in C^0(R)$. Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть система уравнений* (1) *слабо регулярна на* R *и для непрерывной функции* $Q(t, h)$ *выполняются следующие условия.*

1. *При всех* $h \in R^n$, $t \in R$ *выполняется оценка*

$$\|Q(t, h)\| \leqslant \mu(\|h\|), \tag{12}$$

где $\mu(\sigma)$ — *непрерывная неубывающая скалярная функция, определенная при всех* $\sigma \in [0, +\infty[$ *и удовлетворяющая условию*

$$\lim_{\sigma \to +\infty} \mu(\sigma)/\sigma = 0. \tag{13}$$

2. *Для каждого шара в* R^n: $Ш(r) = \{h \mid \|h\| \leqslant r\}$ *имеет место оценка*

$$\|Q(t, h) - Q(t, \bar{h})\| \leqslant \nu(\|h - \bar{h}\|; r), \ h, \bar{h} \in Ш(r) \tag{14}$$

с некоторой непрерывной неубывающей функцией $\nu(u; r)$, $\nu(0; r) = 0$, $u \in [0, 2r]$, *зависящей от* r.

Тогда при каждой вектор-функции $\varphi(t) \in C^\circ(R)$ *система уравнений* (11) *имеет по крайней мере одно ограниченное на* R *решение*.

Доказательство. Выполнение условия (13) гарантирует существование положительного числа d такого, что

$$2K(\mu(d) + \|\varphi\|_0) \leqslant \gamma d, \tag{15}$$

где постоянные K, γ взяты из оценки (10).

Через $\mathfrak{M}(d)$ обозначим множество функций $f(t) \in C^\circ(R)$, для которых выполняется неравенство $\|f\|_0 \leqslant d$. Пусть $F(t)$ — n-мерная вектор-функция из $\mathfrak{M}(d)$; тогда ограниченное на R решение системы

$$dh/dt = H(t)h + Q(t, F(t)) + \varphi(t)$$

можно записать в следующем виде:

$$h^F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau)[Q(\tau, F(\tau)) + \varphi(\tau)]\,d\tau, \tag{16}$$

где $G(t, \tau)$ — функция Грина (9) с оценкой (10).

Таким образом, равенством (16) определяется некоторый оператор W, действующий на функции $F(t) \in \mathfrak{M}(d)$. Покажем, что при всех $F(t) \in \mathfrak{M}(d)$ имеет место включение

$$WF(t) \in \mathfrak{M}(d). \tag{17}$$

Для этого достаточно оценить правую часть (16):

$$\|WF(t)\| \leqslant K \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\gamma|t - \tau|\}[\mu(\|F(\tau)\|) + \|\varphi(\tau)\|]\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 2K\gamma^{-1}(\mu(d) + \|\varphi\|_0) \leqslant d.$$

Оценка (14) позволяет убедиться в непрерывности оператора W:

$$\|WF(t) - W\bar{F}(t)\| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \|G(t, \tau)\| \, \|Q(\tau, F(\tau)) - Q(\tau, \bar{F}(\tau))\|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant K \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\gamma|t - \tau|\}\,\nu(\|F(\tau) - \bar{F}(\tau)\|; d)\,d\tau \leqslant 2K\gamma^{-1}\nu(\|F - \bar{F}\|_0; d).$$

Таким образом, оператор W переводит каждую функцию $F(t)$ из шара $\mathfrak{M}(d)$ в функцию $WF(t)$, также принадлежащую шару $\mathfrak{M}(d)$. При этом оператор W является непрерывным, а пространство функций $C^0(R)$ — полным. В силу известной теоремы Шаудера, оператор W должен иметь хотя бы одну неподвижную точку $h(t) \in \mathfrak{M}(d)$, которая и представляет собой ограниченное на R решение системы (11).

В качестве примера рассмотрим систему уравнений

$$dh_1/dt = -(\operatorname{th} t)h_1 + \lambda(\operatorname{arctg} t)h_2 + (h_1^2 + 5h_2^2)(2h_1^2 - 2h_1h_2 + 3h_2^2)^{-1}\sin t +$$

$$+ \varphi_1(t), \ dh_2/dt = \nu(\sin t^2)h_1 + (3t^2 + 1)(t^2 + t + 1)^{-1}h_2 +$$

$$+ (7h_1^2 - h_2^2)(h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2 + 3)^{-1}\cos t + \varphi_2(t). \tag{11'}$$

Задача заключается в подборе таких параметров λ и ν, чтобы система (11′) при любых непрерывных и ограниченных на R функциях $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ имела хотя бы одно ограниченное на R решение.

Система уравнений (4) имеет вид

$$dh_1/dt = (\operatorname{th} t)\, h_1 - \nu (\sin t^2)\, h_2, \quad dh_2/dt = -\lambda (\operatorname{arctg} t)\, h_1 - \\ - (3t^2 + 1)(t^2 + t + 1)^{-1} h_2. \tag{4'}$$

В качестве квадратичной формы выберем $V = -(\operatorname{th} t)\, h_1^2 + h_2^2$. Запишем и оценим производную вдоль решений системы (4′):

$$\dot V = -4(e^t + e^{-t})^{-2} h_1^2 - 2(\operatorname{th} t)^2 h_1^2 + 2\nu \operatorname{th} t (\sin t^2)\, h_1 h_2 - \\ - 2\lambda (\operatorname{arctg} t)\, h_1 h_2 - 2(3t^2 + 1)(t^2 + t + 1)^{-1} h_2^2 \leqslant -h_1^2 - 24h_2^2/13 + \\ + |\nu| (h_1^2 + h_2^2) + |\lambda| (h_1^2 + h_2^2)\, \pi/2.$$

Отсюда видно, что неравенство $|\nu| + |\lambda| \pi/2 < 1$ влечет за собой отрицательную определенность производной $\dot V$. Убедимся, что нелинейные функции ограничены при всех $h_1, h_2 \in R$:

$$|Q_1(t, h_1, h_2)| = |(h_1^2 + 5h_2^2)(2h_1^2 - 2h_1h_2 + 3h_2^2 + 1)^{-1} \sin t| \leqslant \\ \leqslant (h_1^2 + 5h_2^2)(h_1^2 + 2h_2^2 + 1)^{-1} \leqslant 2{,}5, \ |Q_2(t, h_1, h_2)| \leqslant \\ \leqslant (7h_1^2 + h_2^2)(h_1^2/2 + h_2^2/2 + 3)^{-1} \leqslant 14.$$

Таким образом, условия (12), (13) выполняются.

Поскольку функции $Q_1(t, h_1, h_2)$, $Q_2(t, h_1, h_2)$ непрерывно дифференцируемы по h_i и их производные равномерно ограничены по t в каждом шаре $h_1^2 + h_2^2 \leqslant r$, то неравенство (14) выполняется и при этом $\nu(u; r) = K(r)\, u$. Следовательно, утверждение теоремы 1 гарантирует существование ограниченных на R решений системы (11′).

Т е о р е м а 2. *Пусть существует квадратичная форма* $V(t, h) = \langle S(t)\, h, h\rangle$ *с непрерывно дифференцируемой и ограниченной на* R *матрицей коэффициентов* $S(t)$, *удовлетворяющая условию* (5), *и непрерывная вектор-функция* $Q(t, h)$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\| Q(t, h) - Q(t, \bar h) \| \leqslant \Delta \| h - \bar h \| \tag{18}$$

при всех $h, \bar h \in R^n$ *и достаточно малой постоянной* Δ:

$$\Delta < \gamma (2K)^{-1}, \tag{19}$$

где K, γ *взяты из оценки* (10).

Тогда система уравнений (11) *при каждой фиксированной вектор-функции* $\varphi(t) \in C^0(R)$ *имеет* p*-параметрическое семейство ограниченных на* R *решений*

$$h = h(t; \eta), \qquad \eta \in R^p, \tag{20}$$

где размерность $p = \dim \hat E$ *определяется формулой* (6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F(t)$ — некоторая функция из пространства $C^0(R)$; тогда ограниченные на R решения системы

$$dh/dt = H(t)\, h + Q(t, F(t)) + \varphi(t) \tag{21}$$

можно записать в виде

$$h^F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau)\, [Q(\tau, F(\tau)) + \varphi(\tau)]\, d\tau + \Omega_0^t(H)\, Pz, \tag{22}$$

где P — постоянная матрица проектирования на подпространство $\hat E(0)$, которое состоит из всех начальных точек ограниченных на R решений системы (1), z — произвольный числовой вектор из R^n.

Множество значений $\{Pz\}$, $z \in R^n$, определяет некоторую плоскость в R^n. Эту плоскость можно записать в виде системы уравнений

$$Px = x, \quad x \in R^n. \tag{23}$$

Поскольку rang $P = p$, то система (23) имеет p линейно независимых решений $e_1, \ldots, e_p$. Из этих векторов составим матрицу $E = [e_1, \ldots, e_p]$. Теперь равенство (22) можно записать следующим образом:

$$h^F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau)[Q(\tau, F(\tau)) + \varphi(\tau)]\, d\tau + \Omega_0^t(H) E\eta, \tag{24}$$

η — произвольный числовой вектор из R^p. Оценки (18), (19) обеспечивают существование функции (20), которая является неподвижной точкой оператора (24).

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений вида

$$dh/dt = H(t)h + Q(t, g, h) + \varphi(t, g), \quad dg/dt = \omega(t, g), \tag{25}$$

где $h = (h_1, \ldots, h_n) \in R^n$, $g = (g_1, \ldots, g_m) \in R^m$, $t \in R$, $H(t) \in C^0(R)$.

Вектор-функции $Q(t, g, h)$, $\varphi(t, g)$, $\omega(t, g)$ определены при всех $t \in R$, $g \in R^m$, $h \in R^n$ и непрерывны по совокупности переменных (t, g, h), $Q(t, g, 0) \equiv 0$. При этом относительно $\omega(t, g)$ дополнительно будем предполагать, что задача Коши

$$dg/dt = \omega(t, g), \quad g|_{t=t_0} = g_0, \tag{26}$$

имеет единственное решение $g_t(t_0, g_0)$, и оно определено при всех $t \in R$. Для этого, очевидно, достаточно, чтобы вектор-функция $\omega(t, g)$ удовлетворяла условию Липшица по переменной g и была ограничена при всех $t \in R$, $g \in R^m$.

Обозначим $C^0(R \times R^m)$ пространство функций $F(t, g)$, непрерывных по совокупности переменных t, g и ограниченных при всех $t \in R$, $g \in R^m$ с нормой $\|F\|_0 = \sup\limits_{t \in R, g \in R^m} \|F(t, g)\|$.

Напомним определение непрерывного ограниченного интегрального многообразия для системы уравнений (25).

Определение. *Равенством*

$$h = f(t, g) \tag{27}$$

определяется непрерывное ограниченное интегральное многообразие для системы уравнений (25), *если* $f(t, g) \in C^0(R \times R^m)$, *вектор-функция* $f(t, g_t(t_0, g_0))$ *непрерывно дифференцируема по переменной* t *и выполняется тождество*

$$df(t, g_t(t_0, g_0))/dt \equiv H(t) f(t, g_t(t_0, g_0)) + Q(t, g_t(t_0, g_0), f(t, g_t(t_0, g_0))) + \\ + \varphi(t, g_t(t_0, g_0)) \quad \forall t, t_0 \in R, \ \forall g_0 \in R^m. \tag{28}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть система уравнений* (1) *слабо регулярна на* R *и для непрерывной вектор-функции* $Q(t, g, h)$ *выполняются следующие условия.*

1. *При всех* $t \in R$, $g \in R^m$, $h \in R^n$ *выполняется оценка* $\|Q(t, g, h)\| \leqslant \mu(\|h\|)$, $\mu(\sigma)$ — *непрерывная неубывающая скалярная функция, определенная при всех* $\sigma \in R_+$, *удовлетворяющая условию* (13).
2. *Для каждого шара* Ш $(r) \in R^n$ *имеет место оценка*

$$\|Q(t, g, h) - Q(t, g, \bar{h})\| \leqslant \nu(\|h - \bar{h}\|; r), \ h, \bar{h} \in \text{Ш}(r), \tag{29}$$

где $\nu(\sigma; r)$ — *непрерывная неубывающая скалярная функция* $\nu(0; r) = 0$.

Тогда при каждой вектор-функции $\varphi(t, g) \in C^0(R \times R^m)$ *система уравнений* (25) *имеет по крайней мере одно непрерывное ограниченное интегральное многообразие, определяемое равенством* (27).

Доказательство. Зафиксируем некоторый шар $\mathfrak{M}(d)$ в пространстве $C^0(R \times R^m)$: $\mathfrak{M}(d) = \{F(t, g) \mid \|F\|_0 \leqslant d\}$. При этом число d удовлетворяет неравенству (15). Для каждой функции $F(t, g) \in \mathfrak{M}(d)$ рассмотрим линейную неоднородную систему уравнений с параметрами t_0, g_0:

$$dh/dt = H(t + t_0)h + Q(t + t_0, g_{t+t_0}(t_0, g_0), F(t + t_0, g_{t+t_0}(t_0, g_0))) + \\ + \varphi(t + t_0, g_{t+t_0}(t_0, g_0)). \qquad (30)$$

Ограниченные на R решения этой системы можно представить в виде

$$h_t^F(t_0, g_0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t + t_0, \tau + t_0)[Q(\tau + t_0, g_{\tau+t_0}(t_0, g_0), F(\tau + \\ + t_0, g_{\tau+t_0}(t_0, g_0))) + \varphi(\tau + t_0, g_{\tau+t_0}(t_0, g_0))]\, d\tau + \Omega_0^{t+t_0}(H)E\eta, \qquad (31)$$

где прямоугольная матрица E та же, что и в равенстве (24), $\eta \in R^p$, $G(t, \tau)$ — функция Грина (9) с оценкой (10). Полагая в равенстве (31) $t = 0$ и переобозначая $t_0 \to t$, $g_0 \to g$, получаем

$$h_0^F(t, g) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau + t)[Q(\tau + t, g_{\tau+t}(t, g), F(\tau + t, g_{\tau+t}(t, g))) + \\ + \varphi(\tau + t, g_{\tau+t}(t, g))]\, d\tau + \Omega_0^t(H)E\eta, \quad \eta \in R^p. \qquad (32$$

Правую часть равенства (32) можно рассматривать при каждом фиксированном $\eta \in R^p$ как некоторый оператор W_η, действующий в пространстве $C^0(R \times R^m)$: $W_\eta F \in C^0(R \times R^m)$. Выполнение неравенства (15) обеспечивает существование шара $\mathfrak{M}(d) \subset C^0(R \times R^m)$ такого, что при каждой функции $F(t, g) \in \mathfrak{M}(d)$ имеет место включение $W_0 F(t, g) \in \mathfrak{M}(d)$. Оценка (29) гарантирует непрерывность оператора W_η. На основании известной теоремы Шаудера приходим к выводу, что оператор W_0 имеет хотя бы одну неподвижную точку $f(t, g) \in \mathfrak{M}(d) \subset C^0(R \times R^m)$:

$$f(t, g) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \sigma)[Q(\sigma, g_\sigma(t, g), f(\sigma, g_\sigma(t, g))) + \varphi(\sigma, g_\sigma(t, g))]\, d\sigma. \qquad (33)$$

Проверим выполнение тождества (28) для функции $f(t, g_t(t_0, g_0))$. Для этого сначала заметим, что

$$g_\sigma(t, g_t(t_0, g_0)) \equiv g_\sigma(t_0, g_0) \qquad (34)$$

при всех $\sigma \in R$, $t \in R$, $t_0 \in R$, $g_0 \in R^m$. Действительно, правая и левая части тождества (34) являются решениями системы $dg/d\sigma = \omega(\sigma, g)$ и их начальные точки при $\sigma = t$ совпадают. Поэтому, в силу единственности решения задачи Коши (26), мы вправе утверждать, что тождество (34) выполняется. Из равенства (33) с учетом тождества (34) для функции $f(t, g_t(t_0, g_0))$ получаем следующее представление:

$$f(t, g_t(t_0, g_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \sigma)[Q(\sigma, g_\sigma(t_0, g_0), f(\sigma, g_\sigma(t_0, g_0))) + \\ + \varphi(\sigma, g_\sigma(t_0, g_0))]\, d\sigma. \qquad (35)$$

Очевидно, что для функции (35) выполняется тождество (28). Этим и завершается доказательство теоремы 3.

З а м е ч а н и е. Поскольку оператор W_η при каждом фиксированном $\eta \in R^p$ может иметь не одну неподвижную точку, то при условиях теоремы 3 невозможно установить количество непрерывных ограниченных интегральных многообразий для системы уравнений (25). Однако это можно установить, применяя известный принцип сжимающих отображений.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть непрерывная вектор-функция $Q(t, g, h)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной $h: \| Q(t, g, h) - Q(t, g, \bar{h}) \| \leqslant \leqslant \Delta \| \bar{h} - h \|$ при всех $h, \bar{h} \in R^n$ и достаточно малой постоянной Липшица $\Delta: \Delta < \gamma (2K)^{-1}$, где K, γ взяты из оценки* (10). *Тогда при условии слабой регулярности на R системы* (1) *нелинейная система уравнений* (25) *при каждой вектор-функции $\varphi(t, g) \in C^0(R \times R^m)$ имеет p-параметрическое семейство непрерывных ограниченных интегральных многообразий $h = f(t, g; \eta)$, $\eta \in \in R^p$, где размерность $p = \dim \hat{E}$ определяется формулой* (6).

Доказательство приведенного утверждения не представляет трудностей, поскольку в (32) оператор $\mathbb{W}_\eta$ уже записан в явном виде,

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений вида

$$dh/dt = H(t) h + Q(t, g, h), \quad dg/dt = \omega(t, g, h), \tag{36}$$

$h \in R^n$, $g \in R^m$, $t \in R$. Матричная функция $H(t) \in C^0(R)$, а вектор-функции $\omega(t, g, h)$ и $Q(t, g, h)$ определены и непрерывны по совокупности переменных (t, g, h) при всех $t \in R$, $g \in R^m$, $h \in R^n$. При этом предполагаем, что вектор-функции Q, ω удовлетворяют условию Липшица по переменным g и h:

$$\| Q(t, g, h) - Q(t, \bar{g}, \bar{h}) \| \leqslant K_1 \| g - \bar{g} \| + K_2 \| h - \bar{h} \|,$$

$$\| \omega(t, g, h) - \omega(t, \bar{g}, \bar{h}) \| \leqslant K_3 \| g - \bar{g} \| + K_4 \| h - \bar{h} \|, \tag{37}$$

$g, \bar{g} \in R^m$, $h, \bar{h} \in R^n$, $K_i = \mathrm{const} > 0$ и, кроме этого,

$$Q(t, g, 0), \ \omega(t, g, 0) \in C^0(R \times R^m). \tag{38}$$

Теорема 5. *Пусть для правых частей системы дифференциальных уравнений* (36) *выполняются такие условия.*

1. *Для непрерывной и ограниченной на R матричной функции $H(t)$ существует симметричная матричная функция $S(t)$ с непрерывно дифференцируемыми и ограниченными на R элементами, удовлетворяющая условию* (5) *при всех $h \in R^n$.*

2. *Нелинейные вектор-функции $Q(t, g, h)$, $\omega(t, g, h)$ удовлетворяют условиям* (38), (37) *с постоянными Липшица K_i, $i = \overline{1, 4}$, такими, что существует положительное число Δ_0, удовлетворяющее одновременно трем неравенствам*

$$K_3 + \Delta_0 K_4 < \gamma, \tag{39}$$

$$2K(K_1 + \Delta_0 K_2) < \Delta_0 (\gamma - (K_3 + \Delta_0 K_4)), \tag{40}$$

$$2K(K_1 + \Delta_0 K_2) K_4 (\gamma - (K_3 + \Delta_0 K_4))^{-1} (K_3 + \Delta_0 K_4)^{-1} + 2K K_2 \gamma^{-1} < 1, \tag{41}$$

где постоянные K, γ взяты из оценки (10).

Тогда для системы уравнений (36) *существует p-параметрическое семейство непрерывных и ограниченных интегральных многообразий $h = = f(t, g; \eta)$, $\eta \in R^p$, где $p = \dim \hat{E}$ определено равенством* (6). *При этом функция $f(t, g; \eta)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным g с постоянной Δ_0.*

Доказательство. Через $C(\Delta_0)$ обозначим класс функций $F(t, g) \in C^0(R \times R^m)$, удовлетворяющих условию Липшица по переменным g:

$$\| F(t, g) - F(t, \bar{g}) \| \leqslant \Delta_0 \| g - \bar{g} \|, \quad g, \bar{g} \in R^m. \tag{42}$$

Для каждой функции $F(t, g) \in C(\Delta_0)$ по аналогии с (32) запишем интегральное преобразование

$$h_0^F(t, g) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \sigma) Q(\sigma, g_\sigma^F(t, g), \ F(\sigma, g_\sigma^F(t, g))) \, d\sigma + \Omega_0^t(H) E\eta, \quad \eta \in R^p, \tag{43}$$

где $g_t^F(t_0, g_0)$ — решение задачи Коши $dg/dt = \omega(t, g, F(t, g))$, $g|_{t=t_0} = g_0$. Оценим разность $R_t = g_t^F(t_0, g_0) - g_t^{\overline{F}}(t_0, \overline{g}_0)$:

$$R_t = g_0 - \overline{g}_0 + \int_{t_0}^{t} (\omega(\sigma, g_\sigma^F(t_0 g_0), F(\sigma, g_\sigma^F(t_0, g_0))) -$$

$$- \omega(\sigma, g_\sigma^{\overline{F}}(t_0, g_0), \overline{F}(\sigma, g_\sigma^{\overline{F}}(t_0, g_0)))) d\sigma.$$

Отсюда при $t_0 \leqslant t$ получаем

$$\| R_t \| \leqslant \| g_0 - \overline{g}_0 \| + \int_{t_0}^{t} K_3 \| R_\sigma \| d\sigma + K_4 \int_{t_0}^{t} \| F(\sigma, g_\sigma^F(t_0, g_0)) -$$

$$- \overline{F}(\sigma, g_\sigma^{\overline{F}}(t_0, g_0)) \| d\sigma \leqslant \| g_0 - \overline{g}_0 \| + (K_3 + K_4\Delta_0) \int_{t_0}^{t} \| R_\sigma \| d\sigma +$$

$$+ K_4 \| F - \overline{F} \|_0 (t - t_0).$$

Таким образом,

$$\| R_t \| \leqslant ((K_3 + K_4\Delta_0)^{-1} K_4 \| F - \overline{F} \|_0 + \| g_0 - \overline{g}_0 \|) \times$$
$$\times \exp\{(K_3 + K_4\Delta_0) | t - t_0 |\}. \tag{44}$$

Учитывая неравенства (10), (42), (44), оценим разность

$$h_0^F(t, g) - h_0^{\overline{F}}(t, \overline{g}) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \sigma) [Q(\sigma, g_\sigma^F(t, g), F(\sigma, g_\sigma^F(t, g))) -$$

$$- Q(\sigma, g_\sigma^{\overline{F}}(t, \overline{g}), \overline{F}(\sigma, g_\sigma^{\overline{F}}(t, \overline{g})))] d\sigma.$$

Получаем

$$\| h_0^F(t, g) - h_0^{\overline{F}}(t, \overline{g}) \| \leqslant K \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\gamma | t - \sigma |\} (K_1 \| R_\sigma \| +$$

$$+ K_2 \| F - \overline{F} \|_0 + K_2\Delta_0 \| R_\sigma \|) d\sigma \leqslant (2K(K_1 + \Delta_0 K_2) K_4 \times$$
$$\times (\gamma - (K_3 + \Delta_0 K_4))^{-1} (K_3 + \Delta_0 K_4)^{-1} + 2KK_2\gamma^{-1}) \| F - \overline{F} \|_0 +$$
$$+ 2K(K_1 + \Delta_0 K_2)(\gamma - (K_3 + \Delta_0 K_4))^{-1} \| g - \overline{g} \|. \tag{45}$$

Неравенство (39) гарантирует сходимость интеграла при получении оценки (45), неравенство (40) обеспечивает действие оператора (43) в классе функций $C(\Delta_0)$, а из выполнения (41) следует сжимаемость оператора (43). Это позволяет утверждать существование неподвижной точки $f(t, g; \eta) \in C(\Delta_0)$ для оператора (43), что и завершает доказательство теоремы 5.

1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике.— Киев : Изд-во АН УССР, 1945.— 137 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 244 с.
3. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
4. *Митропольский Ю. А.* Об исследовании интегрального многообразия для системы нелинейных уравнений с переменными коэффициентами.— Укр. мат. журн., 1958, **10**, № 3, с. 270—279.
5. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, **34**, с. 1219—1240.
6. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на римановых многообразиях отрицательной кривизны.— Тр. Мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 1967, **90**, с. 1—210.
7. *Плисс В. А.* Ограниченные решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений.— В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев : Наук. думка, 1977, с. 168—173.

8. *Кулик В. Л.* Квадратичные формы и дихотомия решений систем линейных дифференциальных уравнений.— Укр. мат. журн., 1982, 34, № 1, с. 43—49.
9. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование линейных систем дифференциальных уравнений с помощью квадратичных форм.— Киев, 1982.— 44 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 82.10).
10. *Перов А. И., Трубников Ю. В.* Монотонные дифференциальные уравнения. IV.— Дифференц. уравнения, 1978, **14**, № 7, с. 1190—1202.
11. *Валеев К. Г., Финин Г. С.* Построение функций Ляпунова.— Киев : Наук. думка, 1981.— 412 с.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 28.02.84