УДК 530.1

**О. Й. Соколовський, А. А. Ступка** (Дніпропетр. нац. ун-т)

# РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ У ГІДРОДИНАМІЧНОМУ СЕРЕДОВИЩІ З УРАХУВАННЯМ НЕРІВНОВАЖНИХ ФЛУКТУАЦІЙ*

We investigate the kinetics of the electromagnetic field in hydrodynamic medium containing charged particles. A closed system of equations of electromagnetic field and hydrodynamic equations taking into account dissipative processes is constructed. To describe the electromagnetic field, we use its average values and the corresponding binary correlation functions as new independent variables. The reverse influence of the field on the medium is studied. The investigation is based on quasirelativistic quantum electrodynamics in Hamilton gauge and on the Bogolyubov method of reduced description of nonequilibrium processes.

Досліджено кінетику електромагнітного поля в гідродинамічному середовищі, до складу якого входять заряджені частинки. Побудовано зв'язану систему з рівнянь електромагнітного поля і рівнянь гідродинаміки з урахуванням дисипативних процесів. Для опису електромагнітного поля використано його середні значення, а також відповідні бінарні кореляційні функції як нові незалежні змінні. Вивчено зворотний вплив поля на середовище. Дослідження ґрунтується на квазірелятивістській квантовій електродинаміці в калібровці Гамільтона і методі скороченого опису нерівноважних процесів Боголюбова.

**Вступ.** Робота ґрунтується на методі скороченого опису Боголюбова (див., наприклад, [1]). У цьому методі стан системи описується певною системою величин — параметрів скороченого опису (ПСО). Усі інші спостережувані величини виражаються через ПСО. У цій роботі розглядається кінетика електромагнітного (ЕМ) поля (система $s$) в гідродинамічному середовищі (система $b$) з урахуванням бінарних кореляцій поля як нових незалежних ПСО. Існує декілька причин для такого узагальнення. По-перше, врахування нерівноважних кореляцій при скороченому описі дає більш докладний опис стану системи, ніж звичайно, і дозволяє глибше зрозуміти і докладніше описати різноманітні явища. Не варто роз'яснювати те, що ЕМ процеси становлять переважну більшість тих процесів, що відбуваються навколо нас. По-друге, йдеться про концептуальну замкненість теорії. Справа в тому, що бінарні кореляції ЕМ поля виражаються через нормальну $\overline{c^{+}_{k\alpha} c_{k'\alpha'}}$ та аномальну $\overline{c_{k\alpha} c_{k'\alpha'}}$ одночастинкові функції розподілу фотонів ($c_{k\alpha}$, $c^{+}_{k\alpha}$ — оператори знищення та народження фотонів). У традиційному описі ЕМ поля в середовищі використовуються як ПСО тільки середні значення поля, які виражаються через $\overline{c_{k\alpha}}$, $\overline{c^{+}_{k\alpha}}$. Це важко зрозуміти, оскільки в кінетичній теорії насамперед слід враховувати як ПСО нормальні одночастинкові функції розподілу (див., наприклад, [2,3]), а в разі порушення симетрії — аномальні функції розподілу $\overline{c_{k\alpha} c_{k'\alpha'}}$ та середні $\overline{c_{k\alpha}}$, $\overline{c^{+}_{k\alpha}}$. Необхідність врахування бінарних кореляцій ЕМ поля при побудові електродинаміки в гідродинамічному середовищі вперше було відмічено в [4], але часові рівняння для бінарних кореляцій поля в ній не побудовані. Нерівноважні кореляції поля не враховано й у роботах [5, 6], де у наближенні самоузгодженого поля виведено узагальнені рівняння Власова, тобто систему рівнянь з рівнянь Максвелла для поля та кінетичного рівняння для середовища.

* Підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект 2.7/418) і частково фондом INTAS (проект 00-577).

Ще однією особливістю даної роботи є використання калібровки Гамільтона, в якій ЕМ поле описується трикомпонентним векторним потенціалом $\vec{A}\,(x)$ , а скалярний потенціал $\varphi\,(x)$ відсутній. Це дозволяє розвинути послідовний гамільтонів формалізм для поля, оскільки стандартний гамільтоніан ЕМ поля не містить часової похідної $\dot{\varphi}\,(x)$. У кулонівській калібровці ЕМ поле описується потенціалами $\vec{A}\,(x)$ , $\varphi\,(x)$ , але поле вважається поперечним $\mathrm{div}\vec{A}\,(x) = 0$. Кінетику ЕМ поля з урахуванням бінарних кореляцій було розглянуто в калібровці Кулона в [7] у рівноважному середовищі та у [8] у гідродинамічному (в роботі [4] теж використано калібровку Кулона). Калібровку Гамільтона для побудови кінетики ЕМ поля в рівноважному середовищі без урахування кореляцій поля було покладено в основу роботи [9]. У ній ЕМ поле визначається векторним потенціалом $\vec{A}\,(x)$ та напруженістю електричного поля $\vec{E}\,(x)$ . Поперечні складові цих полів $\vec{A}^t\,(x)$ , $\vec{E}^t\,(x)$ після квантування описують фотони в середовищі, а поздовжні $\vec{A}^l\,(x)$ , $\vec{E}^l\,(x)$ — плазмони. Певною мірою в такому підході розгляд відбувається у зворотному напрямку порівняно з роботою [10] (див. також [11]). У ній вивчалася система зарядів, які взаємодіють за законом Кулона. За рахунок далекодійної частини кулонівської взаємодії було введено ЕМ поле, яке описується поздовжнім векторним потенціалом. Саме цей ступінь волі у підсумку зв'язується з плазмонами в кулоновій плазмі.

Теорія, що розробляється в цій роботі, повинна бути калібрувально-інваріантною. Для цього необхідно, щоб ПСО середовища були середніми значеннями подовжених, тобто калібрувально-інваріантних, операторів фізичних величин $\hat{b}$ (див. обговорення аналогічного питання, наприклад, у [12]). Саме такі середні є спостережуваними величинами. Оператор Гамільтона середовища $\hat{H}_b$ теж повинен бути подовженою величиною. Спочатку теорія будується в термінах середніх від неподовжених величин, але потім результати виражаються в теорії збурень через калібрувально-інваріантні гідродинамічні змінні. Цю процедуру можна назвати перенормуванням.

У даній роботі середовище вважається системою з декількох компонент частинок, яка перебуває в гідродинамічному стані. На фундаментальному рівні ЕМ взаємодія заряджених частинок відбувається тільки через фотони. У подальшому розгляді ЕМ взаємодія вважається слабкою. Будемо вважати нижче, що заряджених частинок в системі небагато і їхня взаємодія з нейтральними частинками і нейтральних частинок між собою обумовлює формування гідродинамічного стану середовища. Таким чином, йдеться про частково іонізоване плазмове середовище, при розгляді якого нехтуємо процесами іонізації. Ідея про більшу зрозумілість перебігу гідродинамічних процесів у слабко іонізованій плазмі у порівнянні з повністю іонізованою використовується в літературі (див., наприклад, [13]).

**1. Оператор Гамільтона системи.** Будемо вважати, що система складається з точкових частинок декількох сортів та ЕМ поля і має оператор Гамільтона

$$\begin{gathered}\hat{H} = \hat{H}_s + \hat{H}_{b0} + \hat{H}_{sb} = \hat{H}_s + \hat{H}_b,\\ \hat{H}_s = \int dx \frac{\hat{\vec{E}}^2 + \hat{\vec{B}}^2}{8\pi}, \quad \hat{H}_b \equiv \int dx \hat{\varepsilon}\,(x),\\ \hat{H}_{b0} \equiv \int dx \hat{\varepsilon}_0\,(x), \quad \hat{H}_{sb} \equiv \hat{H}_1 + \hat{H}_2,\\ \hat{H}_1 = -\frac{1}{c}\int dx \hat{A}_n\,(x)\,\hat{j}_{n0}\,(x), \quad \hat{H}_2 = \frac{1}{2c^2}\int dx \hat{A}\,(x)^2\,\hat{\chi}\,(x).\end{gathered} \tag{1}$$

Тут $\hat{\varepsilon}(x)$ — подовжена густина енергії частинок, $\hat{\varepsilon}_0(x)$ — неподовжена густина енергії (вона включає нерелятивістську кінетичну енергію частинок та потенціальну енергію їхньої взаємодії), $\hat{j}_{n0}(x)$ — неподовжена густина електричного струму. Ті частинки, які мають заряд, взаємодіють з ЕМ полем, що описується векторним потенціалом $A_n(x)$. Нами використовується калібровка Гамільтона, в якій скалярний потенціал $\varphi(x) = 0$. Після квантування ЕМ поля векторний потенціал $A_n(x)$ як узагальнена координата поля стає оператором $\hat{A}_n(x)$, а відповідні оператори узагальненого імпульсу $\hat{P}_n(x)$, електричного $\hat{E}_n(x)$ та магнітного $\hat{B}_n(x)$ полів задаються формулами

$$\hat{P}_n(x) = \frac{1}{4\pi c^2}\dot{\hat{A}}_n(x), \quad \hat{E}_n(x) \equiv -\frac{1}{c}\dot{\hat{A}}_n(x), \quad \hat{\vec{B}}(x) = \mathrm{rot}\hat{\vec{A}}(x). \tag{2}$$

При цьому канонічні комутаційні співвідношення для поля можна записати у вигляді

$$\begin{gathered}\left[\hat{E}_n(x), \hat{A}_l(x')\right] = \delta_{nl} 4\pi i c\hbar\delta(x - x'), \quad \left[\hat{E}_n(x), \hat{E}_l(x')\right] = 0,\\ \left[\hat{A}_n(x), \hat{A}_l(x')\right] = 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Розглядається взаємодія поля з частинками $\hat{H}_{sb}$, яка запроваджується стандартним шляхом як різниця подовженого $\hat{H}_b$ і неподовженого $\hat{H}_{b0}$ операторів Гамільтона середовища.

Подовжені оператори фізичних величин середовища є функціями від векторного потенціалу $\hat{b} \equiv \hat{b}(\hat{A})$, залежність від якого вводиться заміною в неподовженій величині $\hat{b}_0 \equiv \hat{b}(0)$ похідних від польових операторів частинок середовища $\psi_a(x)$, $\psi_a^+(x)$ на подовжені

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_n}\psi_a(x) \to \left(\frac{\partial}{\partial x_n} - i\frac{e_a}{c\hbar}\hat{A}_n(x)\right)\psi_a(x),\\ \frac{\partial}{\partial x_n}\psi_a^+(x) \to \left(\frac{\partial}{\partial x_n} + i\frac{e_a}{c\hbar}\hat{A}_n(x)\right)\psi_a^+(x)\end{gathered}$$

($a$ — номер компоненти). Така процедура вводить серед іншого подовжені густини енергії $\hat{\varepsilon}(x)$ та струму $\hat{j}_n(x)$:

$$\begin{gathered}\hat{\varepsilon}(x) = \hat{\varepsilon}_0(x) - \frac{1}{c}\hat{j}_{n0}(x)\hat{A}_n(x) + \frac{1}{2c^2}\hat{\chi}(x)\hat{A}^2(x),\\ \hat{j}_n(x) = \hat{j}_{n0}(x) - \frac{1}{c}\hat{\chi}(x)\hat{A}_n(x).\end{gathered} \tag{4}$$

Формули (4), а тому і (1), містять спеціальний оператор

$$\hat{\chi}(x) = \sum_a \frac{e_a^2}{m_a}\hat{n}_a(x), \tag{5}$$

де $\hat{n}_a(x)$ — оператори густини кількості частинок, $e_a$ і $m_a$ — заряд і маса частинки $a$-ї компоненти середовища. Для подальшої побудови гідродинаміки середовища важливі також подовжений $\hat{\pi}_n(x)$ та неподовжений $\hat{\pi}_{n0}(x)$ оператори густини імпульсу, оператори густин заряду $\hat{\rho}(x)$ та маси $\hat{\sigma}_a(x)$, які не подовжуються:

$$\begin{gathered}\hat{\pi}_n(x) = \hat{\pi}_{n0}(x) - \frac{1}{c}\hat{\rho}(x)\hat{A}_n(x), \qquad \hat{\rho}(x) = \sum_a \hat{\rho}_a(x) = \sum_a e_a\hat{n}_a(x),\\ \hat{\sigma}_a(x) = m_a\hat{n}_a(x).\end{gathered} \tag{6}$$

Зауважимо, що далі в цій роботі немає необхідності запроваджувати картину вторинного квантування для ЕМ поля. Те ж стосується і частинок середовища.

Наведемо скорочений опис стану системи. Поставимо собі за мету побудову кінетики ЕМ поля в гідродинамічному середовищі. ПСО визначимо формулами

$$
\begin{gathered}
Sp\rho\left(t\right)\hat{\eta}_a \xrightarrow[t\gg\tau_0]{} \eta_a\left(t,\rho_0\right),\\
Sp\rho\left(t\right)\hat{\zeta}_\mu\left(x\right) \xrightarrow[t\gg\tau_0]{} \zeta_\mu\left(x,t,\rho_0\right) \quad \left(\rho_0\equiv\rho\left(t=0\right)\right);\\
\hat{\eta}_a: \quad \hat{\xi}_{in}\left(x\right), \left\{\hat{\xi}_{in}\left(x\right), \hat{\xi}_{i'n'}\left(x'\right)\right\}, \quad \hat{\xi}_{in}\left(x\right): \quad \hat{A}_n\left(x\right), \hat{E}_n\left(x\right);\\
\hat{\zeta}_\mu\left(x\right): \quad \hat{\varepsilon}_0\left(x\right), \hat{\pi}_{n0}\left(x\right), \hat{\sigma}_a\left(x\right).
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Тут $\tau_0$ — характерний час, після проходження якого настає скорочений опис і статистичний оператор системи у відповідності з функціональною гіпотезою Боголюбова має структуру

$$
\rho\left(t\right) \xrightarrow[t\gg\tau_0]{} \rho\left(\eta\left(t,\rho_0\right),\zeta\left(t,\rho_0\right)\right) \equiv \rho^{as}\left(t\right)
\tag{8}
$$

(краще говорити про ідею функціональної гіпотези, сформульовану М. М. Боголюбовим у [14]; див. також [1]). Права частина цієї формули $\rho\left(\eta,\zeta\right)$ є функціоналом від ПСО

$$
\begin{gathered}
\xi_{in}(x) = Sp\rho\left(\eta,\xi\right)\hat{\xi}_{in}(x),\\
\left(\xi_{in}\xi'_{i'n'}\right) \equiv \left(\xi_{in}(x)\xi_{i'n'}\left(x'\right)\right) \equiv Sp\rho\left(\eta,\zeta\right)\left\{\hat{\xi}_{in}(x), \hat{\xi}_{i'n'}\left(x'\right)\right\},\\
\zeta_\mu(x) = Sp\rho\left(\eta,\zeta\right)\hat{\zeta}_\mu(x),
\end{gathered}
\tag{9}
$$

який не залежить від часу та початкового стану системи $\rho_0$. Вважається, що статистичний оператор $\rho^{as}\left(t\right)$ є розв'язком квантового рівняння Ліувілля

$$
\partial_t\rho^{as}\left(t\right) = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\rho^{as}\left(t\right)\right] \equiv \mathbf{L}\rho^{as}\left(t\right)
\tag{10}
$$

(тут і далі для спрощення формул використовуються оператори Ліувілля типу $\mathbf{L}$). Функціональна гіпотеза приводить до замкнених рівнянь для ПСО

$$
\partial_t\eta_a\left(t,\rho_0\right) = L_a\left(\eta\left(t,\rho_0\right),\zeta\left(t,\rho_0\right)\right), \quad \partial_t\zeta_\mu\left(x,t,\rho_0\right) = M_\mu\left(x,\eta\left(t,\rho_0\right),\zeta\left(t,\rho_0\right)\right),
\tag{11}
$$

де позначено

$$
\begin{gathered}
L_a\left(\eta,\zeta\right) = Sp\rho\left(\eta,\zeta\right)\dot{\hat{\eta}}_a, \qquad M_\mu\left(x,\eta,\zeta\right) = Sp\rho\left(\eta,\zeta\right)\dot{\hat{\zeta}}_\mu(x),\\
\dot{\hat{\eta}}_a \equiv -\mathbf{L}\hat{\eta}_a = -\left(\mathbf{L}_s+\mathbf{L}_{sb}\right)\hat{\eta}_a, \qquad \dot{\hat{\zeta}}_\mu(x) \equiv -\mathbf{L}\hat{\zeta}_\mu(x) = -\left(\mathbf{L}_b+\mathbf{L}_{sb}\right)\hat{\zeta}_\mu(x).
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Статистичний оператор $\rho\left(\eta,\zeta\right)$ окрім рівнянь (9) задовольняє рівняння Ліувілля при скороченому описі

$$
\sum_a \frac{\partial\rho\left(\eta,\zeta\right)}{\partial\eta_a}L_a\left(\eta,\zeta\right) + \sum_\mu \int dx \frac{\delta\rho\left(\eta,\zeta\right)}{\delta\zeta_\mu(x)}M_\mu\left(\eta,\zeta\right) = \mathbf{L}\rho\left(\eta,\zeta\right).
\tag{13}
$$

Рівняння (10), (11) за своєю побудовою справджуються для часів $t \gg \tau_0$, але розв'язок рівнянь (11) для ПСО можна продовжити на усі $t \geq 0$. Тоді з (11), (13) отримаємо рівняння Ліувілля (10) для $t \geq 0$. Зрозуміло, що після цього ПСО при $0 \leq t \leq \tau_0$ не мають фізичного сенсу. Як наслідок цього, ефективні початкові умови не збігаються зі справжніми:

$$\eta_a\left(0,\rho_0\right) \neq Sp\rho_0\hat{\eta}_a, \quad \zeta_\mu\left(x,0,\rho_0\right) \neq Sp\rho_0\hat{\zeta}_\mu(x). \tag{14}$$

Ще М. М. Боголюбов відзначив [14], що рівняння типу (9), (13) для статистичного оператора $\rho\left(\eta,\zeta\right)$ мають декілька розв'язків і для відбору єдиного слід використати певну граничну умову, яка виражає собою наслідок еволюції системи у фізичному напрямку часу. З цією метою розглянемо умову повного ослаблення кореляцій між полем та середовищем

$$e^{\tau\left(\mathbf{L}_s+\mathbf{L}_{b0}\right)}\rho\left(\eta,\zeta\right) \xrightarrow[t\gg\tau_0]{} e^{\tau\left(\mathbf{L}_s+\mathbf{L}_{b0}\right)}\rho_{sq}\left(\eta\right)\rho_b\left(\zeta\right), \tag{15}$$

де $\rho_b\left(\zeta\right)$ — повний гідродинамічний статистичний оператор середовища, $\rho_{sq}\left(\eta\right)$ — квазірівноважний статистичний оператор поля,

$$\rho_{sq}\left(\eta\right) \equiv e^{F(\eta)-\sum\limits_a Z_a(\eta)\hat{\eta}_a}, \quad Sp\rho_{sq}\left(\eta\right) \equiv 1, \quad Sp\rho_{sq}\left(\eta\right)\hat{\eta}_a \equiv \eta_a. \tag{16}$$

Співвідношення (15) ґрунтується на принципі просторового ослаблення кореляцій, оскільки вільна еволюція двох систем розводить їх у просторі. При цьому середовище і поле стають статистично незалежними, що приводить до факторизації статистичного оператора системи. Наявність у правій частині формули (15) статистичного оператора $\rho_b\left(\zeta\right)$ свідчить, що вивчається поведінка поля саме в гідродинамічній рідині. Одночасно використання в (15) еволюції у фізичному напрямку часу враховує сформульовану вище вимогу. ПСО електромагнітного поля мають властивість, що виражається формулою

$$\mathbf{L}_s\hat{\eta}_a = -i\sum_{a'} c_{aa'}\hat{\eta}_{a'}. \tag{17}$$

Таке співвідношення додатково характеризує структуру теорії і було вперше вивчено Пелетмінським та Яценком (див., наприклад, [11]). З урахуванням (17) рівність (15) приводить до наступної граничної умови до рівняння Ліувілля (13):

$$e^{\tau\left(\mathbf{L}_s+\mathbf{L}_{b0}\right)}\rho\left(e^{-i\mathbf{c}\tau}\eta,\zeta\right) - \rho_{sq}\left(\eta\right)e^{\tau\mathbf{L}_{b0}}\rho_b\left(\zeta\right) \xrightarrow[t\gg\tau_0]{} 0. \tag{18}$$

Фактично М. М. Боголюбов у роботі [14] при виведенні кінетичного рівняння теж використав умову повного ослаблення кореляцій, записану за допомогою оператора еволюції газу у фізичному напрямку часу, як граничну (див. також роботу [15]). Рівняння Ліувілля (13) з урахуванням граничної умови (18) звичайним шляхом приводить до наступного інтегрального рівняння для статистичного оператора:

$$\rho\left(\eta,\zeta\right) = \rho_{sq}\left(\eta\right)\rho_b\left(\zeta\right) + \int\limits_0^{+\infty} d\tau e^{\tau\left(\mathbf{L}_s+\mathbf{L}_{b0}\right)}\Big\{\mathbf{L}_{sb}\rho\left(\eta,\zeta\right) + \rho_{sq}\left(\eta\right)\mathbf{L}_{b0}\rho_b\left(\zeta\right) -$$
$$-\sum_a \frac{\partial\rho\left(\eta,\zeta\right)}{\partial\eta_a}\tilde{L}_a\left(\eta,\zeta\right) - \sum_\mu \int dx \frac{\delta\rho\left(\eta,\zeta\right)}{\delta\zeta_\mu(x)} M_\mu\left(x,\eta,\zeta\right)\Big\}_{\eta\to e^{-i\mathbf{c}\tau}\eta}, \tag{19}$$

де

$$\tilde{L}_a\left(\eta,\zeta\right) \equiv -Sp\rho\left(\eta,\zeta\right)\mathbf{L}_{sb}\hat{\eta}_a. \tag{20}$$

**2. Побудова теорії збурень.** Інтегральне рівняння (19) слід розв'язувати у теорії збурень. Мализна ЕМ взаємодії дозволяє будувати теорію збурень за малим параметром $\lambda = e/\sqrt{\hbar c}$, виходячи з оцінок $\hat{H}_s \sim \lambda^0$, $\hat{H}_{b0} \sim \lambda^0$, $\hat{H}_1 \sim \lambda^1$, $\hat{H}_2 \sim \sim \lambda^2$ внесків (заряд частинок $a$-го сорту $e_a = ez_a$; $z_a$ — ціле число, $e$ — додатний елементарний заряд). Додатково будемо вважати, що малі градієнти запроваджених ПСО

$$\frac{\partial^s \zeta_\mu(x)}{\partial x_{n_1}...\partial x_{n_s}} \sim g^s, \quad \frac{\partial^s \xi_{in}(x)}{\partial x_{n_1}...\partial x_{n_s}} \sim g^s, \quad \frac{\partial^s \left(\xi_{in}(x)\xi_{i'n'}\left(x+x'\right)\right)}{\partial x_{n_1}...\partial x_{n_s}} \sim g^s. \tag{21}$$

Перша оцінка запроваджує звичайний у гідродинаміці малий параметр $g = r_{\mathrm{cor}\,r}/L_h$ і означає, що густини адитивних інтегралів руху $\zeta_\mu(x)$ повільно змінюються у просторі ($r_{\mathrm{cor}}$ — радіус кореляцій в системі, $L_h$ — характерний розмір неоднорідностей у розподілі $\zeta_\mu(x)$). Друга оцінка вимагає мализни градієнтів векторного потенціалу $A_n(x)$ та електричного поля $E_n(x)$ (це приводить і до мализни магнітного поля $B_n(x) \sim g^1$). Остання оцінка в (21) додатково характеризує слабку неоднорідність стану ЕМ поля. Важливо підкреслити, що градієнти флуктуацій $\left(\xi_{in}(x)\xi_{i'n'}\left(x+x'\right)\right)$ по $x'_n$ не є малими.

Будемо вважати, що явищем просторової дисперсії гідродинамічних характеристик середовища можна нехтувати. У той же час будемо враховувати просторову дисперсію електродинамічних характеристик середовища. Фактично йдеться про вибіркове підсумовування ряду теорії збурень по градієнтах ПСО поля. З метою отримання локальних гідродинамічних рівнянь використаємо зображення Бар'яхтара – Пелетмінського просторової залежності змінних середовища

$$Sp\rho\left(\eta,\zeta\right)\hat{b}(x) = Sp\rho\left(x,\eta,\zeta\right)\hat{b}\left(0\right), \tag{22}$$

де

$$\rho\left(x,\eta,\zeta\right) \equiv e^{\frac{i}{\hbar}x_n\hat{P}_{b0n}}\rho\left(\eta,\zeta\right)e^{-\frac{i}{\hbar}x_n\hat{P}_{b0n}}, \qquad \frac{i}{\hbar}\left[\hat{P}_{b0n},\hat{b}(x)\right] = -\frac{\partial\hat{b}(x)}{\partial x_n} \tag{23}$$

(див. [1]). Тут і далі через $\hat{b}(x)$ позначається оператор довільної трансляційно-інваріантної величини середовища, а через $\hat{P}_{b0n}$ — неподовжений оператор його імпульсу. Це дозволить розрахувати статистичний оператор $\rho\left(x,\eta,\zeta\right)$ як функцію величин $\zeta_\mu(x)$ та їхніх похідних саме в точці $x$.

Одночасно це запроваджує статистичний оператор $\rho_b\left(x,\zeta\right)$, який обчислено в [1] в перших порядках теорії збурень по градієнтах з метою побудови гідродинаміки при відсутності ЕМ поля. Значну роль при цьому відіграють вирази для неподовжених операторів потоків енергії $\hat{q}_{n0}(x)$ та імпульсу $\hat{t}_{nl0}(x)$ середовища (оператор потоку маси $a$-ї компоненти середовища $\hat{i}_{na}(x) = \hat{\pi}_{n0}(x)$), а також перетворення Галілея. Локальна швидкість рідини $v_n(x)$ в такій теорії визначається формулами

$$\pi_{n0}(x) = \sigma(x)v_n(x), \quad \sigma(x) \equiv \sum_a \sigma_a(x). \tag{24}$$

Перетворення Галілея статистичного оператора та операторів фізичних величин виконується за допомогою відповідного унітарного перетворення

$$\rho^0\left(x,\eta,\zeta\right) = U_{v(x)}\rho\left(x,\eta,\zeta\right)U^+_{v(x)}, \qquad \rho^0_b\left(x,\zeta\right) = U_{v(x)}\rho_b\left(x,\zeta\right)U^+_{v(x)}. \tag{25}$$

У підсумку із розрахунків за описаною теорією збурень на основі (12), (19), (20) отримуємо

$$\rho^0\left(x,\eta,\zeta\right) = \rho_{sq}\left(\eta\right)w^0_b\left(\zeta(x)\right) + \rho_{sq}\left(\eta\right)\rho_h + \rho_{em} + O\left(\lambda^0 g^2, \lambda^1 g^1, \lambda^2\right), \tag{26}$$

де $w^0_b\left(\zeta\right)$ — рівноважний статистичний оператор рідини, яка перебуває у стані спокою,

$$w^0_b\left(\zeta\right) = e^{\frac{\Omega_{b0}-\hat{H}_{b0}+\sum_a \mu_a\hat{M}_a}{T}} \qquad \left(\hat{M}_a \equiv \int dx\hat{\sigma}_a(x)\right), \tag{27}$$

$\rho_h$ — звичайний гідродинамічний внесок $\sim g^1$ у статистичний оператор $\rho_b\left(x,\zeta\right)$ (див. [1]), $\rho_{em}$ — внесок порядку в статистичний оператор $\rho^0\left(x,\eta,\zeta\right)$,

$$\rho_{em} = -\frac{i}{c\hbar}\int\limits_{-\infty}^{0} d\tau \int dx' \times$$

$$\times\left\{\left[\rho_{sq} w_b^0, \left(\hat{j}_{n0}\left(x'-x,\tau\right) + \hat{\rho}\left(x'-x,\tau\right) v_n\left(x'\right)\right)\hat{A}_n\left(x',\tau\right)\right] + \right.$$

$$\left. + w_b^0 \rho(x) v_n(x) \sum_a \frac{\partial\rho_{sq}}{\partial\eta_a} Sp_s \rho_{sq}\left[\hat{\eta}_a, \hat{A}_n\left(x',\tau\right)\right]\right\} \tag{28}$$

(через $Sp_s$, $Sp_b$, $Sp$ позначено відповідно шпури у просторах станів поля $\mathbf{H}_s$, середовища $\mathbf{H}_b$, всієї системи $\mathbf{H}$). В останній формулі введено оператори Дірака

$$\hat{j}_{n0}\left(x,t\right) = e^{-t\,\mathbf{L}_{b0}}\hat{j}_{n0}(x), \qquad \hat{A}_n\left(x,t\right) = e^{-t\,\mathbf{L}_s}\hat{A}_n(x). \tag{29}$$

У побудові гідродинаміки значну роль відіграє уявлення про локальну рівновагу рідини (див., наприклад, [1]). Це дозволяє ввести локальні термодинамічні величини, що виражаються через густини адитивних інтегралів руху $\zeta_\mu(x)$, які є ПСО в гідродинаміці. Серед іншого це стосується температури $\zeta_\mu(x)$, хімічних потенціалів $\mu_{a0}\left(\zeta\right)$, тиску $p_0\left(\zeta\right)$, які визначаються формулами

$$\begin{gathered} Sp_b w_b^0 \hat{\varepsilon}_0\left(0\right) = \varepsilon_0^0, \qquad Sp_b w_b^0 \hat{\sigma}_a\left(0\right) = \sigma_a, \\ \varepsilon_0 \equiv \varepsilon_0^0 + \sigma\tfrac{v^2}{2}, \quad Sp_b w_b^0 \hat{t}_{nl}\left(0\right) = p_0\delta_{nl} \end{gathered} \tag{30}$$

($\varepsilon_0^0$ — густина внутрішньої енергії).

**3. Калібрувальна інваріантність теорії.** В калібрувально-інваріантній гідродинаміці ПСО повинні бути середніми значеннями подовжених величин або їхніми функціями. Це приводить до наступних виразів для густини енергії, імпульсу та інваріантної швидкості рідини:

$$\begin{gathered} \varepsilon\left(x,\eta,\zeta\right) = Sp\rho\left(\eta,\zeta\right)\hat{\varepsilon}(x), \quad \pi_n\left(x,\eta,\zeta\right) = Sp\rho\left(\eta,\zeta\right)\hat{\pi}_n(x), \\ \sigma(x) = Sp\rho\left(\eta,\zeta\right)\hat{\sigma}(x), \qquad \pi_n\left(x,\eta,\zeta\right) = u_n\left(x,\eta,\zeta\right)\sigma(x) \end{gathered} \tag{31}$$

(густини маси $\hat{\sigma}_a(x)$ не потребують подовження). Обчислюючи за допомогою (4), (6), (26) – (28), отримуємо

$$\begin{gathered} \pi_n = \sigma v_n - \frac{\rho}{c}A_n + O\left(\lambda^2\right), \quad u_n = v_n - \frac{\rho}{c\sigma}A_n + O\left(\lambda^2\right), \\ \varepsilon = \varepsilon^0 + \sigma\frac{u^2}{2}, \qquad \varepsilon^0 = \varepsilon_0^0 + O\left(\lambda^1 g^1, \lambda^2\right). \end{gathered} \tag{32}$$

Подальший розгляд у цьому напрямку вимагає використання подовжених операторів потоків енергії $\hat{q}_n(x)$ та імпульсу $\hat{t}_{nl}(x)$. Компактні та зручні формули для операторів потоків були отримані в роботі [16] (див. також [11]). Визначимо оператори потоків $\hat{q}_n(x)$, $\hat{t}_{nl}(x)$ саме цими формулами, що приведе до наступних шредінгерівських рівнянь руху для подовжених густин $\hat{\sigma}_a(x)$, $\hat{\varepsilon}(x)$, $\hat{\pi}_n(x)$:

$$\begin{gathered} \dot{\hat{\sigma}}_a(x) = -\frac{\partial\hat{\pi}_{an}(x)}{\partial x_n}, \quad \dot{\hat{\varepsilon}}(x) = -\frac{\partial\hat{q}_n\left(x\right)}{\partial x_n} + \frac{1}{2}\left\{\hat{j}_n\left(x\right), \hat{E}_n(x)\right\}, \\ \dot{\hat{\pi}}_n(x) = -\frac{\partial\hat{t}_{nl}(x)}{\partial x_l} + \hat{\rho}(x)\hat{E}_l(x) + \frac{1}{c}e_{lmn}\hat{j}_m(x)\hat{B}_n(x), \end{gathered} \tag{33}$$

а також до виразів

$$\hat{q}_n(x) = \hat{q}_{n0}(x) + \frac{i}{c\hbar}\int dx' x'_n \int_0^1 d\mu \hat{A}_l\left(x+\mu x'\right) \times \\ \times \left[\hat{j}_{l0}\left(x+\mu x'\right),\ \hat{\varepsilon}_0\left(x+(\mu-1)\,x'\right)\right] + O\left(\lambda^2\right), \\ \hat{t}_{nl}(x) = \hat{t}_{nl0}(x) - \frac{1}{c}\hat{A}_n(x)\hat{j}_{l0}(x) - \frac{1}{c}\hat{A}_l(x)\hat{j}_{n0}(x) + O\left(\lambda^2\right) \tag{34}$$

(детальніше див. [8]).

Усе це дозволяє послідовно обчислити в теорії збурень праві частини рівнянь (11) для ПСО поля та неподовжених ПСО рідини. Для виведення рівнянь для подовжених ПСО будемо безпосередньо усереднювати зі знайденим статистичним оператором (26) рівняння (33) та відповідні співвідношення для поля

$$\dot{\hat{E}}_n(x) = c\Delta_{nl}\hat{A}_l(x) - 4\pi\hat{j}_n(x), \quad \dot{\hat{A}}_n(x) = -c\hat{E}_n(x), \\ \Delta_{nl} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_l} - \Delta\delta_{nl}, \qquad \Delta_{nl}A_l = \left(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}\right)_n \tag{35}$$

і його кореляцій. У підсумку одержимо систему рівнянь електродинаміки суцільних середовищ у гідродинамічному середовищі з урахуванням нерівноважних кореляцій поля:

$$\partial_t E_n = c\Delta_{nl}A_l - 4\pi j_n, \quad \partial_t A_n = -cE_n, \\ \partial_t\left(E_nE'_l\right)^c = c\Delta_{nm}\left(A_mE'_l\right)^c + c\Delta'_{lm}\left(E_nA'_m\right)^c - 4\pi\left\{\left(j_nE'_l\right)^c + \left(E_nj'_l\right)^c\right\}, \\ \partial_t\left(E_nA'_l\right)^c = c\Delta_{nm}\left(A_mA'_l\right)^c - c\left(E_nE'_l\right)^c - 4\pi\left(j_nA'_l\right)^c, \\ \partial_t\left(A_nE'_l\right)^c = -c\left(E_nE'_l\right)^c + c\Delta'_{lm}\left(A_nA'_m\right)^c - 4\pi\left(A_nj'_l\right)^c, \\ \partial_t\left(A_nA'_l\right)^c = -c\left(E_nA'_l\right)^c - c\left(A_nE'_l\right)^c, \tag{36}$$

$$\partial_t\sigma_a = -\frac{\partial i_{an}}{\partial x_n}, \quad \partial_t\varepsilon = -\frac{\partial q_n}{\partial x_n} + j_nE_n + \frac{1}{2}\left(j_nE_n\right)^c, \\ \partial_t\pi_n = -\frac{\partial t_{nl}}{\partial x_l} + \left\{\rho E_n + \frac{1}{c}e_{nlm}j_lB_m\right\} + \frac{1}{2}\left\{\left(\rho E_n\right)^c + \frac{1}{c}e_{nlm}\left(j_lB_m\right)^c\right\}, \tag{37}$$

де для довільних фізичних величин системи введено кореляційну функцію

$$\left(a_1a'_2\right)^c = Sp\rho\left(\eta,\zeta\right)\left\{\hat{a}_1(x), \hat{a}_2\left(x'\right)\right\} - 2Sp\rho\left(\eta,\zeta\right)\hat{a}_1(x)Sp\rho\left(\eta,\zeta\right)\hat{a}_2\left(x'\right). \tag{38}$$

У цих рівняннях роль ПСО відіграють середнє поле $E_n$, $A_n$, його кореляційні функції $\left(E_nE'_l\right)^c, \left(E_nA'_l\right)^c, \left(A_nE'_l\right)^c, \left(A_nA'_l\right)^c$ та гідродинамічні змінні $\sigma_a, \pi_n, \varepsilon$. До цих рівнянь слід додати співвідношення, які виражають струм та інші кореляційні функції через ПСО. Безпосередньо статистичний оператор (26) виражає вказані кореляційні функції через середні неподовжених гідродинамічних величин та їхні рівноважні кореляційні функції. Подальший крок полягає у використанні формул типу (32) для переходу до величин, які будуються на основі подовжених операторів і є, таким чином, спостережуваними. Тому останню процедуру можна назвати перенормуванням.

Термодинаміка спостережуваних величин і відповідні рівноважні кореляційні функції слід обчислювати за допомогою повного рівноважного статистичного оператора поля та рідини:

$$
\begin{gathered}
w^0 = e^{\frac{\Omega - \left(\hat{H}_s + \hat{H}_{b0} + \hat{H}_{sb}\right) + \sum\limits_a \mu_a \hat{M}_a}{T}}, \\
Spw^0 \hat{\varepsilon}(0) = \varepsilon^0, \quad Spw^0 \hat{\sigma}_a(0) = \sigma_a, \quad Spw^0 \hat{t}_{nl}(0) = p\delta_{nl}.
\end{gathered}
\tag{39}
$$

Останні формули в (39) дають спостережувані залежності $T\left(\varepsilon^0, \sigma\right)$, $\mu_a\left(\varepsilon^0, \sigma\right)$, $p\left(\varepsilon^0, \sigma\right)$. Зрозуміло, що процедура вказаного перенормування є досить складною. Вона значно спрощується, якщо отримати тільки внески декількох перших порядків теорії збурень. Це пов'язано з простотою формул перерахунку, частину з яких наведено в (32).

**4. Матеріальні рівняння теорії.** Наведемо результати обчислення середніх у рівняннях (36), (37), що зробить їх замкненими. Для цього зауважимо, що відповідно до (28) справджуються формули

$$
\begin{aligned}
Sp\rho_{em}\hat{b}(0) &= \int dx' \left\{\sigma_{bn}(x-x') + \sigma_{bn,s}(x-x')\, v_s\right\} E'_n + \\
&+ \int dx' \left\{\tilde{\lambda}_{bn}(x-x') + \lambda_{bn,s}(x-x')\, v_s\right\} A'_n, \qquad (40)\\
Sp\rho_{em}\{\hat{b}(0), \hat{A}_l(x')\} &= \int dx'' \left\{\sigma_{bn}(x-x'') + \sigma_{bn,s}(x-x'')\, v_s\right\} (E''_n A'_l) + \\
&+ \int dx'' \left\{\tilde{\lambda}_{bn}(x-x'') + \lambda_{bn,s}(x-x'')\, v_s\right\} \times \\
&\times (A''_n A'_l) + R_{bl}(x-x') + R_{bl,s}(x-x')\, v_s, \qquad (41)\\
Sp\rho_{em}\{\hat{b}(0), \hat{E}_l(x')\} &= \int dx'' \left\{\sigma_{bn}(x-x'') + \sigma_{bn,s}(x-x'')\, v_s\right\} (E''_n E'_l) + \\
&+ \int dx'' \left\{\tilde{\lambda}_{bn}(x-x'') + \lambda_{bn,s}(x-x'')\, v_s\right\} \times \\
&\times (A''_n E'_l) + T_{bl}(x-x') + T_{bl,s}(x-x')\, v_s \qquad (42)
\end{aligned}
$$

($v_s \equiv v_s(x)$, $A'_n \equiv A_n(x')$, $A''_n \equiv A_n(x'')$ і т. д.), де введено наступні матеріальні коефіцієнти:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{bl}(x-x') &= \frac{1}{c}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int dx'' G_{bj_n}(x-x'',\tau)\, \mu_{nl}(x''-x',\tau), \\
\sigma_{bl,s}(x-x') &= \frac{1}{c}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int dx'' G_{b\rho}(x-x'',\tau)\, \mu_{sl}(x''-x',\tau), \\
\tilde{\lambda}_{bl}(x-x') &= -\frac{1}{c}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int dx'' G_{bj_n}(x-x'',\tau)\, \nu_{nl}(x''-x',\tau), \\
\lambda_{bl,s}(x-x') &= -\frac{1}{c}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int dx'' G_{b\rho}(x-x'',\tau)\, \nu_{sl}(x''-x',\tau)
\end{aligned}
\tag{43}
$$

та кореляційні функції

$$
\begin{gathered}
R_{bl}(x-x') = \\
= -4\pi \int\limits_0^{\infty} d\tau \int dx'' \left\{I_{bj_n}(x-x'',\tau) + J_{bj_n}(x-x'',\tau)\right\} \mu_{nl}(x''-x',\tau),
\end{gathered}
$$

$$\begin{gathered}R_{bl,s}\left(x-x'\right)=\\ =-4\pi\int\limits_0^\infty d\tau\int dx''\left\{I_{b\rho}\left(x-x'',\tau\right)+J_{b\rho}\left(x-x'',\tau\right)\right\}\mu_{sl}\left(x''-x',\tau\right),\\ T_{bl}\left(x-x'\right)=\\ =-4\pi\int\limits_0^\infty d\tau\int dx''\left\{I_{bj_n}\left(x-x'',\tau\right)+J_{bj_n}\left(x-x'',\tau\right)\right\}\nu_{nl}\left(x''-x',\tau\right),\\ T_{bl,s}\left(x-x'\right)=\\ =-4\pi\int\limits_0^\infty d\tau\int dx''\left\{I_{b\rho}\left(x-x'',\tau\right)+J_{b\rho}\left(x-x'',\tau\right)\right\}\nu_{sl}\left(x''-x',\tau\right).\end{gathered}\tag{44}$$

У ці формули входять загаяна функція Гріна та кореляційні функції, які визначаються формулами

$$\begin{gathered}G_{b_1b_2}\left(x,t\right)=-\frac{i}{\hbar}\theta\left(t\right)Sp_bw_b^0\left[\hat b_1\left(x,t\right),\hat b_2\left(0\right)\right],\\ I_{b_1b_2}\left(x,t\right)=Sp_bw_b^0\delta\hat b_2\left(0\right)\hat b_1\left(x,t\right),\\ J_{b_1b_2}\left(x,t\right)=Sp_bw_b^0\hat b_1\left(x,t\right)\delta\hat b_2\left(0\right),\qquad \delta\hat b\equiv\hat b-Sp_bw_b^0\hat b.\end{gathered}\tag{45}$$

Після перенормування до виразів (43), (44) увійдуть відповідні величини, визначені за допомогою статистичного оператора (39) на подовжених операторах. Це можна буде зробити із зазначеною в (49) – (52) та (53) точністю (див. зауваження після (53)). Окрім цього використано наступний вираз для оператора Дірака $\hat A_n\left(x,t\right)$ з (29):

$$\hat A_n\left(x,\tau\right)=\int dx'\mu_{nl}\left(x-x',\tau\right)\hat E_l\left(x'\right)+\int dx'\nu_{nl}\left(x-x',\tau\right)\hat A_l\left(x'\right),\tag{46}$$

до якого входять функції $\mu_{nl}\left(x,\tau\right)$, $\nu_{nl}\left(x,\tau\right)$ з компонентами Фур'є вигляду

$$\begin{gathered}\mu_{nl}\left(k,\tau\right)=-c\tau\tilde k_n\tilde k_l-\delta^t_{nl}\frac{\sin\omega_k\tau}{k},\qquad \nu_{nl}\left(k,\tau\right)=\tilde k_n\tilde k_l+\delta^t_{nl}\cos\omega_k\tau,\\ \tilde k_n=k_n/k,\quad \delta^t_{nl}=\delta_{nl}-\tilde k_n\tilde k_l.\end{gathered}\tag{47}$$

У позначеннях (43) – (45) для спрощення вигляду формул не відображено залежність різних величин від гідродинамічних змінних, тобто

$$\sigma_{bl}\left(x-x'\right)\equiv\sigma_{bl}\left(x-x',\zeta(x)\right),\qquad R_{bl}\left(x-x'\right)\equiv R_{bl}\left(x-x',\zeta(x)\right)\tag{48}$$

і т. д.

Уведені позначення дозволяють записати вирази для низки величин з правої частини рівнянь (36), (37), які зроблять ці рівняння замкненими. Наведемо спочатку вирази для потоків частинок, заряду, імпульсу та енергії:

$$\begin{gathered}i_{an}=i^0_{an}+\sigma_au_n,\quad i^0_{an}=i^h_{an}+i^{em}_{an}+O\left(\lambda^0g^2,\lambda^1g^1,\lambda^2\right),\\ i^{em}_{an}=\int dx'\left\{\sigma_{\pi_{an}\,l}\left(x-x'\right)+\sigma_{\pi_{an}\,l,s}\left(x-x'\right)v_s\right\}E'_l+\\ +\int dx'\left\{\lambda_{\pi_{an}\,l}\left(x-x'\right)+\lambda_{\pi_{an}\,l,s}\left(x-x'\right)v_s\right\}A'_l,\\ \lambda_{\pi_{an}\,l}\left(x-x'\right)\equiv\tilde\lambda_{\pi_{an}\,l}\left(x-x'\right)+\frac{1}{c}\left(\rho\frac{\sigma_a}{\sigma}-\rho_a\right)\delta\left(x-x'\right)\delta_{nl};\end{gathered}\tag{49}$$

$$j_n = j_n^0 + \rho u_n, \qquad j_n^0 = j_n^h + j_n^{em} \ + O\left(\lambda^1 g^2, \lambda^2 g^1, \lambda^3\right),$$
$$j_n^h = \sum_a \frac{e_a}{m_a} i_{an}^h, \quad j_n^{em} = \sum_a \frac{e_a}{m_a} i_{an}^{em},$$
$$j_n^{em} = \int dx' \left\{\sigma_{j_n l}\left(x - x'\right) + \sigma_{j_n l,s}\left(x - x'\right) v_s\right\} E_l' + \tag{50}$$
$$+ \int dx' \left\{\lambda_{j_n l}\left(x - x'\right) + \lambda_{j_n l,s}\left(x - x'\right) v_s\right\} A_l',$$
$$\lambda_{j_n l}\left(x - x'\right) \equiv \tilde{\lambda}_{j_n l}\left(x - x'\right) + \frac{1}{c}\sum_a \left(\rho\frac{\sigma_a}{\sigma} - \rho_a\right) \delta\left(x - x'\right) \delta_{nl};$$

$$t_{nl} = t_{nl}^0 + \sigma u_n u_l, \quad t_{nl}^0 = p\delta_{nl} + t_{nl}^h + t_{nl}^{em} + O\left(\lambda^0 g^2, \lambda^1 g^1, \lambda^2\right),$$
$$t_{nl}^{em} = \int dx' \left\{\sigma_{t_{nl} m}\left(x - x'\right) + \sigma_{t_{nl} m,s}\left(x - x'\right) v_s\right\} E_m' + \tag{51}$$
$$+ \int dx' \left\{\tilde{\lambda}_{t_{nl} m}\left(x - x'\right) + \lambda_{t_{nl} m,s}\left(x - x'\right) v_s\right\} A_s';$$

$$q_n = q_n^0 + t_{nl}^0 u_l + \left(\varepsilon^0 + \sigma\frac{u^2}{2}\right) u_n, \quad q_n^0 = q_n^h + q_n^{em} + O\left(\lambda^0 g^2, \lambda^1 g^1, \lambda^2\right),$$
$$\begin{aligned} q_n^{em} = &\int dx' \left\{\sigma_{q_n l}\left(x - x'\right) + \sigma_{q_n l,s}\left(x - x'\right) v_s\right\} E_l' + \\ &+ \int dx' \left\{\lambda_{q_n l}\left(x - x'\right) + \lambda_{q_n l,s}\left(x - x'\right) v_s\right\} A_l', \end{aligned} \tag{52}$$
$$\lambda_{q_n l}\left(x - x'\right) \equiv \tilde{\lambda}_{q_n l}\left(x - x'\right) + \frac{i}{c\hbar}\int dx'' x_n'' Sp_b w_b^0 \left[\hat{\varepsilon}_0\left(0\right), \hat{j}_l\left(x''\right)\right] \delta\left(x - x'\right).$$

До цих виразів входять звичайні гідродинамічні дисипативні потоки в системі відліку спокою рідини $i_{an}^h$, $t_{nl}^h$, $q_n^h$, наведені, наприклад, в [1] (див. також [8]).

Праві частини рівнянь містять кореляційні функції, які задаються формулами

$$\left(j_n A_l'\right)^c = \int dx'' \left\{\sigma_{j_n m}\left(x - x''\right) + \sigma_{j_n m,s}\left(x - x''\right) v_s\right\} \left(E_m'' A_l'\right)^c +$$
$$+ \int dx'' \left\{\lambda_{j_n m}\left(x - x'\right) + \lambda_{j_n m,s}\left(x - x'\right) v_s\right\} \left(A_m'' A_l'\right)^c + R_{j_n l}\left(x - x'\right) +$$
$$+ R_{j_n l,s}\left(x - x'\right) v_s,$$
$$\left(j_n E_l'\right)^c = \int dx'' \left\{\sigma_{j_n m}\left(x - x''\right) + \sigma_{j_n m,s}\left(x - x''\right) v_s\right\} \left(E_m'' E_l'\right)^c +$$
$$+ \int dx'' \left\{\lambda_{j_n m}\left(x - x'\right) + \lambda_{j_n m,s}\left(x - x'\right) v_s\right\} \left(A_m'' E_l'\right)^c + T_{j_n l}\left(x - x'\right) +$$
$$+ T_{j_n l,s}\left(x - x'\right) v_s,$$
$$\left(j_n B_l'\right)^c = \int dx'' \left\{\sigma_{j_n m}\left(x - x''\right) + \sigma_{j_n m,s}\left(x - x''\right) v_s\right\} \left(E_m'' B_l'\right)^c +$$
$$+ \int dx'' \left\{\lambda_{j_n m}\left(x - x'\right) + \lambda_{j_n m,s}\left(x - x'\right) v_s\right\} \left(A_m'' B_l'\right)^c +$$
$$+ S_{j_n l}\left(x - x'\right) + S_{j_n l,s}\left(x - x'\right) v_s, \tag{53}$$
$$\left(\rho E_n'\right)^c = \int dx'' \left\{\sigma_{\rho l}\left(x - x''\right) + \sigma_{\rho l,s}\left(x - x''\right) v_s\right\} \left(E_l'' E_n'\right)^c +$$
$$+ \int dx'' \left\{\tilde{\lambda}_{\rho l}\left(x - x'\right) + \lambda_{\rho l,s}\left(x - x'\right) v_s\right\} \left(A_l'' E_n'\right)^c +$$

$$+T_{\rho\, n}\left(x-x'\right)+T_{\rho n,s}\left(x-x'\right)v_s,$$

$$\left(A_n j_l'\right)^c=\int dx''\left\{\sigma_{j_l m}'\left(x'-x''\right)+\sigma_{j_l m,s}'\left(x'-x''\right)v_s'\right\}\left(A_n E_m''\right)^c+$$

$$+\int dx''\left\{\lambda_{j_l m}'\left(x'-x''\right)+\lambda_{j_l m,s}'\left(x'-x''\right)v_s'\right\}\left(A_n A_m''\right)^c+$$

$$+R_{j_l\, n}'\left(x'-x\right)+R_{j_l\, n,s}'\left(x'-x\right)v_s',$$

$$\left(E_n j_l'\right)^c=\int dx''\left\{\sigma_{j_l m}'\left(x'-x''\right)+\sigma_{j_l m,s}'\left(x'-x''\right)v_s'\right\}\left(E_n E_m''\right)^c+$$

$$+\int dx''\left\{\lambda_{j_l m}'\left(x'-x''\right)+\lambda_{j_l m,s}'\left(x'-x''\right)v_s'\right\}\left(E_n A_m''\right)^c+$$

$$+S_{j_l\, n}'\left(x'-x\right)+S_{j_l\, n,s}'\left(x'-x\right)v_s',$$

де

$$S_{j_n\, l}\left(x-x'\right)=e_{lms}\frac{\partial R_{j_n s}\left(x-x'\right)}{\partial x_m'},$$
$$S_{j_n\, l,s}\left(x-x'\right)=e_{lmp}\frac{\partial R_{j_n p,s}\left(x-x'\right)}{\partial x_m'}, \tag{54}$$

а також

$$\sigma_{bl}'\left(x'-x\right)\equiv\sigma_{bl}'\left(x'-x,\zeta\left(x'\right)\right),\qquad R_{bl}'\left(x'-x\right)\equiv R_{bl}\left(x'-x,\zeta\left(x'\right)\right) \tag{55}$$

і т. д. У (53) з метою скорочення запису не вказано оцінку наступного внеску в наведені вирази, що було зроблено в (49) – (52). Зауважимо, що згортки в формулах (49) – (53) описують просторову дисперсію введених нами матеріальних коефіцієнтів середовища (43).

Відповідно до (48) величини (43) – (45) залежать від гідродинамічних змінних лише параметрично. Тому їх структура додатково визначається міркуваннями ізотропії. Наприклад, фур'є-образ $\sigma_{j_n\, l}\left(\vec{k},\zeta(x)\right)$ функції $\sigma_{j_n\, l}\left(x-x',\zeta(x)\right)$ з (50) описує провідність системи з урахуванням просторової дисперсії і має структуру

$$\sigma_{j_n\, l}\left(\vec{k},\zeta\right)=\sigma^t\left(k,\zeta\right)\delta_{nl}^t+\sigma^l\left(k,\zeta\right)\tilde{k}_n\tilde{k}_l, \tag{56}$$

яка визначає поперечну та поздовжню провідності.

Зазначимо, що рівняння для ЕМ поля і його бінарних кореляцій (36), (53) мають структуру, яка випливає з рівняння Ланжевена

$$\partial_t E_n\left(x,t\right)=c\Delta_{nl}A_l\left(x,t\right)+h_n\left(x,t\right)-$$
$$-4\pi\int dx'\left\{\sigma_{j_n l}\left(x-x',\zeta\left(x,t\right)\right)+\sigma_{j_n l,s}\left(x-x',\zeta\left(x,t\right)\right)v_s\left(x,t\right)\right\}E_l\left(x',t\right)-$$
$$-4\pi\int dx'\left\{\lambda_{j_n l}\left(x-x',\zeta\left(x,t\right)\right)+\lambda_{j_n l,s}\left(x-x',\zeta\left(x,t\right)\right)v_s\left(x,t\right)\right\}A_l\left(x',t\right), \tag{57}$$

де $h_n\left(x,t\right)$ — випадкове поле. Цей результат можна назвати узагальненим принципом Онзагера, оскільки він означає, що рівняння для середнього поля $\overline{x_i}$ і його кореляцій $\overline{x_i x_{i'}}$ мають вигляд

$$\partial_t\overline{x_i}=\sum_{i'}a_{ii'}\overline{x_{i'}},\qquad \partial_t\overline{x_i x_{i'}}=\sum_{i''}\left(a_{ii''}\overline{x_{i''}x_{i'}}+a_{i'i''}\overline{x_i x_{i''}}\right)+b_{ii'}, \tag{58}$$

де $a_{ii'}$, $b_{ii'}$ — деякі матриці. Це зауваження дозволяє спростити дослідження отриманих рівнянь (36), (37), (49) – (53).

Таким чином, поставлену в цій роботі задачу розв'язано. Для випадку гідродинамічного середовища отримано нову систему рівнянь електродинаміки суцільних середовищ, що враховує кореляції ЕМ поля як нові незалежні параметри скороченого опису.


1. *Ахиезер А. И., Пелетминский С. В.* Методы статистической физики. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
2. *Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В.* Кинетические уравнения для электронов плазмы и излучаемых ими фотонов в сильном магнитном поле // Изв. вузов. Радиофизика. – 1963. – **6**, № 6. – С. 1115 – 1128.
3. *Ахиезер А. И., Пелетминский С. В.* Кинетика черного излучения // Докл. АН СССР. – 1971. – **200**. – С. 1317 – 1321.
4. *Пелетминский С. В., Приходько В. И., Щелоков В. С.* Низкочастотная асимптотика электродинамических функций Грина // Теорет. и мат. физика. – 1975. – **25**, № 1. – С. 70 – 79.
5. *Морозов В. Г., Репке Г., Хелль А.* Кинетическая теория квантово-электродинамической плазмы в сильном электромагнитном поле. I. Ковариантный формализм // Там же. – 2002. – **131**, № 3. – С. 432 – 455.
6. *Морозов В. Г., Репке Г., Хелль А.* Кинетическая теория квантово-электродинамической плазмы в сильном электромагнитном поле. II. Ковариантное приближение среднего поля // Там же. – 2002. – **132**, № 1. – С. 161 – 176.
7. *Соколовський О. Й., Ступка А. А.* Кінетична теорія електромагнітних процесів у рівноважному середовищі // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Фізика, радіоелектроніка. – 2003. – Вип. 10. – С. 63 – 70.
8. *Соколовський О. Й., Ступка А. А.* Кінетична теорія електромагнітних процесів у гідродинамічному середовищі // Там же. – 2004. – Вип. 11. – С. 95 – 107.
9. *Соколовський О. Й., Ступка А. А.* Моди електромагнітного поля в рівноважній плазмі // Вісн. Харк. ун-ту. Сер. фіз. – 2004. – № 628, вип. 2(24). – С. 87 – 92.
10. *Bohm D., Pines D.* A collective description of electron interactions: III. Coulomb interactions in degenerate electron gas // Phys. Rev. – 1953. – **92**. – P. 609 – 625.
11. *Бом Д.* Общая теория коллективных переменных. – М.: Мир, 1964. – 152 с.
12. *Ковалевский М. Ю.* К микроскопической теории заряженной сверхтекучей жидкости // Физика низк. температур. – 1986. – **2**, № 11. – С. 1165 – 1171.
13. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. – М.: Наука, 1979. – 528 с.
14. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. – М.; Л.: Гостехиздат, 1946. – 119 с.
15. *Соколовський О. Й.* До питання про кінетику броунівської частинки у нерівноважній рідині // Укр. фіз. журн. – 1999. – **44**, № 6. – С. 721 – 729.
16. *Пелетминский С. В., Соколовский А. И.* Операторы потоков физических величин и метод квазисредних // Теорет. и мат. физика. – 1974. – **18**, № 1. – С. 121 – 129.


Одержано 05.04.2005