УДК 519.21

О. В. Іванов, В. В. Приходько (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ)

ПРО ОЦІНКУ УІТЛА ПАРАМЕТРА СПЕКТРАЛЬНОЇ ЩІЛЬНОСТІ ВИПАДКОВОГО ШУМУ В МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ

A nonlinear regression model with continuous time is considered. We establish the consistency and asymptotic normality of the Whittle minimum contrast estimator for the parameter of spectral density of the Gaussian stationary noise.

Рассматривается нелинейная модель регрессии с непрерывным временем. Установлены свойства состоятельности и асимптотической нормальности оценки минимального контраста Уитла параметра спектральной плотности гауссовского стационарного шума.

Вступ. Коли в моделі регресії за спостереженнями процесу „сигнал + шум” виникає потреба оцінити функціональні характеристики випадкового шуму, то сигнал із корисного перетворюється на заважаючий. Для того щоб знешкодити його вплив, необхідно спочатку оцінити параметр функції регресії, а потім будувати оцінки, скажімо, параметра спектральної щільності стаціонарного випадкового шуму за допомогою залишків.

Для оцінювання невідомого параметра функції регресії доцільно використовувати, наприклад, оцінку найменших квадратів (о. н. к.), означення якої не потребує знання жодної характеристики випадкового шуму. Численні асимптотичні властивості о. н. к. параметра нелінійної регресії отримано у монографіях [1, 2].

Оцінки Уітла параметра спектральної щільності стаціонарного процесу за 60 років з часу їх винаходу [3, 4] відіграли важливу роль у параметричному оцінюванні в частотній області. Отримані тут результати створюють розвинену теорію, що охоплює широкий спектр математичних моделей випадкових процесів і полів [5 – 21], якщо згадати лише деякі публікації. В роботі [23] було здійснено синтез робіт з оцінювання параметрів лінійної моделі регресії та з оцінювання параметрів спектральної щільності випадкового шуму методом Уітла у випадку дискретного часу та сильної залежності похибок спостережень.

У даній роботі ми обмежимося випадком гауссівського стаціонарного шуму і будемо використовувати результати робіт [20, 22], де модель регресії не розглядалась, як відправну точку наших досліджень, результатами яких є встановлення асимптотичних властивостей оцінки Уітла параметра спектральної щільності випадкового шуму в нелінійній моделі регресії з неперервним часом. Так, у пунктах 1, 2 доведено слабку консистентність розглянутої оцінки, а у пунктах 3, 4 — її асимптотичну нормальність. У пункті 5 наведено два приклади спектральних щільностей, для яких виконуються твердження роботи.

1. Модель та умови консистентності оцінки мінімального контрасту. Розглянемо модель спостережень

$$X(t) = g(t, \alpha_0) + \varepsilon(t), \quad t \in [0, T],$$

де $g\colon (-\Delta, \infty) \times A_\gamma \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, що залежить від невідомого параметра $\alpha_0 \in A$, $A \subset \mathbb{R}^q$ — обмежена відкрита опукла множина, $A_\gamma = \bigcup\limits_{\|e\| \le 1} (A + \gamma e)$, γ та Δ — деякі додатні числа. Припустимо також, що виконується така умова:

$\mathbf{A_1}$. $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — вимірний стаціонарний гауссівський процес із нульовим середнім і спектральною щільністю $f(\lambda, \theta_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\theta_0 \in \Theta$, де $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ — обмежена відкрита опукла множина, а функція $f(\lambda,\theta) > 0$ означена на множині $\mathbb{R}\times\Theta_\tau$, $\Theta_\tau = \bigcup\limits_{\|e\|\le 1}(\Theta + \tau e)$, $\tau > 0$, — деяке число.

Означення 1. *Оцінкою найменших квадратів (о. н. к.) параметра* $\alpha_0 \in A$, *отриманою за спостереженнями процесу* $\big\{X(t), t \in [0,T]\big\}$, *називається будь-який випадковий вектор* $\hat\alpha_T = (\hat\alpha_{1T},\ldots,\hat\alpha_{qT}) \in A^c$, A^c — *замикання* A, *для якого*

$$L_T(\hat\alpha_T) = \min_{\alpha\in A^c} L_T(\alpha), \qquad \text{де} \quad L_T(\alpha) = \int\limits_0^T (X(t) - g(t,\alpha))^2\,dt.$$

Введемо періодограму залишків

$$I_T(\lambda,\hat\alpha_T) = \frac{1}{2\pi T}\left|\int\limits_0^T (X(t) - g(t,\hat\alpha_T))e^{-i\lambda t}\,dt\right|^2, \quad \lambda\in\mathbb{R},$$

і розглянемо поле контрасту Уїтла [20]

$$U_T(\theta,\hat\alpha_T) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\ln f(\lambda,\theta) + \frac{I_T(\lambda,\hat\alpha_T)}{f(\lambda,\theta)}\right)w(\lambda)\,d\lambda, \quad \theta\in\Theta^c, \tag{1}$$

де $w(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, — деяка парна додатна обмежена вимірна за Лебегом вагова функція. Існування інтеграла (1) випливає з умови $\mathbf{C_4}$, яку введено нижче.

Означення 2. *Оцінкою мінімального контрасту (о. м. к.) невідомого параметра* $\theta_0 \in \Theta$ *називається будь-який випадковий вектор* $\hat\theta_T = (\hat\theta_{1T},\ldots,\hat\theta_{mT})$, *для якого*

$$U_T(\hat\theta_T,\hat\alpha_T) = \min_{\theta\in\Theta^c} U_T(\theta,\hat\alpha_T).$$

Мінімум в означенні 2 досягається завдяки неперервності інтеграла (1) по $\theta\in\Theta^c$, яка є наслідком умови $\mathbf{C_4}$.

Припустимо, що виконуються такі умови:

$\mathbf{C_1}$. О. н. к. $\hat\alpha_T$ є слабко консистентною оцінкою α_0, тобто

$$\hat\alpha_T \xrightarrow{P} \alpha_0 \qquad \text{при} \quad T\to\infty.$$

Позначимо $\Phi_T(\alpha_1,\alpha_2) = \int_0^T (g(t,\alpha_1) - g(t,\alpha_2))^2\,dt$, $\alpha_1,\alpha_2\in A^c$.

$\mathbf{C_2}$. Для деякої константи $c_0 < \infty$

$$T^{-1}\Phi_T(\alpha_1,\alpha_2) \le c_0^2\|\alpha_1-\alpha_2\|^2, \quad \alpha_1,\alpha_2\in A^c.$$

$\mathbf{C_3}$. $f(\cdot,\theta)\in L_2(\mathbb{R})$, $\theta\in\Theta^c$, причому $f(\lambda,\theta_1)\ne f(\lambda,\theta_2)$ на множині додатної міри Лебега при $\theta_1\ne\theta_2$.

$\mathbf{C_4}$. Функції $w(\lambda)\ln f(\lambda,\theta)$, $\dfrac{w(\lambda)}{f(\lambda,\theta)}$ неперервні по $\theta\in\Theta^c$ для майже всіх $\lambda\in\mathbb{R}$, причому

(i) $w(\lambda)|\ln f(\lambda,\theta)| \le Z_1(\lambda)$, $\theta\in\Theta^c$, для майже всіх $\lambda\in\mathbb{R}$ і $Z_1(\cdot)\in L_1(\mathbb{R})$;

(ii) $\sup_{\lambda\in\mathbb{R},\theta\in\Theta^c} \dfrac{w(\lambda)}{f(\lambda,\theta)} = c_1 < \infty.$

Зауважимо, що з умов $\mathbf{C_3}$ і $\mathbf{C_4}$ випливає, що

$$\frac{f(\cdot,\theta_1)}{f(\cdot,\theta_2)} w(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}), \quad \theta_1,\theta_2 \in \Theta^c. \tag{2}$$

$\mathbf{C_5}$. Існує парна додатна вимірна за Лебегом функція $v(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, така, що

(i) $\dfrac{v(\lambda)}{f(\lambda,\theta)}$ рівномірно неперервна в $\mathbb{R}\times\Theta^c$;

(ii) $f(\cdot,\theta)\dfrac{w(\cdot)}{v(\cdot)} \in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$, $\theta\in\Theta$.

2. Консистентність оцінки мінімального контрасту. Позначимо

$$g_T(\lambda,\alpha) = \int_0^T e^{-i\lambda t} g(t,\alpha)\,dt, \qquad s_T(\lambda,\alpha) = g_T(\lambda,\alpha_0) - g_T(\lambda,\alpha),$$

$$\varepsilon_T(\lambda) = \int_0^T e^{-i\lambda t}\varepsilon(t)\,dt, \qquad I_T^{\varepsilon}(\lambda) = \frac{1}{2\pi T}|\varepsilon_T(\lambda)|^2,$$

і запишемо періодограму залишків у вигляді

$$I_T(\lambda,\hat\alpha_T) = I_T^{\varepsilon}(\lambda) + \frac{1}{\pi T}\mathrm{Re}\{\varepsilon_T(\lambda)\overline{s_T(\lambda,\hat\alpha_T)}\} + \frac{1}{2\pi T}|s_T(\lambda,\hat\alpha_T)|^2.$$

Нехай $\varphi = \varphi(\lambda,\theta)$, $(\lambda,\theta)\in\mathbb{R}\times\Theta^c$, — деяка вимірна за Лебегом за змінною λ при кожному фіксованому θ вагова функція. Маємо

$$J_T(\varphi,\hat\alpha_T) = \int_{-\infty}^{\infty} I_T(\lambda,\hat\alpha_T)\varphi(\lambda,\theta)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} I_T^{\varepsilon}(\lambda)\varphi(\lambda,\theta)\,d\lambda +$$

$$+\frac{1}{\pi T}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\{\varepsilon_T(\lambda)\overline{s_T(\lambda,\hat\alpha_T)}\}\varphi(\lambda,\theta)\,d\lambda + \frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{\infty}|s_T(\lambda,\hat\alpha_T)|^2\varphi(\lambda,\theta)\,d\lambda =$$

$$= J_T^{\varepsilon}(\varphi) + J_T^{(1)}(\varphi) + J_T^{(2)}(\varphi).$$

Припустимо, що

$$\varphi(\lambda,\theta)\ge 0, \qquad \sup_{\lambda\in\mathbb{R},\theta\in\Theta^c}\varphi(\lambda,\theta) = c(\varphi) < \infty.$$

Тоді за тотожністю Планшереля та умовою $\mathbf{C_2}$

$$|J_T^{(1)}(\varphi)| \le 2c(\varphi)\left(\frac{1}{2\pi T}\int_0^T|\varepsilon_T(\lambda)|^2\,d\lambda\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{\infty}|s_T(\lambda,\hat\alpha_T)|^2\,d\lambda\right)^{1/2} =$$

$$= 2c(\varphi)\left(T^{-1}\int_0^T \varepsilon^2(t)\,dt\right)^{1/2}\left(T^{-1}\Phi_T(\alpha_0,\hat{\alpha}_T)\right)^{1/2} \le 2c_0 c(\varphi)\left(T^{-1}\int_0^T \varepsilon^2(t)\,dt\right)^{1/2}\|\hat{\alpha}_T-\alpha_0\|.$$

Враховуючи умови $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_3}$, бачимо, що

$$\sup_{\theta\in\Theta^c}\left|J_T^{(1)}(\varphi)\right| \xrightarrow{P} 0, \quad T\to\infty. \tag{3}$$

З іншого боку,

$$J_T^{(2)}(\varphi) \le c(\varphi)T^{-1}\Phi_T(\alpha_0,\hat{\alpha}_T) \le c_0^2 c(\varphi)\|\hat{\alpha}_T-\alpha_0\|^2,$$

і знову завдяки умовам $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$

$$\sup_{\theta\in\Theta^c} J_T^{(2)}(\varphi) \xrightarrow{P} 0, \quad T\to\infty. \tag{4}$$

Лема 1. *Якщо виконано умову* $\mathbf{A_1}$, *а парна вагова функція* $\varphi(\lambda,\theta)$ *така, що* $f(\cdot,\theta_0)\varphi(\cdot,\theta)\in$ $\in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$, $\theta\in\Theta^c$, *то при* $T\to\infty$

$$J_T^{\varepsilon}(\varphi) \xrightarrow{P} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda,\theta_0)\varphi(\lambda,\theta)\,d\lambda, \quad \theta\in\Theta^c.$$

Доведення цього твердження міститься у [22].

***Наслідок* 1.** *Якщо* $\varphi(\lambda,\theta)=\dfrac{w(\lambda)}{f(\lambda,\theta)}$, *то за умов* $\mathbf{C_1}-\mathbf{C_4}$

$$U_T(\theta,\hat{\alpha}_T) \xrightarrow{P} U(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\ln f(\lambda,\theta)+\frac{f(\lambda,\theta_0)}{f(\lambda,\theta)}\right)w(\lambda)\,d\lambda, \quad \theta\in\Theta^c.$$

Розглянемо функцію контрасту Уітла

$$K(\theta_0,\theta)=U(\theta)-U(\theta_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{f(\lambda,\theta_0)}{f(\lambda,\theta)}-1-\ln\frac{f(\lambda,\theta_0)}{f(\lambda,\theta)}\right)w(\lambda)\,d\lambda \ge 0,$$

причому $K(\theta_0,\theta)=0$ тоді і тільки тоді, коли $\theta_0=\theta$.

Лема 2. *Якщо виконано умови* $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{C_1}-\mathbf{C_5}$, *то*

$$\sup_{\theta\in\Theta^c}\left|U_T(\theta,\hat{\alpha}_T)-U(\theta)\right| \xrightarrow{P} 0, \quad T\to\infty.$$

Доведення. Нехай $\left\{\theta_j, j=\overline{1,N_\delta}\right\}$ — δ-сітка множини Θ^c. Тоді

$$\sup_{\theta\in\Theta^c}\left|U_T(\theta,\hat{\alpha}_T)-U(\theta)\right| \le$$

$$\le \sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\le\delta}\left|U_T(\theta_1,\hat{\alpha}_T)-U(\theta_1)-(U_T(\theta_2,\hat{\alpha}_T)-U(\theta_2))\right| + \max_{1\le j\le N_\delta}\left|U_T(\theta_j,\hat{\alpha}_T)-U(\theta_j)\right|$$

і для будь-якого $\rho \geq 0$

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{\theta\in\Theta^c}|U_T(\theta,\hat{\alpha}_T)-U(\theta)|\geq\rho\right\}\leq P_1+P_2,$$

причому при $T\to\infty$

$$P_2=\mathbb{P}\left\{\max_{1\leq j\leq N_\delta}|U_T(\theta_j,\hat{\alpha}_T)-U(\theta_j)|\geq\frac{\rho}{2}\right\}\to 0$$

за наслідком 1. З іншого боку,

$$P_1\leq\mathbb{P}\left\{\sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\leq\delta}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_T^{\varepsilon}(\lambda)\left(\frac{w(\lambda)}{f(\lambda,\theta_1)}-\frac{w(\lambda)}{f(\lambda,\theta_2)}\right)d\lambda\right|+\right.$$

$$+\sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\leq\delta}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\lambda,\theta_0)\left(\frac{w(\lambda)}{f(\lambda,\theta_1)}-\frac{w(\lambda)}{f(\lambda,\theta_2)}\right)d\lambda\right|+$$

$$\left.+2\sup_{\theta\in\Theta^c}\left|J^{(1)}\left(\frac{w}{f}\right)\right|+2\sup_{\theta\in\Theta^c}J^{(2)}\left(\frac{w}{f}\right)\geq\frac{\rho}{2}\right\}. \qquad (5)$$

За умови $\mathbf{C_5}$(i)

$$\sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\leq\delta}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_T^{\varepsilon}(\lambda)\left(\frac{w(\lambda)}{f(\lambda,\theta_1)}-\frac{w(\lambda)}{f(\lambda,\theta_2)}\right)d\lambda\right|\leq\eta(\delta)\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_T^{\varepsilon}(\lambda)\frac{w(\lambda)}{v(\lambda)}d\lambda,$$

де

$$\eta(\delta)=\sup_{\lambda\in\mathbb{R},\|\theta_1-\theta_2\|\leq\delta}\left|\frac{v(\lambda)}{f(\lambda,\theta_1)}-\frac{v(\lambda)}{f(\lambda,\theta_2)}\right|\to 0,\quad\delta\to 0.$$

Оскільки за лемою 1 і умовою $\mathbf{C_5}$(ii)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_T^{\varepsilon}(\lambda)\frac{w(\lambda)}{v(\lambda)}d\lambda\xrightarrow{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\lambda,\theta_0)\frac{w(\lambda)}{v(\lambda)}d\lambda,\ \ T\to\infty,$$

а другий доданок під знаком імовірності в (5) вибором δ можна зробити як завгодно малим, то $P_1\to 0$, $T\to\infty$ з урахуванням того, що третій і четвертий доданки збігаються до нуля за ймовірністю завдяки (3) і (4).

Лему 2 доведено.

Теорема 1. *За умов* $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{C_1}-\mathbf{C_5}$, *о. м. к.* $\hat{\theta}_T$ *є слабко консистентною оцінкою параметра* θ_0.

Доведення. За означенням 2 для будь-якого $\rho>0$

$$\mathbb{P}\left\{\|\hat{\theta}_T-\theta_0\|\geq\rho\right\}=\mathbb{P}\left\{\|\hat{\theta}_T-\theta_0\|\geq\rho;U_T(\hat{\theta}_T,\hat{\alpha}_T)\leq U_T(\theta_0,\hat{\alpha}_T)\right\}\leq$$

$$\leq\mathbb{P}\left\{\inf_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho}\Big(U_T(\theta,\hat{\alpha}_T)-U_T(\theta_0,\hat{\alpha}_T)\Big)\leq 0\right\}=$$

$$= \mathbb{P}\left\{ \inf_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho} \Big(U_T(\theta, \hat{\alpha}_T) - U(\theta) - (U_T(\theta_0, \hat{\alpha}_T) - U(\theta_0)) + K(\theta_0, \theta) \Big) \leq 0 \right\} \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\left\{ \inf_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho} \Big(U_T(\theta, \hat{\alpha}_T) - U(\theta) - \big(U_T(\theta_0, \hat{\alpha}_T) - U(\theta_0) \big) \Big) + \inf_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho} K(\theta_0, \theta) \leq 0 \right\} \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\left\{ \sup_{\theta\in\Theta^c} \big| U_T(\theta, \hat{\alpha}_T) - U(\theta) \big| + \big| U_T(\theta_0, \hat{\alpha}_T) - U(\theta_0) \big| \geq \inf_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho} K(\theta_0, \theta) \right\} \to 0$$

завдяки наслідку 1, лемі 2 та властивості функції контрасту K.

3. Умови асимптотичної нормальності оцінки мінімального контрасту. Перша сукупність умов стосується властивостей о. н. к. $\hat{\alpha}_T$ і функції регресії $g(t, \alpha)$.

$\mathbf{N_1}$. Нормована о. н. к. $T^{1/2}(\hat{\alpha}_T - \alpha_0)$ асимптотично при $T \to \infty$ нормальна $N(0, S)$.

Позначимо $g'(t, \alpha) = \dfrac{\partial}{\partial t} g(t, \alpha)$,

$$\Phi'_T(\alpha_1, \alpha_2) = \int\limits_0^T (g'(t, \alpha_1) - g'(t, \alpha_2))^2 \, dt.$$

$\mathbf{N_2}$. Функція $g(t, \alpha)$ неперервно диференційовна по $t \geq 0$ для будь-якого $\alpha \in A^c$ і

$$T^{-1}\Phi'_T(\alpha_1, \alpha_2) \leq (c'_0)^2 \|\alpha_1 - \alpha_2\|^2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in A^c.$$

Нехай $g_i(t, \alpha) = \dfrac{\partial}{\partial \alpha_i} g(t, \alpha)$, $g_{ij}(t, \alpha) = \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} g(t, \alpha)$.

$\mathbf{N_3}$. Функція $g(t, \alpha)$ двічі неперервно диференційовна по $\alpha \in A^c$ для будь-якого $t \geq 0$, причому

(i) $\sup_{t\geq 0, \alpha\in A^c} |g(t, \alpha)| \leq \bar{c} < \infty$;

(ii) $T^{-1} \displaystyle\int_0^T g_i^2(t, \alpha) \, dt \leq \bar{c}_i(\alpha) < \infty$, $i = \overline{1, q}$, $\alpha \in A$;

(iii) $\sup_{\alpha\in A^c} T^{-1} \displaystyle\int_0^T g_{ij}^2(t, \alpha) \, dt \leq \bar{c}_{ij} < \infty$, $i, j = \overline{1, q}$.

Будемо вважати, що функція $f(\lambda, \theta)$ двічі диференційовна по $\theta \in \Theta^c$ при кожному $\lambda \in \mathbb{R}$ за винятком, можливо, скінченного числа точок $\Lambda = \{\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_r\}$.

Позначимо $f_i(\lambda, \theta) = \dfrac{\partial}{\partial \theta_i} f(\lambda, \theta)$, $f_{ij}(\lambda, \theta) = \dfrac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} f(\lambda, \theta)$. Припустимо далі, що в подальших умовах функції $f_i w$, $f_i f_j w$, $f_i f_j v$, $f_{ij} w$, $f_{ij} v$, $i, j = \overline{1, m}$, при кожному фіксованому $\theta \in \Theta^c$ можуть бути продовжені за неперервністю до функцій, означених на $\mathbb{R}$. Для останніх залишимо ті ж самі позначення.

$\mathbf{N_4}$. (i) $\dfrac{f_i(\lambda, \theta)}{f^2(\lambda, \theta)} w(\lambda)$, $i = \overline{1, m}$, — обмежені і рівномірно неперервні по λ при кожному фіксованому $\theta \in \Theta$. Крім цього, $\dfrac{|f_i(\lambda, \theta)|}{f(\lambda, \theta)} w(\lambda) \leq Z_2(\lambda)$, $\theta \in \Theta$, для майже всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ і $Z_2(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$.

(ii) $\dfrac{f_i(\lambda,\theta)f_j(\lambda,\theta)}{f^2(\lambda,\theta)}w(\lambda)$, $\dfrac{f_{ij}(\lambda,\theta)}{f(\lambda,\theta)}w(\lambda)$ неперервні по $\theta\in\Theta^c$ при кожному $\lambda\in\mathbb{R}$, причому $\dfrac{|f_i(\lambda,\theta)f_j(\lambda,\theta)|}{f^2(\lambda,\theta)}+\dfrac{|f_{ij}(\lambda,\theta)|}{f(\lambda,\theta)}\le a_{ij}(\lambda)$, $\theta\in\Theta^c$, $\lambda\in\mathbb{R}$, та $a_{ij}(\cdot)w(\cdot)\in L_1(\mathbb{R})$, $i,j=\overline{1,m}$.

(iii) $\dfrac{f_i(\lambda,\theta)f_j(\lambda,\theta)}{f^3(\lambda,\theta)}w(\lambda)$, $\dfrac{f_{ij}(\lambda,\theta)}{f^2(\lambda,\theta)}w(\lambda)$, $i,j=\overline{1,m}$, — обмежені за сукупністю змінних $(\lambda,\theta)\in\mathbb{R}\times\Theta^c$ функції.

$\mathbf{N_5}$. Існує парна додатна вимірна за Лебегом функція $v(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, така, що

(i) $\dfrac{f_i(\lambda,\theta)f_j(\lambda,\theta)}{f^3(\lambda,\theta)}v(\lambda)$, $\dfrac{f_{ij}(\lambda,\theta)}{f^2(\lambda,\theta)}v(\lambda)$, $i,j=\overline{1,m}$, — рівномірно неперервні в $\mathbb{R}\times\Theta^c$;

(ii) $f(\cdot,\theta)\dfrac{w(\cdot)}{v(\cdot)}\in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$, $\theta\in\Theta$;

(iii) $\dfrac{f_i(\cdot,\theta)f_j(\cdot,\theta)}{f^2(\cdot,\theta)}w(\cdot)$, $\dfrac{f_{ij}(\cdot,\theta)}{f(\cdot,\theta)}w(\cdot)\in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$, $\theta\in\Theta$.

Умова $\mathbf{N_5}$(ii) зовнішньо збігається з $\mathbf{C_5}$(ii), але при цьому функція v повинна задовольняти різні умови $\mathbf{N_5}$(i) і $\mathbf{C_5}$(i), і тому, взагалі кажучи, функції v в цих двох умовах можуть бути різними.

$\mathbf{N_6}$. $\dfrac{f_i(\lambda,\theta)}{f^2(\lambda,\theta)}w(\lambda)$, $i=\overline{1,m}$, — функції обмеженої варіації по $\lambda\in\mathbb{R}$, що належать $L_1(\mathbb{R})$ для кожного $\theta\in\Theta$.

$\mathbf{N_7}$. $\dfrac{f_i(\cdot,\theta)}{f(\cdot,\theta)}w(\cdot)\in L_k(\mathbb{R})$ для всіх натуральних $k\ge 1$, $i=\overline{1,m}$, $\theta\in\Theta$.

Очевидно, достатніми умовами виконання $\mathbf{N_7}$ є обмеженість функцій $\dfrac{f_i(\lambda,\theta)}{f(\lambda,\theta)}w(\lambda)$, $i=\overline{1,m}$, по λ і належність $L_1(\mathbb{R})$ при кожному фіксованому $\theta\in\Theta$.

Введемо дві матриці, що фігурують у формулюванні теореми 2:

$$W_1(\theta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\nabla_\theta\ln f(\lambda,\theta)\nabla'_\theta\ln f(\lambda,\theta)w(\lambda)\,d\lambda,$$

$$W_2(\theta)=4\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\nabla_\theta\ln f(\lambda,\theta)\nabla'_\theta\ln f(\lambda,\theta)w^2(\lambda)\,d\lambda.$$

$\mathbf{N_8}$. Матриці $W_1(\theta),W_2(\theta)$ додатно визначені для $\theta\in\Theta$.

4. Асимптотична нормальність оцінки мінімального контрасту. Основним результатом статті є наступна теорема.

Теорема 2. *За умов* $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{C_1}-\mathbf{C_5}$, *та* $\mathbf{N_1}-\mathbf{N_8}$ *нормована о. м. к.* $T^{1/2}(\hat\theta_T-\theta_0)$ *асимптотично при* $T\to\infty$ *нормальна з нульовим середнім та коваріаційною матрицею* $W(\theta)=W_1^{-1}(\theta_0)W_2(\theta_0)W_1^{-1}(\theta_0)$.

Доведенню цієї теореми передує кілька лем.

Позначимо

$$\Delta_T(\varphi)=T^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_T(\lambda)\overline{s_T(\lambda,\hat\alpha_T)}\varphi(\lambda)\,d\lambda.$$

Лема 3. *Якщо виконано умови* $\mathbf{A_1}, \mathbf{C_1}-\mathbf{C_3}, \mathbf{N_1}-\mathbf{N_3}$, *а* $\varphi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *— рівномірно неперервна обмежена функція, то* $\Delta_T(\varphi) \xrightarrow{P} 0$.

Доведення. Нехай B_σ — сукупність усіх цілих функцій $b(\lambda)$ експоненціального типу $0 \leq \leq \sigma < \infty$, для яких $c(b) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} |b(\lambda)| < \infty$. Нехай $\delta > 0$ — довільне мале число.

Існує функція $\varphi_\sigma \in B_\sigma$, $\sigma = \sigma(\delta)$, така, що [24]

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} |\varphi(\lambda) - \varphi_\sigma(\lambda)| < \delta.$$

Нехай $T_n(\varphi_\sigma; \lambda) = \sum_{j=-n}^{n} c_j^{(n)} e^{ij\frac{\sigma}{n}\lambda}$, $n \geq 1$, — послідовність поліномів Левітана [24], що відповідає φ_σ. Для будь-якого $\Lambda > 0$ існує $n_0 = n_0(\delta, \Lambda)$ таке, що для $n \geq n_0$

$$\sup_{\lambda\in[-\Lambda,\Lambda]} |\varphi_\sigma(\lambda) - T_n(\varphi_\sigma; \lambda)| \leq \delta.$$

Запишемо

$$\Delta_T(\varphi) = \Delta_T(\varphi - \varphi_\sigma) + \Delta_T(\varphi_\sigma - T_n) + \Delta_T(T_n),$$

$$|\Delta_T(\varphi - \varphi_\sigma)| \leq \delta T^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_T(\lambda)\overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)}|\, d\lambda \leq$$

$$\leq \delta T^{-1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_T(\lambda)|^2\, d\lambda \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)|^2\, d\lambda \right)^{1/2} =$$

$$= 2\pi\delta \left(T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t)\, dt \right)^{1/2} \Phi_T^{1/2}(\alpha_0, \alpha_T) \leq 2\pi c_0 \delta \left(T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t)\, dt \right)^{1/2} T^{1/2} \|\hat{\alpha}_T - \alpha_0\|.$$

За умови $\mathbf{C_2}$, таким чином, для будь-якого $\rho > 0$ і $B(0) = E\varepsilon^2(0)$

$$\mathbb{P}\big\{|\Delta_T(\varphi - \varphi_\sigma)| \geq \rho\big\} \leq \mathbb{P}\left\{ T^{1/2}\|\hat{\alpha}_T - \alpha_0\| \geq \frac{\rho}{2\pi c_0 \delta (B(0)+1)^{1/2}} \right\} +$$

$$+\mathbb{P}\left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \big(\varepsilon^2(t) - B(0)\big)\, dt > 1 \right\} = P_3 + P_4.$$

Імовірність $P_4 \to 0$ при $T \to \infty$, а ймовірність $P_3 \to 0$ за умови $\mathbf{N_1}$ при достатньо великих T ($T > T_0$) можна зробити меншою за наперед задане число вибором $\delta > 0$ при фіксованому $\rho > 0$.

Оскільки функція $\varphi_\sigma \in B_\sigma$ і відповідна їй послідовність поліномів Левітана T_n обмежені однією і тією ж самою константою [24], отримуємо

$$|\Delta(\varphi_\sigma - T_n)| \leq \delta T^{-1/2} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} |\varepsilon_T(\lambda)\overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)}|\, d\lambda +$$

$$+2c(\varphi_\sigma)T^{-1/2}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\Lambda,\Lambda]}|\varepsilon_T(\lambda)\overline{s_T(\lambda,\hat{\alpha}_T)}|\,d\lambda = D_1 + D_2.$$

Інтеграл в доданку D_1 мажоруємо інтегралом по осі і оцінюємо цей доданок, як і раніше. Маємо далі

$$\overline{s_T(\lambda,\hat{\alpha}_T)} = \frac{1}{i\lambda}\Big[e^{i\lambda T}(g(T,\alpha_0)-g(T,\hat{\alpha}_T)) - (g(0,\alpha_0)-g(0,\hat{\alpha}_T)) - \overline{s'_T(\lambda,\hat{\alpha}_T)}\Big],$$

де $s'_T(\lambda,\hat{\alpha}_T) = \displaystyle\int_0^T e^{-i\lambda t}\big(g'(t,\alpha_0)-g'(t,\hat{\alpha}_T)\big)\,dt.$

За умов леми

$$T^{-1/2}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\Lambda,\Lambda]}|\varepsilon_T(\lambda)\overline{s_T(\lambda,\hat{\alpha}_T)}|\,d\lambda \le T^{-1/2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\Lambda,\Lambda]}|\varepsilon_T(\lambda)|^2\,d\lambda\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(3\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\Lambda,\Lambda]}\frac{1}{\lambda^2}\big(|g(T,\alpha_0)-g(T,\hat{\alpha}_T)|^2 + |g(0,\alpha_0)-g(0,\hat{\alpha}_T)|^2 + |s'_T(\lambda,\hat{\alpha}_T)|^2\big)\,d\lambda\right)^{1/2} \le$$

$$\le\left(\frac{2\pi}{T}\int\limits_0^T\varepsilon^2(t)\,dt\right)^{1/2} 3^{1/2}\left(8\bar{c}^2\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\Lambda,\Lambda]}\frac{d\lambda}{\lambda^2} + \frac{2\pi}{\Lambda^2}\Phi'_T(\alpha_0,\hat{\alpha}_T)\right)^{1/2} \le$$

$$\le\left(4\sqrt{6\pi}\bar{c}\Lambda^{-1/2} + 2\sqrt{3}\pi c'_0\Lambda^{-1}T^{1/2}\|\hat{\alpha}_T-\alpha_0\|\right)\left(T^{-1}\int\limits_0^T\varepsilon^2(t)\,dt\right)^{1/2}.$$

Таким чином, для будь-якого фіксованого $\rho > 0$, аналогічно ймовірності P_3, ймовірність $P_5 = \mathbb{P}\{D_2 \ge \rho\}$ при $T > T_0$ можна зробити меншою за наперед задане число вибором величини Λ.

Розглянемо

$$\Delta_T(T_n) = T^{-1/2}\sum_{j=-n}^{n} c_j^{(n)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_T(\lambda)\overline{s_T(\lambda,\hat{\alpha}_T)}e^{ij\frac{\sigma}{n}\lambda}\,d\lambda,$$

$$\overline{s_T(\lambda,\hat{\alpha}_T)}e^{ij\frac{\sigma}{n}\lambda} = \int\limits_{j\frac{\sigma}{n}}^{T+j\frac{\sigma}{n}} e^{i\lambda t}\left(g\left(t-j\frac{\sigma}{n},\alpha_0\right) - g\left(t-j\frac{\sigma}{n},\hat{\alpha}_T\right)\right)dt,\quad j=\overline{-n,n}.$$

Це означає, що

$$\Delta_T(T_n) = 2\pi\sum_{j=1}^{n}c_j^{(n)}T^{-1/2}\int\limits_{\frac{j\sigma}{n}}^{T}\varepsilon(t)\left(g\left(t-j\frac{\sigma}{n},\alpha_0\right) - g\left(t-j\frac{\sigma}{n},\hat{\alpha}_T\right)\right)dt+$$

$$+2\pi\sum_{j=-n}^{0}c_j^{(n)}T^{-1/2}\int\limits_0^{T+\frac{j\sigma}{n}}\varepsilon(t)\left(g\left(t-j\frac{\sigma}{n},\alpha_0\right)-g\left(t-j\frac{\sigma}{n},\hat{\alpha}_T\right)\right)dt.$$

Для $j>0$ розглянемо величину

$$T^{-1/2}\int\limits_{\frac{j\sigma}{n}}^{T}\varepsilon(t)\left(g\left(t-j\frac{\sigma}{n},\hat{\alpha}_T\right)-g\left(t-j\frac{\sigma}{n},\alpha_0\right)\right)dt=$$

$$=\sum_{i=1}^{q}T^{-1}\int\limits_{\frac{j\sigma}{n}}^{T}\varepsilon(t)g_i\left(t-j\frac{\sigma}{n},\alpha_0\right)dtT^{\frac{1}{2}}\left(\hat{\alpha}_{iT}-\alpha_{i0}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{q}T^{-1/2}\int\limits_{\frac{j\sigma}{n}}^{T}\varepsilon(t)g_{ik}\left(t-j\frac{\sigma}{n},\alpha_T^*\right)dt(\hat{\alpha}_{iT}-\alpha_{i0})(\hat{\alpha}_{kT}-\alpha_{k0})=I_{1T}+I_{2T}.$$

Зауважимо, що $T^{1/2}(\hat{\alpha}_{iT}-\alpha_{i0})$ слабко збігається до гауссівської випадкової величини $N(0,S_{ii})$ за умови $\mathbf{N_1}$. Крім цього,

$$E\left(T^{-1}\int\limits_{j\sigma/n}^{T}\varepsilon(t)g_i\left(t-j\frac{\sigma}{n},\alpha_0\right)dt\right)^2=$$

$$=T^{-2}\int\limits_{\frac{j\sigma}{n}}^{T}\int\limits_{\frac{j\sigma}{n}}^{T}B(t-s)g_i\left(t-j\frac{\sigma}{n},\alpha_0\right)g_i\left(t-j\frac{\sigma}{n},\alpha_0\right)dt\,ds\le$$

$$\le\left(T^{-2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T B^2(t-s)\;dtds\right)^{1/2}T^{-1}\int\limits_0^T g_i^2(t,\alpha_0)\,dt,$$

де $B(t)$, $t\in\mathbb{R}$, — коваріаційна функція процесу $\varepsilon(t)$. Оскільки завдяки умові $\mathbf{C_3}$

$$T^{-1}\int\limits_0^T\int\limits_0^T B^2(t-s)\;dtds\to\int\limits_{-\infty}^{\infty}B^2(t)\,dt=2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^2(\lambda;\theta_0)\,d\lambda<\infty,$$

то разом з умовою $\mathbf{N_3}$(ii) це означає, що сума $I_{1T}\xrightarrow{P}0$, $T\to\infty$.

Для загального члена суми I_{2T} маємо

$$T^{-1/2}\left|\int\limits_{\frac{j\sigma}{n}}^{T}\varepsilon(t)g_{ik}\left(t-j\frac{\sigma}{n},\alpha_T^*\right)dt\right||\hat{\alpha}_{iT}-\alpha_{i0}||\hat{\alpha}_{kT}-\alpha_{k0}|\le$$

$$\leq \bar{c}_{ik}^{1/2}\left(T^{-1}\int\limits_0^T \varepsilon^2(t)\,dt\right)^{1/2}\left|T^{1/2}(\hat{\alpha}_{iT}-\alpha_{i0})\right||\hat{\alpha}_{kT}-\alpha_{k0}| \xrightarrow{P} 0$$

за умов теореми, тобто $I_{2T} \xrightarrow{P} 0$, $T \to \infty$. Для $j \leq 0$ міркування аналогічні, і

$$\Delta_T(T_n) \xrightarrow{P} 0, \quad T \to \infty.$$

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Нехай функція $\varphi(\lambda,\theta)w(\lambda)$ неперервна по $\theta \in \Theta^c$ при кожному фіксованому $\lambda \in \mathbb{R}$, причому*

$$|\varphi(\lambda,\theta)| \leq \varphi(\lambda), \quad \theta \in \Theta^c, \qquad i \qquad \varphi(\cdot)w(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}).$$

Тоді якщо $\theta_T^* \xrightarrow{P} \theta_0$, то

$$I(\theta_T^*) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda,\theta_T^*)w(\lambda)\,d\lambda \xrightarrow{P} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda,\theta_0)w(\lambda)\,d\lambda = I(\theta_0).$$

Доведення. За теоремою Лебега про мажоровану збіжність інтеграл $I(\theta)$, $\theta \in \Theta^c$, є неперервною функцією. Подальші міркування стандартні. Для довільного $\rho > 0$ і $\varepsilon = \dfrac{\rho}{2}$ знайдемо таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що $|I(\theta) - I(\theta_0)| < \varepsilon$ при $\|\theta - \theta_0\| < \delta$. Тоді $\mathbb{P}\big\{|I(\theta_T^*) - I(\theta_0)| \geq \rho\big\} = P_1 + P_2$, де $P_1 = \mathbb{P}\big\{|I(\theta_T^*) - I(\theta_0)| \geq \rho, \|\theta_T^* - \theta\| < \delta\big\} = 0$, завдяки вибору ε; $P_2 = \mathbb{P}\big\{|I(\theta_T^*) - I(\theta_0)| \geq \rho, \|\theta_T^* - \theta\| \geq \delta\big\} \to 0$, $T \to \infty$.

Лему 4 доведено.

Лема 5. *Якщо виконано умови $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$ і $\sup_{\lambda\in\mathbb{R},\theta\in\Theta^c}|\varphi(\lambda,\theta)| = c(\varphi) < \infty$, то*

$$T^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda,\theta_T^*)\varepsilon_T(\lambda)\overline{s_T(\lambda,\hat{\alpha}_T)}\,d\lambda \xrightarrow{P} 0, \quad T \to \infty,$$

$$T^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda,\theta_T^*)|s_T(\lambda,\hat{\alpha}_T)|^2\,d\lambda \xrightarrow{P} 0, \quad T \to \infty.$$

Доведення. Ці співвідношення аналогічні співвідношенням (3) і (4) і доводяться так само.

Лема 6. *Нехай існує парна додатна функція $v(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, така, що*

(i) $\varphi(\lambda,\theta)v(\lambda)$ *рівномірно неперервна в* $\mathbb{R} \times \Theta^c$;

(ii) $f(\cdot,\theta)\dfrac{w(\cdot)}{v(\cdot)} \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, $\theta \in \Theta$;

і, крім цього,

(iii) $\varphi(\cdot,\theta)f(\cdot,\theta)w(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, $\theta \in \Theta$.

Тоді якщо $\theta_T^* \xrightarrow{P} \theta_0$ і виконано умову $\mathbf{A_1}$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda,\theta_T^*)I_T^{\varepsilon}(\lambda)w(\lambda)\,d\lambda \xrightarrow{P} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda,\theta_0)f(\lambda,\theta_0)w(\lambda)\,d\lambda, \quad T \to \infty.$$

Доведення. Запишемо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \theta_T^*) I_T^{\varepsilon}(\lambda) w(\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(\lambda, \theta_T^*) - \varphi(\lambda, \theta_0)) v(\lambda) I_T^{\varepsilon}(\lambda) \frac{w(\lambda)}{v(\lambda)}\, d\lambda +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \theta_0) I_T^{\varepsilon}(\lambda) w(\lambda)\, d\lambda = I_1 + I_2.$$

За лемою 1 і умовою (iii)

$$I_2 \xrightarrow{P} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \theta_0) f(\lambda, \theta_0) w(\lambda)\, d\lambda, \quad T \to \infty. \tag{6}$$

З іншого боку, для будь-якого $r > 0$ за умови (i) існує таке $\delta = \delta(r)$, що для $\|\theta_T^* - \theta_0\| < \delta$

$$|I_1| \le r \int_{-\infty}^{\infty} I_T^{\varepsilon} \frac{w(\lambda)}{v(\lambda)}\, d\lambda, \tag{7}$$

а за умови (ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_T^{\varepsilon} \frac{w(\lambda)}{v(\lambda)}\, d\lambda \xrightarrow{P} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \theta_0) \frac{w(\lambda)}{v(\lambda)}\, d\lambda. \tag{8}$$

Співвідношення (6) – (8) доводять лему.

Тепер ми можемо довести теорему 2.

Доведення. За означенням о. м. к. $\hat{\theta}_T$, формально використовуючи формулу Тейлора, отримуємо

$$0 = \nabla_\theta U_T(\hat{\theta}_T, \hat{\alpha}_T) = \nabla_\theta U_T(\theta_0, \hat{\alpha}_T) + \nabla_\theta \nabla'_\theta U_T(\theta_T^*, \hat{\alpha}_T)(\hat{\theta}_T - \theta_0), \tag{9}$$

де ∇_θ — стовпчик вектор-градієнт, ∇'_θ — рядок вектор-градієнт. Оскільки векторної формули Тейлора не існує, рівність (9) слід розуміти покоординатно, тобто кожний рядок векторної рівності (9) залежить від свого випадкового вектора θ_T^* такого, що $\|\theta_T^* - \theta_0\| \le \|\hat{\theta}_T - \theta_0\|$.

З (9), у свою чергу, формально маємо

$$T^{1/2}(\hat{\theta}_T - \theta_0) = (\nabla_\theta \nabla'_\theta U_T(\theta_T^*, \hat{\alpha}_T))^{-1} \big(- T^{1/2} \nabla_\theta U_T(\theta_0, \hat{\alpha}_T) \big).$$

Оскільки з умови $\mathbf{A_4}$ випливає можливість диференціювання під знаками інтегралів у формулі (6), то

$$-T^{1/2} \nabla_\theta U_T(\theta_0, \hat{\alpha}_T) =$$

$$= -T^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\nabla_\theta \ln f(\lambda, \theta_0) + \nabla_\theta \left(\frac{1}{f(\lambda, \theta_0)} \right) I_T(\lambda, \hat{\alpha}_T) \right) w(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= T^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\nabla_\theta f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} I_T(\lambda, \hat{\alpha}_T) - \frac{\nabla_\theta f(\lambda, \theta_0)}{f(\lambda, \theta_0)} \right) w(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= T^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\nabla_\theta f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} I_T^{\varepsilon}(\lambda) - \frac{\nabla_\theta f(\lambda, \theta_0)}{f(\lambda, \theta_0)} \right) w(\lambda)\, d\lambda +$$

$$+(2\pi)^{-1} T^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(2\mathrm{Re}\big\{\varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)}\big\} + |s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T|^2 \right) \frac{\nabla_\theta f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} w(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= A_T^{(1)} + A_T^{(2)} + A_T^{(3)}. \tag{10}$$

Аналогічно

$$\nabla_\theta \nabla'_\theta U_T(\theta_T^*, \hat{\alpha}_T) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\nabla_\theta \nabla'_\theta \ln f(\lambda, \theta_T^*) + \nabla_\theta \nabla'_\theta \left(\frac{1}{f(\lambda, \theta_T^*)} \right) I_T(\lambda, \hat{\alpha}_T) \right) w(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Bigg\{ \left(\frac{\nabla_\theta \nabla'_\theta f(\lambda, \theta_T^*)}{f(\lambda, \theta_T^*)} - \frac{\nabla_\theta f(\lambda, \theta_T^*) \nabla'_\theta f(\lambda, \theta_T^*)}{f^2(\lambda, \theta_T^*)} \right) +$$

$$+ \left(2 \frac{\nabla_\theta f(\lambda, \theta_T^*) \nabla'_\theta f(\lambda, \theta_T^*)}{f^3(\lambda, \theta_T^*)} - \frac{\nabla_\theta \nabla'_\theta f(\lambda, \theta_T^*)}{f^2(\lambda, \theta_T^*)} \right) \big(I_T^{\varepsilon}(\lambda) +$$

$$+ (\pi T)^{-1} \mathrm{Re}\big\{\varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)}\big\} + (2\pi T)^{-1} |s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T|^2 \big) \Bigg\} w(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= B_T^{(1)} + B_T^{(2)} + B_T^{(3)} + B_T^{(4)}, \tag{11}$$

де доданки $B_T^{(3)}$ і $B_T^{(4)}$ містять у собі величини $\mathrm{Re}\big\{\varepsilon_T(\lambda)\overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)}\big\}$ і $|s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T|^2$ відповідно.

З огляду на першу частину умови $\mathbf{N_4}$(i) візьмемо в лемі 3 функції $\varphi(\lambda) = \varphi_i(\lambda) = \dfrac{f_i(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} w(\lambda)$, $i = \overline{1, m}$. Тоді в формулі (10) $A_T^{(2)} \xrightarrow{P} 0$, $T \to \infty$.

Розглянемо в сумі (10) доданок $A_T^{(3)} = (a_{iT}^{(3)})_{i=1}^m$,

$$a_{iT}^{(3)} = (2\pi)^{-1} T^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)|^2 \varphi_i(\lambda)\, d\lambda,$$

де $\varphi_i(\lambda)$ такі, як раніше.

За умов $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{N_1}$, $\mathbf{N_4}$(i) $A_T^{(3)} \xrightarrow{P} 0$, $T \to \infty$, тому що

$$|a_{iT}^{(3)}| \leq c(\varphi_i) T^{-1/2} \Phi_T(\alpha_0, \hat{\alpha}_T) \leq$$

$$\leq c(\varphi_i) c_0^2 \| T^{1/2}(\hat{\alpha}_T - \alpha_0) \| \| \hat{\alpha}_T - \alpha_0 \| \xrightarrow{P} 0, \quad T \to \infty.$$

Розглянемо поведінку доданків $B_T^{(1)} - B_T^{(4)}$ у формулі (11).

Якщо виконано умови $\mathbf{C_1}$ і $\mathbf{N_4}$(ii), то при $T \to \infty$

$$B_T^{(1)} \xrightarrow{P} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\nabla_\theta \nabla'_\theta f(\lambda, \theta_0)}{f(\lambda, \theta_0)} - \frac{\nabla_\theta f(\lambda, \theta_0) \nabla'_\theta f(\lambda, \theta_0)}{f(\lambda, \theta_0)} \right) w(\lambda)\, d\lambda. \tag{12}$$

Для отримання цього факту візьмемо в лемі 4

$$\varphi(\lambda, \theta) = \frac{f_{ij}(\lambda, \theta)}{f(\lambda, \theta)}, \frac{f_i(\lambda, \theta) f_j(\lambda, \theta)}{f^2(\lambda, \theta)}, \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Якщо виконано умови леми 5 і $\mathbf{N_4}$(iii), то $B_T^{(3)} \xrightarrow{P} 0$, $B_T^{(4)} \xrightarrow{P} 0$, $T \to \infty$.

Для того щоб у цьому переконатись, візьмемо у лемі 5

$$\varphi(\lambda, \theta) = \varphi_{ij}(\lambda, \theta) = \frac{f_{ij}(\lambda, \theta)}{f^2(\lambda, \theta)} w(\lambda), \qquad \frac{f_i(\lambda, \theta) f_j(\lambda, \theta)}{f^3(\lambda, \theta)}, \quad i, j = \overline{1, m}.$$

За умов $\mathbf{C_1}$ і $\mathbf{N_5}$

$$B_T^{(2)} \xrightarrow{P} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(2 \frac{\nabla_\theta f(\lambda, \theta_0) \nabla'_\theta f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} - \frac{\nabla_\theta \nabla'_\theta f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} \right) w(\lambda)\, d\lambda, \tag{13}$$

якщо взяти в лемі 6 в умовах (i) і (iii)

$$\varphi(\lambda, \theta) = \varphi_{ij}(\lambda, \theta) = \frac{f_i(\lambda, \theta) f_j(\lambda, \theta)}{f^3(\lambda, \theta)}, \qquad \frac{f_{ij}(\lambda, \theta)}{f^2(\lambda, \theta)}, \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Таким чином, якщо виконано умови $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{N_4}$(ii), $\mathbf{N_4}$(iii), $\mathbf{N_5}$, то

$$\nabla_\theta \nabla'_\theta U_T(\theta_T^*, \hat{\alpha}_T) \xrightarrow{P} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\nabla_\theta f(\lambda, \theta_0) \nabla'_\theta f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} w(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \nabla_\theta \ln f(\lambda, \theta_0) \nabla'_\theta \ln f(\lambda, \theta_0) w(\lambda)\, d\lambda = W_1(\theta_0), \tag{14}$$

тому що $W_1(\theta_0)$ є сумою правих частин (12) та (13).

Із отриманих фактів випливає, що для доведення теореми 2 потрібно вивчити асимптотичну поведінку вектора $A_T^{(1)}$ з (10):

$$A_T^{(1)} = T^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\nabla_\theta f(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} I_T^\varepsilon(\lambda) - \frac{\nabla_\theta f(\lambda, \theta_0)}{f(\lambda, \theta_0)} \right) w(\lambda)\, d\lambda.$$

Покладемо

$$\varphi_i(\lambda) = \frac{f_i(\lambda, \theta_0)}{f^2(\lambda, \theta_0)} w(\lambda), \quad i = \overline{1, m},$$

$$\Psi(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} u_i \varphi_i(\lambda), \quad u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m,$$

$$Y_T = \int_{-\infty}^{\infty} I_T^\varepsilon(\lambda) \Psi(\lambda)\, d\lambda, \qquad Y = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \theta_0) \Psi(\lambda)\, d\lambda.$$

Запишемо

$$\left\langle A_T^{(1)}, u \right\rangle = T^{1/2} \big(Y_T - EY_T \big) + T^{1/2} \big(EY_T - Y \big).$$

Якщо виконано умову $\mathbf{N_6}$, то [25, 26]

$$T^{1/2} \big(EY_T - Y \big) \to 0, \quad T \to \infty. \tag{15}$$

З іншого боку, за умови $\mathbf{N_7}$ $\dfrac{f_i(\cdot, \theta)}{f(\cdot, \theta)} w(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, $\theta \in \Theta$, і [22]

$$DT^{\frac{1}{2}} Y_T \xrightarrow[T \to \infty]{} 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda, \theta_0) \Psi^2(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= 4\pi \sum_{i,j=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(\lambda) \varphi_j(\lambda) f^2(\lambda, \theta_0)\, d\lambda u_i u_j =$$

$$= 4\pi \sum_{i,j=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_\theta \ln f(\lambda, \theta_0) \nabla_\theta' \ln f(\lambda, \theta_0) w^2(\lambda)\, d\lambda u_i u_j = \langle W_2(\theta_0) u, u \rangle. \tag{16}$$

Крім цього, за умови $\mathbf{N_7}$, як показано, наприклад, у [22], всі кумулянти порядку $k \geq 3$ випадкового вектора $T^{1/2} Y_T$ збігаються до 0. Останній факт разом із співвідношеннями (14) – (16) доводять теорему.

Розглянемо коротко важливе питання про оцінювання асимптотичної коваріаційної матриці $W(\theta_0)$ у формулюванні теореми 2. Зауважимо, що умова $\mathbf{N_4}$(ii) забезпечує неперервність елементів матриці $W_1(\theta)$, $\theta \in \Theta^c$. У свою чергу, умова $\mathbf{N_4}$(ii) та обмеженість вагової функції $w(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, дозволяють зробити такий же висновок відносно елементів матриці $W_2(\theta)$, $\theta \in \Theta^c$.

Теорема 3. *За умов* $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{C_1}-\mathbf{C_5}$, $\mathbf{N_4}$(ii)

$$W(\hat{\theta}_T) \xrightarrow{P} W(\theta_0), \quad T \to \infty,$$

поелементно, тобто $W(\hat{\theta}_T)$ *є слабко консистентною оцінкою матриці* $W(\theta_0)$.

Доведення аналогічно доведенню леми 4.

5. Приклади. **1.** Розглянемо класичний приклад дробово-раціональної спектральної щільності (див., наприклад, [27])

$$f(\lambda, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{|P(i\lambda)|^2}{|Q(i\lambda)|^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\theta_1 \lambda^{2p} + \theta_2 \lambda^{2p-2} + \ldots + \theta_p \lambda^2 + \theta_{p+1}}{\theta_{p+2}\lambda^{2q} + \theta_{p+3}\lambda^{2q-2} + \ldots + \theta_{p+q+1}\lambda^2 + \theta_{p+q+2}}, \quad q > p,$$

що залежить від невідомого параметра $\theta_0 = (\theta_1, \ldots, \theta_{p+q+2}) \in \Theta$, причому в Θ^c поліноми P і Q не мають дійсних коренів.

Якщо ми виберемо вагові функції вигляду $w(\lambda) = (1 + \lambda^2)^{-W}$, $v(\lambda) = (1 + \lambda^2)^{-V}$, то неважко переконатися, що вибором величин $W > V$ можна забезпечити виконання умов $\mathbf{C_3}-\mathbf{C_5}$, а також $\mathbf{N_4}-\mathbf{N_7}$. Перевірка цього факту є рутинною, і ми її не наводимо.

2. Нехай $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – дробовий рух Рісса – Бесселя [22], тобто гауссівський стаціонарний процес зі спектральною щільністю

$$f(\lambda, \theta_0) = \frac{1}{\lambda^{2\beta_0}(1 + \lambda^2)^{\alpha_0}}, \quad \theta_0 = (\alpha_0, \beta_0) \in \Theta,$$

Θ — обмежена відкрита множина, Θ^c — компактна підмножина множини $\left(\frac{1}{2}, \infty\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Розглянемо вагову функцію [22] $w(\lambda) = \dfrac{\lambda^{2b}}{(1 + \lambda^2)^a}$, $a > b > 0$, і перевіримо виконання умов роботи.

Для виконання умови $\mathbf{C_3}$ потрібно, щоб параметр β належав деякому замкненому інтервалу із інтервалу $\left(0, \frac{1}{4}\right)$. В свою чергу, $\mathbf{C_4}$(i) виконується, якщо $a - b > \frac{1}{2}$, а $\mathbf{C_4}$(ii) — якщо $a - b \geq \alpha + \beta$, $(\alpha, \beta) \in \Theta^c$. Остання нерівність має місце, якщо

$$a - b \geq \frac{1}{4} + \bar{\alpha}, \tag{17}$$

де $\bar{\alpha} > \frac{1}{2}$ — максимальне можливе значення α.

З умов $\mathbf{C_3}$ і $\mathbf{C_4}$ випливає (2), але можна забезпечити виконання (2) для β із замкненого інтервалу, який міститься у $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, за рахунок додаткових обмежень на параметри a і b.

Виберемо в умові $\mathbf{C_5}$ $v(\lambda) = \dfrac{\lambda^{2b'}}{(1 + \lambda^2)^{a'}}$, $a' > b'$. Тоді умова $\mathbf{C_5}$(i) виконується, якщо $a' - b' \geq \frac{1}{4} + \bar{\alpha}$. Для виконання умови $\mathbf{C_5}$(ii) достатньо, щоб виконувалось співвідношення

$$\beta + \alpha + a + b' - b - a' > \frac{1}{2}. \tag{18}$$

Візьмемо $a > a'$. Оскільки $\alpha > \dfrac{1}{2}$, то (18) буде виконуватись, якщо $b - b' < \underline{\beta}$, де $\underline{\beta} > 0$ — мінімальне можливе значення β. Зокрема, можна взяти $b = b'$.

Очевидно, $f(\lambda,\theta)$ двічі диференційовна по $\theta = (\alpha,\beta) \in \Theta^c$ при кожному $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Для $\lambda \neq 0$ $f_\alpha(\lambda,\theta) = -\ln(1+\lambda^2)f(\lambda,\theta)$, $f_\beta(\lambda,\theta) = -\ln\lambda^2 f(\lambda,\theta)$, $f_{\alpha\alpha}(\lambda,\theta) = \ln^2(1+\lambda^2)f(\lambda,\theta)$, $f_{\beta\beta}(\lambda,\theta) = \ln^2\lambda^2 f(\lambda,\theta)$, $f_{\alpha\beta}(\lambda,\theta) = \ln(1+\lambda^2)\ln\lambda^2 f(\lambda,\theta)$.

Якщо ми позначимо через $Df(\lambda,\theta)$ будь-яку похідну з цього списку, то, очевидно, для $\theta \in \Theta^c$

$$\lim_{\lambda\to 0} Df(\lambda,\theta)w(\lambda) = 0, \quad \text{якщо} \quad b > \beta.$$

Для таким чином продовжених функцій $Df(\lambda,\theta)w(\lambda)$ умову $\mathbf{N_4}$(i) виконано, якщо виконується нерівність (17), а умову $\mathbf{N_4}$(ii) — якщо $a - b > \dfrac{1}{2}$, що автоматично забезпечується (17). Виконання умови $\mathbf{N_4}$(iii) також є наслідком (17).

Для перевірки виконання умови $\mathbf{N_5}$ візьмемо функцію $v(\lambda) = \dfrac{\lambda^{2b'}}{(1+\lambda^2)^{a'}}$. Тоді $\mathbf{N_5}$(i) виконано, якщо $a' - b' \geq \dfrac{1}{4} + \bar{\alpha}$. Для виконання умови $\mathbf{N_5}$(ii) достатньо, щоб параметри задовольняли нерівності $b - b' < \underline{\beta}$, $a > a'$, де $\underline{\beta}$ — мінімально можливе значення β (пор. з $\mathbf{C_5}$(ii)). Умова $\mathbf{N_5}$(iii) виконується, якщо $a - b > \dfrac{1}{2}$, або є правильним (17).

Неважко зрозуміти, що достатньою для виконання $\mathbf{N_6}$ є умова

$$a - b > \frac{3}{4} + \bar{\alpha},$$

яка трохи сильніша за умову (17). Остання є достатньою для виконання умови $\mathbf{N_7}$.

6. Висновки. В роботі отримано слабку консистентність та асимптотичну нормальність оцінки Уітла параметра спектральної щільності гауссівського стаціонарного випадкового шуму в нелінійній моделі регресії, параметр якої в такій постановці задачі є заважаючим.

Доведення цих результатів потребує використання умов, по-перше, на функцію регресії та о. н. к. невідомого параметра функції регресії, а по-друге, на спектральну щільність випадкового шуму.

Хоча умови $\mathbf{C_3}$ – $\mathbf{C_5}$ та $\mathbf{N_4}$ – $\mathbf{N_8}$ разом складають враження громіздкої системи обмежень на спектральну щільність, ці обмеження не є обтяжливими, про що свідчать наведені у роботі приклади.

Природним продовженням досліджень буде використання періодограми залишків у полі контрасту Ібрагімова та в інших функціоналах, що використовуються для оцінювання параметрів спектральної щільності стаціонарного процесу, для отримання аналогічних результатів.

1. *Ivanov A. V., Leonenko N. N.* Statistical analysis of random fields. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1989. – 244 p.
2. *Ivanov A. V.* Asymptotic theory of nonlinear regression. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1997. – 327 p.
3. *Whittle P.* Hypothesis testing in time series. – New York: Hafner, 1951.
4. *Whittle P.* Estimation and information in stationary time series // Ark. mat. – 1953. – № 2. – P. 423 – 434.
5. *Hannan E. J.* Multiple time series. – New York: Springer, 1970.
6. *Hannan E. J.* The asymptotic theory of linear time series models // J. Appl. Probab. – 1973. – № 10. – P. 130 – 145.

7. *Dunsmuir W., Hannan E. J.* Vector linear time series models // Adv. Appl. Probab. – 1976. – № 8. – P. 339 – 360.
8. *Guyon X.* Parameter estimation for a stationary process on a d-dimensional lattice // Biometrica. – 1982. – № 69. – P. 95 – 102.
9. *Rosenblatt M. R.* Stationary sequences and random fields. – Boston: Birkhäuser, 1985.
10. *Fox R., Taqqu M. S.* Large-sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary Gaussian time series // Ann. Statist. – 1986. – **2**, № 14. – P. 517 – 532.
11. *Bentkus R. Yu., Malinkevicius R. R.* Statistical estimation of a multidimensional parameter of a spectral density. I // Lith. Math. J. – 1988. – **2**, № 28. – P. 115 – 126.
12. *Bentkus R. Yu., Malinkevicius R. R.* Statistical estimation of a multidimensional parameter of a spectral density. II // Lith. Math. J. – 1988. – **3**, № 28. – P. 209 – 221.
13. *Dahlhaus R.* Efficient parameter estimation for self-similar processes // Ann. Statist. – 1989. – **17**. – P. 1749 – 1766.
14. *Heyde C., Gay R.* On asymptotic quasi-likelihood stochastic process // Appl. – 1989. – № 31. – P. 223 – 236.
15. *Giraitis L., Surgailis D.* A central limit theorem for quadratic forms in strongly dependent linear variables and its application to asymptotic normality of Whittle estimate // Probab. Theory Relat. Fields. – 1990. – № 86. – P. 87 – 104.
16. *Heyde C., Gay R.* Smoothed periodogram asymptotic and estimation for processes and fields with possible long-range dependence // Stochast. Process. and Appl. – 1993. – № 45. – P. 169 – 182.
17. *Giraitis L., Taqqu M. S.* Whittle estimator for finite-variance non-Gaussian time series with long memory // Ann. Statist. – 1999. – **1**, № 27. – P. 178 – 203.
18. *Gao J., Anh N. N., Heyde C. C., Tieng Q.* Parameter estimation of stochastic processes with long-range dependence and intermittency // J. Time Ser. Anal. – 2001. – № 22. – P. 517 – 535.
19. *Gao J.* Moddeling long-range-dependent Gaussian processes with application in continuous-time financial models // J. Appl. Probab. – 2004. – № 41. – P. 467 – 485.
20. *Leonenko N. N., Sakhno L. M.* On the Whittle estimators for some classes of continuous-parameter random processes and fields // Statist. and Probab. Lett. – 2006. – № 76. – P. 781 – 795.
21. *Сахно Л. М.* Асимптотичні та спектральні методи для статистичного оцінювання випадкових процесів та полів: Дис. . . . д-ра фіз.-мат. наук. – Київ, 2012.
22. *Anh V. V., Leonenko N. N., Sakhno L. M.* On a class of minimum contract estimators for fractional stochastic processes and fields // J. Statist. Planning and Inference. – 2004. – № 123. – P. 161 – 185.
23. *Koul H. L., Surgailis D.* Asymptotic normality of the whittle estimator in linear regression models with long memory errors // Statist. Inference for Stochast. Processes. – 2000. – № 3. – P. 129 – 147.
24. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.
25. *Ибрагимов И. А.* Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса // Теория вероятностей и ее применение. – 1963. – **4**, № 8. – С. 391 – 430.
26. *Бенткус Р.* Об ошибке оценки спектральной функции стационарного процесса // Лит. мат. сб. – 1972. – **1**, № 12. – С. 55 – 71.
27. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 284 с.

Одержано 05.08.14,
після доопрацювання — 05.02.15