Цей номер журналу присвячується
80-річчю академіка НАН України
Юрія Макаровича Березанського

Ю. М. Березанський, В. І. Горбачук, М. Л. Горбачук
(Ін-т математики НАН України, Київ)

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ В ІНСТИТУТІ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ

We give the description of results on the functional analysis obtained in the Institute of Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine beginning on the day of its foundation.

Викладено в описовій формі результати з функціонального аналізу, отримані в Інституті математики НАН України починаючи з дня його заснування.

0. Вступ. Цей огляд торкається результатів лише тих математиків, котрі безпосередньо працювали або працюють в інституті, і отриманих ними (та співавторами) під час роботи в інституті.

Інститут математики НАН України може пишатись тим, що у свій час в ньому працювали засновники функціонального аналізу С. Банах і М. Г. Крейн. Але перші значні результати у цій галузі в Україні одержали в 1935 – 1937 рр. М. М. Боголюбов і М. М. Крилов. Вони стосувались існування інваріантних мір у динамічних систем та вивчення сукупності таких мір і відіграли важливу роль у розвитку загальної теорії динамічних систем і формуванні нових геометричних підходів до розв'язання певних типів задач. Приблизно тоді ж (1934 – 1938 рр.) в інституті працював М. П. Кравчук, багато з результатів якого давали поштовх до розвитку функціонального аналізу. Тут, насамперед, слід згадати його роботи з алгебри, присвячені зображенням сімей комутуючих матриць, квадратичних форм і лінійних перетворень, а також побудовану ним теорію ортогональних поліномів, названих згодом поліномами Кравчука.

С. Банах разом із декількома своїми колегами (зокрема, Ю. Шаудером) та учнями (одним із них був С. Мазур) у 1940 – 1941 рр. були співробітниками Львівської філії Інституту математики. Український переклад широко відомої монографії С. Банаха „Курс функціонального аналізу" (французька назва „Théorie des opérations linéaries"), виконаний львівським математиком М. О. Зарицьким і виданий у Києві в 1948 р. за ініціативою М. М. Боголюбова під його та С. І. Зуховицького редакцією, став першим посібником з цієї дисципліни в Радянському Союзі. Роль цього перекладу у поширенні досліджень з функціонального аналізу в Україні і становленні сучасної української математичної термінології важко переоцінити.

М. Г. Крейн працював в Інституті математики упродовж 1940 – 1941 та 1944 – 1951 рр. Саме в цей час він опублікував свої класичні роботи з геометрії нормованих просторів, теорії розширень операторів і розкладів за власними векторами (докладніше про це йтиметься нижче).

Під впливом названих математиків проблеми функціонального аналізу почали досліджувати науковці Києва, Харкова й інших міст України. Зокрема, у Києві, в Інституті математики, утворилась група сильних молодих математиків (до її складу входили С. Г. Крейн (1940 – 1951 рр.), М. О. Красносєльський (1947 – 1952 рр.), Б. І. Коренблюм (1947 – 1952 рр.), Ю. Л. Далецький (1949 – 1951 рр.)), яка займалась як розвитком загальних методів функціонального аналізу, так і його застосуваннями до теорії диференціальних рівнянь і теорії функцій. До неї пізніше приєднались Г. С. Шилов (1951 – 1954 рр.) і О. С. Парасюк (1952 – 1966 рр.), котрі успішно розробляли теорію узагальнених функцій та її застосувань до теорії диференціальних рівнянь і квантованих полів. Усі вони виховали чимало учнів.

Слід зазначити, що розвиток функціонального аналізу (як і деяких інших розділів математики) в інституті не обійшовся без ексцесів. Тодішній правлячий режим з його тотальним контролем над усіма сферами життя, включаючи навіть мистецтво і науку, режим, що тримався на стеженнях, доносах і „свідченнях" співпрацівників, піддавав гонінням, а часто-густо й фізичному знищенню яскравих особистостей, сприяючи тим самим просуванню по наукових і адміністративних сходинках деяких менш здібних. Одні й ті самі люди, причетні до репресій, засуджували одних за націоналізм, а інших за космополітизм. Жертвами політичних переслідувань стали й деякі математики.

Так, у 1938 р. було звільнено з інституту видатного математика академіка АН УРСР М. П. Кравчука, який потім загинув на засланні у колимських таборах. Найтяжчою „провиною" М. П. Кравчука стало його життєве кредо: „Моя любов — Україна і математика".

Через деякий час (1951 – 1952 рр.) звільнили С. Г. Крейна і М. О. Красносєльського (аналогічна доля спіткала Ю. Л. Далецького і Б. І. Коренблюма). З цієї причини С. Г. Крейн і М. О. Красносєльський змушені були залишити Україну і переїхати до Воронежа, де вони згодом створили широко відому математичну школу. Майже водночас вже тоді всесвітньовідомий математик член-кореспондент АН УРСР М. Г. Крейн був усунутий зі своєї посади тільки тому, що працював у Києві, а мешкав в Одесі. Усі ці математики були звільнені з роботи під приводом боротьби з космополітизмом.

Безумовно, все це не могло не залишити темних плям на сторінках історії розвитку математики в інституті. Сьогодні ж, на жаль, економічні негаразди перехідного періоду, що виникли внаслідок розпаду Радянського Союзу і неадекватної діяльності уряду, теж даються взнаки. Зубожілий статус ученого спричинив відтік за кордон багатьох науковців, в тому числі співробітників інституту, серед яких і такі відомі математики, як А. В. Скороход, Ю. Г. Кондратьєв, С. В. Перевєрзєв, С. І. Трофимчук, О. Ю. Далецький та ін., котрі у пошуках кращих умов для життя і наукової роботи виїхали за межі України і тепер працюють на інші країни. Недосконалість же окремих норм нашого законодавства, пов'язана з неможливістю одночасно обіймати посади у вітчизняних і закордонних наукових або навчальних закладах, нерідко призводить до ускладнень для тих із них, хто хоче і міг би активно впливати на наукове життя інституту. Зокрема, Ю. Г. Кондратьєва, який плідно співпрацював з інститутом у галузі застосувань функціонального аналізу до сучасної математичної фізики, в 2004 р. було звільнено з ініціативи частини співробітників, які вбачали порушення закону в тому, що, починаючи з 1994 р., він має постійну позицію в одному з університетів Німеччини.

Втім більшість висококваліфікованих спеціалістів у галузі функціонального аналізу та його застосувань залишились в Україні. Попри всі згадані вище труднощі вони успішно працюють у вітчизняних науково-дослідних і навчальних закладах, про що свідчать кількість та якість монографій і статей, опублікованих ними, доповідей на міжнародних конгресах і конференціях, нагород, одержаних українськими студентами на міжнародних математичних олімпіадах.

У зв'язку з цим не можна не сказати про неоціненну роль грантів, що призначаються на підтримку їхньої самовідданої праці низкою міжнародних організацій, урядами та університетами таких країн, як Англія, Ізраїль, Німеччина, США, Франція, Швейцарія, Швеція та ін., а також надання (наприклад, Польщею) можливості періодичної співпраці.

Відділ математичного, а фактично функціонального аналізу був створений в інституті в 1960 р. під керівництвом Ю. М. Березанського, учня М. Г. Крейна і С. Г. Крейна. Його аспірантами, котрі згодом стали докторами фізико-математичних наук, були Я. А. Ройтберг (захистив докторську дисертацію в 1968 р.), В. Н. Романенко (1969 р.), М. Л. Горбачук (1973 р.), Л. П. Нижник (1974 р.), В. Д. Кошманенко (1984 р.), В. В. Барковський (1984 р.), Ю. Г. Кондратьєв (1986 р.), Ю. Б. Орочко (1987 р.), Ю. С. Самойленко (1988 р.), В. І. Горбачук (1992 р.). З них в інституті зараз працюють М. Л. Горбачук, Л. П. Нижник, В. Д. Кошманенко, Ю. С. Самойленко, В. І. Горбачук.

До другого покоління колишніх аспірантів відділу, які здобули ступінь доктора фізико-математичних наук, належать: А. Н. Кочубей (1987 р.), В. А. Михайлець і О. Резніков (1989 р.), До Конг Хань (1990 р.), Л. І. Вайнерман (1991 р.), В. В. Городецький (1995 р.), С. О. Кужель (2002 р.) (учні М. Л. Горбачука); Фам Лой Ву (1984 р.), Н. Іскандеров (2003 р.) (учні Л. П. Нижника); О. Ю. Далецький (2001 р.) і В. Л. Островський (2004 р.) (учні Ю. С. Самойленка). З них в інституті працюють А. Н. Кочубей, В. А. Михайлець, С. О. Кужель, В. Л. Островський.

Наразі в Інституті математики дослідження з функціонального аналізу проводяться переважно у трьох відділах: функціонального аналізу (керівник Ю. С. Самойленко), диференціальних рівнянь з частинними похідними (керівник М. Л. Горбачук), математичної фізики (керівник О. Л. Ребенко; до 2004 р. очолював Ю. Г. Кондратьєв). Опубліковано понад 30 монографій, проведено декілька міжнародних конференцій, з'їздів. Ось уже десять років поспіль видається журнал „Methods of Functional Analysis and Topology".

1. Геометрія нормованих просторів і оператори в таких просторах. У функціональному аналізі та його застосуваннях важливу роль відіграють банахові простори із заданим конусом векторів. Це поняття ввів М. Г. Крейн; разом з С. Г. Крейном він дослідив простори з конусом і простори, спряжені до них (1937 – 1943 рр.). Для оператора в банаховому просторі з конусом, зберігаючого конус інваріантним, М. Г. Крейну і М. А. Рутману (Одеса) вдалося одержати (1938 – 1948 рр.) ряд результатів стосовно існування власних векторів цього і спряженого з ним операторів, які узагальнюють відповідні результати щодо власних векторів матриць з невід'ємними елементами. Вони тісно пов'язані з довоєнними дослідженнями М. Г. Крейна, В. Л. Шмульяна (Одеса) та ін., що торкаються опуклих множин і слабких топологій у банахових просторах. Тут, насамперед, слід відзначити відому теорему Крейна – Мільмана про крайні точки обмеженої регулярно опуклої множини у просторі, спряженому з банаховим. Ця теорема примикає до згаданих вище результатів М. М. Боголюбова і М. М. Крилова, має важливі застосування і лежить в основі багатьох подальших відкриттів.

2. Загальна теорія ермітових і самоспряжених операторів у гільбертовому просторі. Оператори цього типу узагальнюють поняття ермітової матриці й відіграють надзвичайно важливу роль у математичній фізиці. М. Г. Крейн описав (1944 – 1948 рр.) усі напівобмежені самоспряжені розширення напівобмеженого ермітового оператора з нижніми межами, не меншими за нижню межу початкового оператора, а також дав конструктивний опис узагальнених резольвент ермітового оператора з рівними скінченними дефектними числами. Ним також розглянуто важливий клас так званих цілих операторів. До цього класу, зокрема, входять оператори, що фігурують у таких класичних задачах, як степенева проблема моментів і проблема продовження додатно визначених функцій (невизначені випадки), проблема Неванлінни – Піка тощо. На цілі оператори вдалося поширити багато конструкцій, властивих проблемі моментів, і знайти, завдяки цьому, єдиний операторний підхід до розв'язання перелічених вище задач та їх операторних узагальнень. При побудові теорії цілих операторів М. Г. Крейн застосував як чисто операторні методи, так і методи теорії аналітичних функцій. Поєднання цих методів привело не тільки до виникнення нового напряму в теорії операторів, але й до постановки і розв'язання нових оригінальних задач у теорії аналітичних функцій.

Зазначені результати з теорії розширень стосувались ермітових операторів зі щільною областю визначення. М. О. Красносєльський розглянув (1947 р.) розширення нещільно заданих операторів. Він показав, що кожний такий оператор допускає ермітові розширення зі щільною областю визначення, і з'ясував, коли серед таких розширень існують максимальні. До того ж самого часу відноситься також важлива теорема про інваріантність дефектних чисел довільного оператора, яка належить М. Г. Крейну та М. О. Красносєльському.

Побудова розкладів за власними функціями самоспряжених операторів на основі загальної спектральної теореми завжди викликала труднощі, які так чи інакше долались у кожному конкретному випадку. Перший загальний підхід до усунення цих труднощів (так званий метод напрямних функціоналів) був знайдений М. Г. Крейном (1946 р.) для операторів зі скінченнократним спектром. Так з'явилась можливість одержати єдиним чином розклади за власними функціями самоспряжених звичайних диференціальних операторів будь-якого порядку. В 1956 р. Ю. М. Березанський на підставі ідеї роботи І. М. Гельфанда і А. Г. Костюченка (Москва, 1955 р.) розробив загальний підхід до теорії розкладів для самоспряжених операторів, що діють у функціональних гільбертових просторах, який дав змогу побудувати розклади за власними функціями диференціальних операторів з частинними похідними аж до межі області, вивчити характер росту власних функцій, розглянути ряд інших операторів математичної фізики тощо. Невдовзі цей підхід був поширений Г. І. Кацом і Ю. М. Березанським на абстрактні гільбертові простори, завдяки чому теорія розкладів за узагальненими власними векторами довільного самоспряженого оператора набула завершеного вигляду. Згодом ці результати були узагальнені Ю. М. Березанським на довільні сім'ї комутуючих нормальних операторів. У цьому випадку спектральні інтеграли записуються у вигляді континуальних по простору „власних значень", що відповідають сумісним узагальненим власним векторам сім'ї. Зокрема, таким простором може служити простір узагальнених функцій, негативний соболєвський простір та ін.; спектральною мірою сім'ї є міра, зосереджена на розглядуваному просторі. Її вивчення стосуються й нещодавні (2003 р.) результати А. Д. Пулємьотова — учня Ю. М. Березанського. Наслідком зазначеної теорії стали одержані в 1977 – 1988 рр. широкі узагальнення спектральних зображень для сімей комутуючих операторів, пов'язаних співвідношеннями (теореми типу Стоуна, С. Надя – Хілле та ін.).

Інший цикл досліджень, що стосуються загальної теорії операторів, складає спектральна теорія сингулярно збурених операторів, коли збурення не є оператором у вихідному просторі (наприклад, збурення потенціалом, що є δ-функцією). Подібна ситуація постійно виникає, зокрема, у квантовій теорії поля, при цьому, як правило, збурений вираз можна розглядати як білінійний функціонал, що не допускає замикання, тобто містить сингулярну компоненту. В. Д. Кошманенко розвинув (1974 – 1984 рр.) загальну теорію розсіяння в термінах напівлінійних функціоналів. У 1979 р. він увів поняття сингулярної квадратичної форми, вивчив властивості таких форм у шкалі гільбертових просторів, установив зв'язок між сингулярними формами і самоспряженими розширеннями ермітових операторів. Метод квадратичних форм дослідження сингулярно збурених операторів був узагальнений Л. П. Нижником (2002 р.) на випадок сильних сингулярностей як метод білінійних форм. Інший підхід до вивчення сингулярно збурених операторів, запропонований у 1961 р. Ф. А. Березіним і Л. Д. Фаддєєвим (Росія), базується на теорії самоспряжених розширень симетричних операторів. Цей підхід набув подальшого розвитку та застосувань у працях А. Н. Кочубея (1978 – 1984 рр.), В. Д. Кошманенка у співавторстві з М. Волленбергом, Х. Найдхардом, Й. Ф. Браше, С. Альбеверіо (Німеччина), В. Карвовським (Польща) та С. Ота (Японія) (1995 – 1998 рр.), В. А. Михайлеця (1992 – 1999 рр.), С. О. Кужеля (2003 р.), Л. П. Нижника (1995 – 2003 рр.) (деякі спільні з С. Альбеверіо). Можливість регуляризації та апроксимації сингулярно збурених операторів і форм була досліджена В. Д. Кошманенком (спільно з В. Карвовським) та Л. П. Нижником. В. Д. Кошманенко (2001 – 2003 рр.) разом з О. Ю. Константіновим вивчав також структуру спектра операторів із сингулярним збуренням високого порядку, а разом з Г. М. Торбіним — фрактальні властивості спектральної міри. В 2002 р. ним і М. Є. Дудкіним розглянуто варіант оберненої задачі на власні значення. До цього циклу досліджень можна віднести й запропоновану в 2002 р. Ю. М. Березанським і Й. Браше (Швеція) теорію узагальнених самоспряжених операторів, що діють з простору основних функцій в узагальнені.

У 1994 р. С. О. Кужель розпочав поширення схеми розсіяння Лакса – Філліпса на еволюції, що описуються диференціально-операторними рівняннями другого порядку гіперболічного типу. Протягом 1994 – 2002 рр. ним знайдено умови на оператор у правій частині рівняння, необхідні й достатні для того, щоб відповідна група розв'язків задачі Коші мала вхідний і вихідний простори, одержано зображення матриці розсіяння, описано всі незбурені еволюції у схемі Лакса – Філліпса, розв'язано обернену задачу розсіяння, досліджено залежність матриці розсіяння від вибору вільної еволюції і в рамках цієї схеми розглянуто нові класи нелокальних збурень радіального хвильового рівняння та рівняння Шредінгера.

Чимало задач аналізу й теорії диференціальних рівнянь також не завжди можна подати в операторній формі, проте їх можна записати, і це навіть більш природно, за допомогою лінійного (бінарного) відношення — узагальнення лінійного оператора. Розвиткові теорії таких відношень приділено багато уваги як у нашій країні, так і за її межами. М. Л. Горбачуком, А. Н. Кочубеєм та М. О. Рибак описано всі максимальні дисипативні лінійні відношення в гільбертовому просторі, частинним випадком яких є самоспряжені бінарні відношення, охарактеризовані раніше Ф. С. Рофе-Бекетовим (Харків). Цей опис став відправним моментом при розробці в роботах Ф. С. Рофе-Бекетова і М. Л. Горбачука (1968 – 1972 рр.) методу описання в термінах граничних умов максимальних дисипативних, зокрема, самоспряжених розширень певного класу симетричних операторів у гільбертовому просторі. Їхні результати послужили ідейним підґрунтям для побудови А. Н. Кочубеєм (1975 – 1980 рр.) теорії розширень у термінах абстрактних граничних умов для довільного симетричного оператора. Він увів поняття простору граничних значень (п. г. з.), позитивного п. г. з., відповідний варіант характеристичної функції, за допомогою яких описав різноманітні класи розширень і дослідив їх спектральні властивості. Одночасно деякі із зазначених результатів одержав В. М. Брук (Саратов). Згодом (1982 – 1998 рр.) теорія розширень у термінах п. г. з. була застосована А. Н. Кочубеєм і В. А. Михайлецем до некласичних диференціальних операторів (точкові взаємодії, сингулярні потенціали тощо). Ця теорія знайшла свій подальший розвиток у дослідженнях В. О. Деркача і М. М. Маламуда (Донецьк), О. Г. Сторожа (Львів), Ю. М. Арлінського (Луганськ), С. О. Кужеля. Г. Оруджева, М. Байрамогли і З. Ісмайлова (Баку), О. В. Мартиненко та ін. Ю. М. Митником (1992 р.) знайдено зв'язок між різними видами бінарних відношень і відповідними класами динамічних систем.

3. Несамоспряжені оператори в гільбертовому просторі. Багато задач теорії диференціальних рівнянь і механіки приводять до необхідності дослідження кратної повноти системи кореневих векторів операторнозначних функцій $L(\lambda)$, аналітично залежних від спектрального параметра λ. Перші основоположні результати в цьому напрямку належать М. В. Келдишу (Москва, 1951 р.); вони стосувались випадку, коли $L(\lambda)$ — операторнозначний поліном від λ (так званий пучок операторів Келдиша), і дали змогу обґрунтувати використання методу відокремлення змінних при розв'язанні задачі Коші для диференціально-операторних рівнянь. Свого подальшого розвитку ці результати набули в роботах М. Г. Крейна та його учнів, котрі достеменно вивчили питання повноти та базисності частини кореневих векторів квадратичного пучка самоспряжених операторів, що уможливило застосування методу відокремлення змінних і при розв'язуванні задачі на півосі з граничною умовою в нулі для рівняння другого порядку з самоспряженими операторними коефіцієнтами.

Дослідження М. В. Келдиша і М. Г. Крейна продовжив у 1971 – 1992 рр. Г. В. Радзієвський (учень А. Г. Костюченка (Москва); в інституті працює з 1974 р.), котрий увів поняття похідного ланцюжка — об'єкта, що відповідає в певному розумінні граничним значенням елементарних розв'язків операторно-диференціальних рівнянь. Для широкого класу похідних ланцюжків ним доведено теореми про повноту, базисність і мінімальність у шкалах гільбертових просторів, завдяки яким стало можливим застосування методу відокремлення змінних при розв'язанні широкого класу граничних задач як на скінченному відрізку, так і на півосі для рівнянь будь-якого порядку з несамоспряженими операторними коефіцієнтами. Г. В. Радзієвський довів n-кратну повноту в розумінні Келдиша з точністю до скінченновимірного підпростору простору кореневих векторів пучка операторів Келдиша, збуреного аналітичною зовні круга оператор-функцією; ним також знайдено оцінки резольвенти і асимптотику спектра операторів і аналітичних оператор-функцій зі складним входженням спектрального параметра. Для поліноміальних пучків операторів він уперше розглянув питання еквівалентності між похідними ланцюжками, що відповідають задачі Діріхле на скінченному відрізку або на півосі, і похідними ланцюжками, пов'язаними із задачею Коші, а це дозволило істотно спростити дослідження задачі Діріхле. Ним також знайдено ознаки лінійної незалежності похідних ланцюжків, асоційованих з різними граничними задачами, і ці результати застосовано до дослідження єдиності розв'язків крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь.

В інституті вивчались і деякі інші питання, що торкаються загальних несамоспряжених операторів у гільбертовому просторі, а саме: побудова операційного числення для класів неаналітичних функцій від несамоспряжених операторів зі спектром, розташованим на дійсній осі, і певною поведінкою резольвенти — ці класи визначаються порядком росту останньої при наближенні до спектра (Ю. М. Березанський, В. І. Горбачук, Л. Б. Федорова); повнота та базисність системи власних і приєднаних векторів різноманітних несамоспряжених задач як для диференціальних рівнянь еліптичного типу, так і для диференціально-операторних рівнянь (В. А. Михайлець, М. Л. Горбачук). Можливість аналітичного продовження через неперервний спектр по спектральному параметру резольвент як абстрактних, так і деяких диференціальних операторів була досліджена Л. П. Нижником і Л. І. Дюженковою.

У 2001 р. М. Л. Горбачук знайшов критерії повноти системи кореневих векторів замкненого оператора з мероморфною резольвентою у банаховому просторі в термінах її поведінки на нескінченності, а також у термінах розв'язності в класі цілих вектор-функцій експоненціального типу задачі Коші для еволюційного рівняння, побудованого за заданим оператором. Г. В. Радзієвський дослідив різні методи підсумовування розкладів за кореневими векторами як абстрактних лінійних операторів у банаховому просторі, так і операторів, породжених крайовими задачами для функціонально-диференціальних виразів, та швидкість їх збіжності. У випадку абстрактних операторів оцінки даються в термінах K-функціоналів, побудованих за цими операторами, а для крайових задач — у термінах модулів гладкості, пов'язаних з крайовими умовами. В. А. Михайлець (1980 – 1981 рр.) установив зв'язок між асимптотичними розподілами власних значень несамоспряженого оператора, заданого квадратичною формою, і самоспряженого оператора, породженого її дійсною частиною.

4. Алгебраїчні питання функціонального аналізу. Розвиток цього напряму в інституті почався у 1934 – 1935 рр. з робіт М. П. Кравчука, присвячених зведенню до канонічного вигляду системи переставних матриць. Істотні результати одержано в гармонічному аналізі на групах. Так, у 1941 р. М. Г. Крейн довів теорему Планшереля для комутативної локально компактної групи, а в 1940 – 1950 рр. дослідив додатно визначені ядра, задані на групі або на многовиді, де діє група, і дав їх інтегральні зображення через елементарні ядра. В 1949 р. він вивчив двоїстий об'єкт до компактної некомутативної групи (в комутативному випадку цей об'єкт перетворюється на групу характерів). В. М. Глушков, котрий працював в інституті в 1956 – 1957 рр., розглянув неперервні групи в більш алгебраїчному аспекті і одержав низку важливих результатів, пов'язаних із п'ятою проблемою Гільберта, щодо структури некомутативних локально компактних груп.

До цих питань примикає побудова Ю. М. Березанським і С. Г. Крейном в 1950 – 1957 рр. загальної теорії комутативних гіперкомплексних систем з локально компактним базисом, які узагальнюють поняття групового кільця групи. На такі системи їм вдалося перенести чимало положень гармонічного аналізу. Підкреслимо, що теорія цих систем передувала створенню теорії гіпергруп, котра по суті є її узагальненням і активно розвивається на Заході починаючи з 70-х років минулого століття. Останнім часом Ю. М. Березанський разом з О. О. Калюжним і Л. Й. Вайнерманом повернувся до цієї тематики у зв'язку з поновленням інтересу до подібних побудов, особливо за кордоном. Для некомутативних гіперкомплексних систем ними одержано ряд фактів гармонічного аналізу і теорії зображень. Для деяких їх класів побудовано елементи теорії Лі (О. О. Калюжний, Г. Б. Подколзін); результати застосовано до інтегрування нелінійних рівнянь (Г. Б. Подколзін). Наведено нові приклади гіперкомплексних систем із компактним та дискретним базисом, пов'язані з q-поліномами Якобі (Л. Й. Вайнерман, Ю. А. Чаповський, І. Вайс (Німеччина)). Для цього на компактні квантові групи було перенесено конструкцію подвійних класів суміжності. В 1986 р. В. В. Любашенко (учень Ю. Л. Далецького) розглянув узагальнення многовидів, пов'язані з інволютивними розв'язками рівняння Янга – Бакстера, та інтегрування на таких многовидах. Він також побудував зображення типу Баргмана – Фока алгебри функцій на загальній лінійній квантовій групі у просторі цілих функцій, заданих на векторному просторі. В інституті вивчались й інші питання, які мають відношення до цієї теорії: побудовано некомутативний гармонічний аналіз на алгебрах Г. І. Каца (на кільцевих групах) (В. Г. Палюткін), введених ним у процесі розвитку згаданих вище досліджень М. Г. Крейна двоїстих об'єктів як природне узагальнення локально компактних груп; розглянуто аналоги алгебр Г. І. Каца для гіперкомплексних систем (Л. Й. Вайнерман, О. О. Калюжний).

Зазначені дослідження тісно пов'язані з загальною теорією топологічних, зокрема нормованих, алгебр. У зв'язку з цим не можна не відмітити результати Г. Є. Шилова, котрий у 1953 р. розв'язав одну з проблем теорії нормованих алгебр першорядного значення — довів, що алгебра з незв'язною множиною максимальних ідеалів розкладається в пряму суму ідеалів. У 1951 – 1952 рр. він накреслив також загальну конструкцію для побудови важливого класу однорідних алгебр функцій на комутативній групі з примарних алгебр та детально дослідив деякі конкретні групи.

Питання спектральної теорії сімей необмежених операторів, які не комутують, а пов'язані певними нелійовими переставними співвідношеннями (наприклад, антикомутують, утворюють зображення твірних $*$-алгебр тощо), були розглянуті Ю. С. Самойленком (1977 – 1984 рр.). У деяких випадках йому вдалося описати незвідні сім'ї та одержати аналоги спектральних зображень. Для сімей, пов'язаних співвідношеннями, теорія зображень яких зводиться до розв'язання динамічних систем, Ю. М. Березанський, В. Л. Островський, Ю. С. Самойленко в 1986 р. побудували комутативні моделі; випадки моделей, що дають аналоги спектральних розкладів, розглянули Е. Ю. Вайслеб і Ю. С. Самойленко. На основі одержаних результатів було вивчено клас операторних співвідношень, асоційованих із динамічними системами, зокрема, встановлено взаємозв'язок між незвідними зображеннями співвідношень та орбітами відповідних динамічних систем в одновимірному (Е. Ю. Вайслеб, В. Л. Островський, Ю. С. Самойленко) та багатовимірному (В. Л. Островський, Л. Б. Туровська) випадках, досліджено структуру обвідної C^*-алгебри (С. В. Попович, Т. Ю. Майстренко) і зв'язок розглядуваного класу співвідношень із центрованими операторами (В. Л. Островський). Результати поширено на випадок загальних напівлійових співвідношень між операторами (Ю. М. Беспалов, Л. Б. Туровська, В. С. Шульман (Вологда), Ю. С. Самойленко).

У 1988 р. для квадратичних $*$-алгебр з двома твірними В. Л. Островський і Ю. С. Самойленко дали повну класифікацію 16-ти типів і 4-х серій алгебр, що залежать від дійсного параметра, та їх зображення, взагалі кажучи, необмеженими операторами. Вивчались також області Гордінга для унітарних зображень нескінченновимірних груп (О. В, Косяк, В. Л. Островський, Ю. С. Самойленко), квазіінваріантні міри на нескінченновимірних групах (О. В. Косяк, Ю. С. Самойленко, В. Л. Островський).

У роботах О. В. Косяка 1990 – 2003 рр. запропоновано досить загальний підхід до побудови незвідних унітарних зображень нескінченновимірних груп. Сформульовано принцип перевірки незвідності зображень, побудованих за квазіінваріантною відносно дії відповідної групи мірою на нескінченновимірному однорідному просторі, в термінах властивостей міри. Це дало змогу побудувати аналоги регулярних, квазірегулярних і більш загальних зображень нескінченновимірних груп та довести їх незвідність для різноманітних груп операторів, дифеоморфізмів відрізка, кола та центрального розширення групи дифеоморфізмів кола. У випадку нескінченновимірної борельової групи незвідність відповідного квазірегулярного зображення була доведена спільно з С. Альбеверіо (Німеччина).

Для $*$-алгебр введено поняття мажорування, яке дозволяє оцінювати складність задачі описання їх $*$-зображень, і на його основі — поняття $*$-дикості (С. А. Кругляк, Ю. С. Самойленко). Встановлено дикість важливих класів і конкретних $*$-алгебр (С. А. Кругляк, Ю. С. Самойленко, О. Ю. Пирятинська, Ю. М. Беспалов, О. О. Павленко).

В середині 90-х років 20-го ст. розпочалось дослідження $*$-алгебр Віка та їх зображень. Ці алгебри є багатовимірними деформаціями класичних канонічних співвідношень квантової механіки. Уперше вони були розглянуті в роботах П. Е. Т. Йоргенсена (США), Л. М. Шмітта (Японія) та Р. Ф. Вернера (Німеччина) в 1995 р. В інституті такі алгебри вивчаються з 1997 р. В результаті описано однорідні кубічні ідеали Віка для алгебр з косовим оператором коефіцієнтів (Д. П. Проскурін), побудовано новий клас деформацій канонічних комутаційних співвідношень, описано незвідні зображення алгебр цього класу обмеженими та необмеженими операторами (В. Л. Островський, Д. П. Проскурін, Ю. С. Самойленко). Одним із важливих досягнень в загальній теорії алгебр Віка є опис Д. П. Проскуріним, Ю. С. Самойленком та П. Е. Т. Йоргенсеном ядра фокового скалярного добутку для алгебр з косовим оператором коефіцієнтів, який підтвердив правильність гіпотези про те, що це ядро як $*$-ідеал породжується максимальним квадратичним ідеалом Віка.

Значну увагу також було приділено розглянутим раніше деформаціям CCR, таким, як скручені комутаційні й антикомутаційні співвідношення В. Пуша і С. Л. Вороновича (Польща), а також комутаційним співвідношенням для узагальнених куонів. Серед основних результатів відзначимо точність зображення

Фока як для $*$-алгебр, так і для C^*-алгебр, породжених цими співвідношеннями (З. А. Каблучко, Д. П. Проскурін, Ю. С. Самойленко), і незалежність класу ізоморфізму C^*-алгебр, породжених скрученими канонічними комутаційними співвідношеннями, від параметра деформації (Д. П. Проскурін, Ю. С. Самойленко).

Ще один напрям досліджень стосується вивчення алгебр Кунца та їх зображень. Для зображення таких алгебр побудовано комутативні моделі і за їх допомогою — явні формули для операторів зображення, породжуючого фактор типу III (В. Л. Островський спільно з У. Браттелі (Норвегія) та П. Е. Т. Йоргенсеном); доведено, що C^*-алгебра, породжена парою q-комутуючих ізометрій, ізоморфна розширенню алгебри Кунца за рахунок алгебри компактних операторів, тобто алгебрі Кунца – Тьопліца (П. Е. Т. Йоргенсен, Д. П. Проскурін, Ю. С. Самойленко, 2003 р.).

У 1997 р. було також розроблено техніку перевірки існування поліноміальних тотожностей в алгебрі (В. І. Рабанович, Ю. С. Самойленко). За допомогою методів теорії зображень, для деяких множин алгебр, породжених ідемпотентами і проекторами, було з'ясовано (1997 – 2003 рр.), в яких алгебрах, що входять у задану множину, є поліноміальні тотожності, а в яких їх немає (Н. Д. Попова, С. В. Попович, В. І. Рабанович, О. В. Стрілець).

У роботах В. І. Рабановича 1997 – 1999 рр. розглянуто питання про мінімальну кількість твірних операторів, що породжують матричні банахові алгебри і C^*-алгебри. Результати стосуються одного або двох генераторів.

Із 1999 р. інтенсивно вивчаються $*$-алгебри, породжені скінченною кількістю проекторів, лінійна комбінація котрих є кратною одиниці. Для алгебр такого типу описано множини параметрів, при яких вони мають $*$-зображення, знайдено умови наявності поліноміальних тотожностей, досліджено структуру $*$-зображень (Ю. С. Самойленко, С. А. Кругляк, В. Л. Островський, В. І. Рабанович, О. В. Стрілець, А. С. Мелліт, М. О. Власенко, С. В. Попович). Ці дослідження тісно пов'язані з відомою проблемою про спектр суми двох ермітових матриць, перші вагомі результати в розв'язанні якої (початок 20-го ст.) належать Г. Вейлю.

5. Спектральна теорія диференціальних операторів. У 1946 – 1950 рр. М. Г. Крейн методом напрямних функціоналів одержав загальні теореми про розклад за власними функціями самоспряжених звичайних диференціальних операторів, а в 1956 – 1965 рр. Ю. М. Березанський за допомогою розвинутої ним теорії розкладів довів подібні теореми у випадку частинних похідних, причому для еліптичних операторів — аж до межі області.

М. Г. Крейн на основі побудованої ним теорії розширень операторів дав (1947 р.) повний опис у термінах граничних умов усіх самоспряжених розширень мінімального оператора, породженого звичайним диференціальним виразом, і вивчив структуру їх спектра. В 1950 р. він переніс на оператори Штурма – Ліувілля на півосі результати Неванлінни стосовно опису спектральних функцій у теорії якобійових матриць та проблемі моментів, застосувавши при цьому загальні ідеї теорії цілих операторів.

Ю. М. Березанський, починаючи з 1965 р., розробляв прийоми доведення самоспряженості операторів на основі вивчення відповідних еволюційних рівнянь. За допомогою цих прийомів йому вдалося одержати низку критеріїв самоспряженості для еліптичних операторів. Згодом він разом зі своїми учнями Г. Ф. Усом, Ю. Г. Кондратьєвим і В. Г. Самойленком розвинув спектральну теорію еліптичних операторів нескінченної кількості змінних, моделюючих гамільтоніани квантової теорії поля, і поширив на них багато із згаданих вище результатів. До цього ж напряму відносяться й дослідження Л. П. Нижника спектральних властивостей нееліптичних операторів з частинними похідними (самоспряженість, характер спектра, вигляд збурень, зберігаючих граничний спектр загальних диференціальних операторів зі сталими коефіцієнтами, тощо), в тому числі й проведений спільно з Є. І. Амеровою детальний спектральний аналіз двовимірного нестаціонарного оператора Дірака, та оцінки Ю. М. Березанського, Г. І. Каца, А. Г. Костюченка і Ю. Б. Орочка росту на нескінченності власних функцій оператора Шредінгера.

Л. П. Нижник запропонував ефективний алгоритм для підрахунку кількості від'ємних власних значень одновимірного оператора Шредінгера з точковими взаємодіями, зокрема, в термінах ланцюгових дробів, побудованих за інтенсивностями та відстанями між точковими взаємодіями, знайшов необхідні й достатні умови, за яких від'ємні власні значення або не існують, або їх кількість збігається з кількістю взаємодій. Він також дослідив спектральні властивості оператора Шредінгера з δ'-взаємодією на канторовій множині. У випадку від'ємної інтенсивності взаємодії такий оператор має послідовність від'ємних власних значень, що прямує до нескінченності. В 2001 р. В. Д. Кошманенко (спільно з С. Альбеверіо) продовжив розвиток започаткованого Х. Трібелем (1997 р.) підходу до спектрального аналізу оператора Шредінгера з фрактальним потенціалом, а також працював (разом з В. Карвовським) над проблемою існування та розподілу від'ємних власних значень сингулярно збуреного оператора Лапласа.

З 1968 р. в інституті розвивається спектральна теорія граничних задач для диференціальних рівнянь, коефіцієнтами яких є необмежені оператори в гільбертовому просторі. Наявність необмежених операторів у коефіцієнтах дозволяє ввести до розгляду найрізноманітніші класи рівнянь з частинними похідними і поглянути з однієї й тієї ж точки зору як на звичайні диференціальні оператори, так і на оператори з частинними похідними.

У 1970 р. М. Л. Горбачук описав у термінах граничних умов усі самоспряжені розширення мінімального оператора, породженого виразом Штурма – Ліувілля з потенціалом, значеннями якого є самоспряжені оператори. Разом з В. І. Горбачук він у 1968 – 1974 рр. дослідив структуру спектра граничних задач, що відповідають цим розширенням, а в гіперболічному випадку одержав розклад за власними функціями, подібний розкладові Г. Вейля для звичайного рівняння Штурма – Ліувілля. М. Л. Горбачуком та його учнями А. Н. Кочубеєм, В. А. Михайлецем і Л. Й. Вайнерманом вивчено й інші типи граничних задач (дисипативні, секторіальні, розв'язні тощо). Резольвентній порівнянності різних граничних задач на півосі, яка має безпосереднє відношення до задач розсіяння, присвячено роботи М. Л. Горбачука і В. О. Кутового. Знаходженням критеріїв самоспряженості мінімального оператора займались Ю. Б. Орочко, М. Л. Горбачук, Л. Й. Вайнерман та А. Н. Кочубей.

В інституті (80 – 90-і рр. 20-го ст.) розв'язано також ряд інших питань спектральної теорії диференціальних операторів. Так, В. І. Горбачук і В. А. Михайлецем розглянуто самоспряжені оператори, породжені загальним еліптичним виразом парного порядку в обмеженій області та довільними граничними умовами. Досліджено зв'язок між цими умовами і спектром оператора. Знайдено критерії дискретності спектра і досліджено його асимптотику. В. А. Михайлець дав точну оцінку залишкового члена типу Г. Вейля – Р. Сілі в асимптотичній формулі для функції розподілу власних значень. У випадку операторів, породжених рівнянням Лапласа і умовами Діріхле та Неймана в деяких областях з негладкою межею, В. А. Михайлецем (1978 р.) і А. Ф. Шестопалом (1991 р.) для цієї функції було знайдено двочленну асимптотику (гіпотеза Г. Вейля, 1913 р.). Сюди ж відносяться і роботи В. О. Ліскевича 1987 – 1989 рр. зі спектральної теорії для еліптичних рівнянь з нерегулярними коефіцієнтами. А. Н. Кочубей і В. А. Михайлець розвинули спектральну теорію загальних однорідних граничних задач для двочленних рівнянь парного порядку з необмеженими операторними коефіцієнтами. Поряд з двоточковими вивчались і багатоточкові задачі. В 1991 – 1992 рр. Ю. М. Березанський і О. Ю. Константінов розвинули теорію багатоспектральних задач для загальних і диференціальних операторів і довели відповідну теорему про розклад за власними функціями.

Граничні задачі для еліптичного виразу парного порядку зі спектральним параметром, що лінійно входить у граничні умови, розглядались В. В. Барковським, Л. П. Нижником, Л. А. Тараборкіним та ін. (самоспряженість, гладкість розв'язків, область визначення дробового степеня оператора, асоційованого із задачею, тощо). Це дало змогу на основі операторного підходу дослідити лінійні й нелінійні задачі з мішаними еволюційними граничними умовами та умовами спряження. В. В. Барковським також знайдено умови самоспряженості таких операторів, порушено питання про розклад за їхніми власними функціями, досліджено відповідну задачу розсіяння. Для диференціальних рівнянь другого порядку в гільбертовому просторі з необмеженими операторними коефіцієнтами подібні задачі розглядали В. І. Горбачук, М. О. Рибак і Л. О. Олійник.

У 1988 – 1989 pp. Г. В. Радзієвський дослідив спектральні властивості деяких функціонально-операторних рівнянь, а саме, асимптотику за спектральним параметром власних значень граничних задач для таких рівнянь, швидкість збіжності розкладів за власними функціями, а також (разом з А. М. Гомілком) рівнозбіжність цих розкладів із класичними рядами Фур'є. Для випадку, коли спектральний параметр входить до граничних умов досить загальним чином, В. Г. Палюткін розвинув аналітичний підхід до отримання асимптотичних формул, що характеризують розподіл власних значень граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь на півосі.

В. А. Михайлецем (1992 – 1993 pp.) за допомогою теоретико-операторних засобів побудовано спектральну теорію оператора Шредінгера на прямій із загальними точковими взаємодіями на довільній нескінченній дискретній множині. Знайдено критерії самоспряженості такого оператора, досліджено якісні та кількісні властивості спектра. Зокрема, спільно з А. В. Соболєвим (Великобританія) доведено абсолютну неперервність спектра самоспряженого періодичного оператора у невиродженому випадку.

В 1991 – 2002 pp. А. Н. Кочубей опублікував серію робіт, присвячених псевдодиференціальним операторам над полем p-адичних чисел і загальними локальними полями, в яких досліджувались спектральні властивості операторів типу Шредінгера над локальним полем та операторів дробового диференціювання на обмеженій відкритій множині локального поля (задача спектральної геометрії).

Тут ми торкнулися лише прямої задачі спектрального аналізу, обернена задача розглядатиметься в п. 7.

6. Проблема моментів, додатно визначені функції і спектральна теорія різницевих рівнянь. Якобійові поля. Класична проблема моментів — одна з тих задач, розв'язування якої привело до появи низки нових напрямів у функціональному аналізі. Слід відзначити особливий вплив на їх виникнення і розвиток публікацій М. Г. Крейна, Н. І. Ахієзера (Харків) і М. П. Кравчука. Поряд із згаданими в п. 2 відмітимо наступні дослідження, пов'язані з цією проблемою.

В 1940 – 1951 pp. М. Г. Крейн довів теорему про можливість продовження додатно визначеної функції зі скінченного інтервалу на всю вісь, описав такі продовження і побудував загальну теорію інтегральних зображень додатно визначених ядер через власні функції звичайних диференціальних операторів; частинними наслідками цієї теореми є відомі теореми С. Бохнера про інтегральне зображення додатно визначеної функції, С. Н. Бернштейна про зображення експоненціально опуклої функції та ін. Аналогічні питання для ермітово-індефінітних ядер зі скінченною кількістю від'ємних квадратів розглянула В. І. Горбачук. Ю. М. Березанський у 1956 – 1965 pp. розвинув теорію зображень додатно визначених ядер, залежних від багатьох змінних, через власні функції рівнянь з частинними похідними і різницями (сюди також відносяться результати М. М. Чауса 1963 – 1965 pp. стосовно зв'язку цієї теорії з класами єдиності розв'язку задачі Коші), а в 1967 – 1972 pp. поширив її (частково зі своїми учнями С. Н. Шифріним та І. М. Галі) і на випадок нескінченної кількості змінних (узагальнивши, зокрема, теорему Мінлоса – Сазонова на шар гільбертового простору). Близькі результати, що стосуються зображень позитивних функціоналів у топологічних алгебрах певного класу, одержали в 1986 – 1988 рр. Ю. М. Березанський, В. С. Яковлєв та Г.Ласснер (Німеччина). З цією тематикою пов'язані й нещодавні результати Ю. М. Березанського і О. Б. Чернобай щодо спектральних зображень ядер Тьопліца.

Відомо, що проблему моментів можна інтерпретувати як теорію якобійових матриць, тобто як спектральну теорію різницевих рівнянь на півосі. У зв'язку з цим М. Г. Крейн у 1949 р. побудував подібну теорію для звичайних різницевих рівнянь високого порядку, а Ю. М. Березанський (1953 – 1955 рр.) — для рівнянь з частинними різницями. У подальшому Ю. М. Березанським та його учнями, зокрема В. Г. Тарнопольським, Ю. С. Самойленком і М. Л. Горбачуком, було розглянуто різні операторні узагальнення цих і близьких теорій: різницеві рівняння з операторними коефіцієнтами, нескінченновимірна і некомутативна проблеми моментів, теорія операторнозначних додатно визначених ядер. Ю. М. Березанський, Ю. Г. Кондратьєв, Є. В. Литвинов і Т. Куна (Німеччина) дослідили (1999 – 2003 рр.) узагальнену проблему моментів, пов'язану з кореляційними мірами статистичної механіки.

У 1991 р. Ю. М. Березанський та його учні Є. В. Литвинов, В. О. Лівінський і Д. А. Мержеєвський розпочали інтенсивне вивчення якобійових полів — комутуючих сімей самоспряжених операторів, що діють у симетричному просторі Фока і мають тридіагональну (якобійову) структуру. Прикладами таких полів є класичне вільне поле операторів, пуассонове поле і подібні до них об'єкти, що часто використовуються в математичній фізиці й теорії випадкових процесів. Зокрема, ними побудовано та вивчено перетворення Фур'є за сумісними узагальненими векторами якобійового поля, що переводить фокові вектори у функції нескінченновимірного аргументу, яким є узагальнена функція, наведено застосування до одержання хаотичного зображення в теорії випадкових процесів, досліджено нескінченновимірну проблему моментів тощо. Відмітимо, що в класичному випадку вільного поля перетворенням Фур'є є відомий ізоморфізм Вінера – Іто – Сігала.

До зазначених вище прилягають також дослідження збіжності сингулярних інтегралів методами функціонального аналізу С. Г. Крейна, Б. І. Коренблюма і Б. Я. Левіна (Харків) із співпрацівниками; їм вдалося одержати завершені результати.

7. Обернені задачі. Під такими задачами розуміють знаходження рівнянь (їх коефіцієнтів) за деякою інформацією про їх розв'язки. Розрізняють обернені задачі в спектральній постановці, коли початковою інформацією є спектральна функція, сукупність спектрів рівняння з різними граничними умовами (обернена задача за двома спектрами для рівняння Штурма – Ліувілля) або інша спектральна інформація, і обернені задачі розсіяння — коли початковою інформацією є дані розсіяння, що визначаються асимптотикою розв'язків на нескінченності.

Добре відомими вже стали результати стосовно обернених задач у спектральній постановці для рівняння Штурма – Ліувілля і більш загального рівняння струни, які знайшли застосування у фізиці. Різні варіанти таких задач були розв'язані різними методами в роботах В. А. Марченка (Харків), М. Г. Крейна, І. М. Гельфанда і Б. М. Левітана (Москва) (1951 – 1960 рр.). При цьому в підході М. Г. Крейна використовувався апарат, розвинутий ним при розв'язуванні проблеми моментів, задачі продовження додатно визначених функцій та ін. Узагальненням обернених задач для звичайних диференціальних рівнянь високого порядку присвячено дослідження З. Л. Лейбензона 1966 р.

Першим обернені задачі для рівнянь з частинними похідними й частинними різницями розглянув Ю. М. Березанський (1953 – 1958 рр.). У випадку частинних різниць він дав повний розв'язок задачі в спектральній постановці, а згодом його учні почали досліджувати також обернені задачі розсіяння. Для рівнянь з частинними похідними (для стаціонарного дво- та тривимірного рівняння Шредінгера) ним було вказано ряд постановок оберненої задачі. Показано, що потенціал однозначно відновлюється заданням спектральної функції на як завгодно малій частині межі. Аналогічний результат має місце і в усьому просторі; в цьому випадку доведено також еквівалентність деяких постановок обернених задач, включаючи обернені задачі розсіяння.

У 1960 р. Л. П. Нижник приступив до розв'язування прямих та обернених задач нестаціонарного розсіяння. Він ретельно дослідив такі обернені задачі для збуреного рівняння струни на півосі (1971 р.) і нестаціонарної системи рівнянь Дірака (1970 – 1973 рр.) і довів, що коефіцієнти рівнянь однозначно відновлюються за оператором розсіяння; при цьому було вказано ефективну процедуру такого відновлення і дано повний опис операторів розсіяння. Згодом ним і його учнями Фам Лой Ву, В. Г. Тарасовим, Н. Ш. Іскендеровим та ін. цю тематику було розвинуто в таких напрямках: значно розширено клас вивчених багатовимірних обернених задач розсіяння (хвильове рівняння на всій осі і в тривимірному просторі, система двошвидкісних хвильових рівнянь, рівняння переносу, скінченна і континуальна системи гіперболічних рівнянь, гіперболічна система трьох рівнянь першого порядку на півосі, рівняння з частинними різницями), при цьому доведено єдиність розв'язку і розроблено ефективний алгоритм для його знаходження; для низки задач введено та описано дані розсіяння. Усе це дозволило у випадку системи Дірака двох рівнянь з виродженими даними розсіяння одержати точні розв'язки та довести їх щільність у множині всіх розв'язків.

Пряму й обернену задачі розсіяння для рівнянь з частинними різницями дослідила М. С. Ескіна (1966 р.). Такі задачі виникають у теорії випромінювання хвиль на кристалічній ґратці. О. О. Андрощук одержав декілька теорем єдиності в обернених спектральних задачах для рівняння Штурма – Ліувілля з операторним потенціалом (1968 – 1970 рр.).

У 80-х роках 20-го ст. результати, що стосуються багатовимірних обернених задач розсіяння, були застосовані Л. П. Нижником і М. Д. Починайко до інтегрування нелінійних рівнянь. У термінах груп Лі вольтеррових операторів дано орбітну інтерпретацію гамільтоновості рівняння Деві – Стюартсона. Знайдено точні періодичні розв'язки в елементарних функціях. Методом обернених задач проведено якісне дослідження задачі Коші для нелінійних рівнянь; наведено нескінченні серії інтегралів руху; розглянуто і проінтегровано методом оберненої задачі просторово-двовимірне рівняння Кортевега – де Фріза — рівняння Нижника – Новікова – Веселова. І. Л. Нижник дано означення координат солітонів для рівняння Кортевега – де Фріза і встановлено закон притягання солітонів. Для нелінійного хвильового рівняння нею запропоновано стійку на великому часовому проміжку різницеву схему з високим порядком точності.

Л. П. Нижник, Р. В. Романенко та ін. розглянули питання умовної стійкості і регуляризації оберненої задачі розсіяння для двовимірної гіперболічної системи Дірака.

В 1985 р. Ю. М. Березанський застосував класичну обернену задачу спектрального аналізу для якобійових матриць до інтегрування нелінійних рівнянь. Ним була проінтегрована задача Коші для напівнескінченного ланцюжка Тоди завдяки тому, що вона набуває дуже простої форми, якщо за змінну взяти спектральну міру якобійової матриці, побудованої за шуканим розв'язком. Цей результат Ю. М. Березанський, М. І. Гехтман і М. Е. Шмойш поширили на широкі класи подібних рівнянь, зокрема, було вивчено неабельові ланцюжки типу Тоди, неізоспектральні задачі тощо. До цього ж кола питань примикають і результати М. В. Жернакова, який проінтегрував нескінченний ланцюжок Тоди в класі розв'язків, спадних на нескінченності за дискретною змінною.

Для диференціально-операторних рівнянь першого порядку в гільбертовому просторі обернену задачу типу розсіяння розглянули М. Л. Горбачук і В. І. Горбачук. Обернену задачу типу керування розв'язав О. А. Бутирін. С. О. Кужель узагальнив абстрактну схему розсіяння Лакса – Філліпса на випадок операторів, що діють у просторах з індефінітною метрикою типу Понтрягіна.

8. Узагальнені функції та їх застосування до задач для рівнянь з частинними похідними. Відомо, яку визначну роль у математиці останніх десятиріч відіграла теорія узагальнених функцій — розділ функціонального аналізу, що виник завдяки роботам С. Л. Соболєва (Новосибірськ) і Л. Шварца (Франція). Ученими інституту також зроблено помітний внесок у розвиток цього напряму. Згадаємо хоча б широко відомий цикл робіт 1950 – 1960 рр. Я. Б. Лопатинського (працював в інституті в 1946 – 1963 рр.), присвячених фундаментальним розв'язкам та загальній теорії граничних задач для систем еліптичних диференціальних рівнянь, якими було започатковано подальші дослідження у цій галузі, зокрема, застосування узагальнених функцій (вивчена ним структура фундаментальної матриці лягла в основу доведення того факту, що довільний узагальнений розв'язок еліптичного рівняння є звичайним і його гладкість визначається гладкістю коефіцієнтів).

У 50-х роках минулого століття Г. Є. Шилов і І. М. Гельфанд (Москва) ввели нові простори основних та узагальнених функцій і за їх допомогою побудували класи єдиності і коректності задачі Коші для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Ці класи істотно уточнив М. М. Чаус (1964 – 1984 рр.). Він також запропонував нові підходи до знаходження згаданих класів для певної категорії систем зі змінними коефіцієнтами, дослідив питання асимптотичної єдиності розв'язків і застосування до інтегральних зображень додатно визначених ядер тощо. Єдиність і асимптотична єдиність розв'язків задачі Коші для інших видів рівнянь досліджувались В. Г. Палюткіним.

На початку 80-х років М. Л. Горбачук та В. І. Горбачук охарактеризували деякі класи узагальнених періодичних функцій у термінах росту їхніх коефіцієнтів Фур'є і довели, що принцип локалізації справджується для методу Абеля – Пуассона підсумовування тригонометричних рядів у класі гіперфункцій. Невдовзі І. Г. Ізвєков розглянув інші методи підсумовування і знайшов для них простори узагальнених функцій, в яких цей принцип має місце. Про узагальнені функції нескінченної кількості змінних див. п. 9.

У теорії граничних задач для диференціальних рівнянь широко застосовуються простори з позитивною та негативною нормами. Конструкція таких просторів у конкретній ситуації (соболєвські простори) належить Ж. Лере і П. Лаксу (Франція, США, 1952 – 1957 рр.), хоча першим, хто мав безпосередню причетність до цього питання, був М. Г. Крейн, котрий ще в 1947 р. розглянув цілком неперервні оператори у просторах з двома нормами. В абстрактному вигляді простори з позитивною і негативною нормами були введені й досліджені Ю. М. Березанським і Г. І. Кацом у 1958 – 1963 рр. Одним із наслідків цього дослідження є доведений Ю. М. Березанським простий і природний варіант теореми Л. Шварца про ядро. Застосування таких просторів дало змогу також встановити низку цікавих фактів стосовно розв'язності різних граничних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Так, Ю. М. Березанський в 1959 – 1963 рр. довів слабку розв'язність і єдиність сильного розв'язку задачі Трікомі та більш загальних граничних задач для рівнянь другого порядку мішаного типу, а для довільних рівнянь зі сталими коефіцієнтами дослідив задачу Діріхле, а саме, показав, що для кожного такого рівняння існують області, в яких ця задача має слабкий розв'язок, а сильний розв'язок є єдиним; ця розв'язність є стійкою щодо малих збурень межі. Згодом Н. Г. Сорокіна довела збіг сильного й слабкого розв'язків задачі Трікомі для рівняння Чаплигіна та її фредгольмовість, а В. П. Діденко розробив деякі прийоми доведення енергетичних нерівностей у негативних нормах для подібних задач. Метод узагальненої суми операторів у шкалі гільбертових просторів був застосований

Ю. М. Березанським і В. Д. Кошманенком до побудови сингулярно збурених операторів.

Для диференціальних рівнянь еліптичного типу в банаховому просторі М. Л. Горбачуком і О. І. Кашпіровським було доведено (1983 р.) гладкість всередині інтервалу будь-якого узагальненого розв'язку. У випадку, коли коефіцієнтами диференціально-операторного рівняння є нормальні оператори в гільбертовому просторі, знайдено умови на розташування сумісного спектра коефіцієнтів, за яких усі слабкі розв'язки рівняння є аналітичними або нескінченно диференційовними вектор-функціями класу Жевре (М. Л. Горбачук, М. В. Маркін, О. Я. Шкляр (1996 – 1998 рр.)). Для абстрактних параболічних рівнянь у банаховому просторі М. Л. Горбачук і В. І. Горбачук показали (2000 р.), що будь-який слабкий розв'язок є аналітичним всередині інтервалу.

За допомогою теорії просторів з позитивною та негативною нормами В. Д. Кошманенку вдалося описати різні класи сингулярних операторів і білінійних форм у гільбертовому просторі.

В 1963 – 1966 рр. Ю. М. Березанський, С. Г. Крейн і Я. А. Ройтберг (Чернігів) дослідили розв'язки граничних задач для еліптичних рівнянь з правими частинами в рівнянні та граничних умовах, які є узагальненими функціями („теореми про ізоморфізми"). Ці результати знайшли широкі застосування і, зокрема, використані для доведення теорем про гладкість аж до границі узагальнених розв'язків еліптичних задач, при дослідженні їх функцій Гріна та спектральних функцій. У подальшому Я. А. Ройтберг і його учні-чернігівчани узагальнили їх на певний клас еліптичних систем рівнянь. Він разом із З. Г. Шефтелем (Чернігів) застосував ці й близькі до них результати до розв'язування задач типу трансмісії з розривними коефіцієнтами. Істотні доповнення зробили В. А. Михайлець та його учень О. О. Мурач, поширивши зазначені результати на відмінні від соболєвських шкали функціональних просторів. Сюди ж відносяться нещодавні результати О. Н. Комаренка.

Починаючи з 1984 р., В. І. Горбачук і М. Л. Горбачук з учнями розвивають теорію просторів гладких і узагальнених функцій (векторів), яка будується за досить загальним оператором у банаховому просторі замість оператора диференціювання у випадку простору квадратично інтегровних функцій. Серед основних її досягнень є абстрактний варіант теореми Пелі – Вінера (М. Л. Горбачук, В. І. Горбачук, А. В. Князюк, 1974 – 1985 рр.) та ознаки щільності (1990 – 2000 рр.) просторів гладких векторів у початковому банаховому просторі (узагальнення теореми Стоуна – Вейєрштрасса) (М. Л. Горбачук, В. І. Горбачук, Ю. Г. Мокроусов). Названа теорія дозволила поглянути з єдиної, операторної, точки зору на, здавалося б, зовсім різні за постановкою і методами розв'язування задачі. У 1993 – 1995 рр. М. Л. Горбачук та В. І. Горбачук запропонували загальний підхід до одержання прямих і обернених теорем теорії наближення гладких векторів банахового простору (гладкість визначається заданим замкненим оператором) цілими векторами експоненціального типу розглядуваного оператора. При цьому було задіяно досить широкий клас таких операторів. Було встановлено взаємно однозначну відповідність між степенем гладкості вектора відносно вибраного замкненого оператора і порядком прямування до нуля похибки його наближення векторами експоненціального типу. Широкий вибір вихідного простору і оператора, відносно якого розглядається гладкість його векторів, дав змогу не тільки охопити багаточисельні відомі результати теорії апроксимації функцій алгебраїчними і тригонометричними поліномами, цілими експоненціального типу та іншими елементарними функціями, але й значно доповнити й узагальнити їх. На їх основі було знайдено точні апріорні асимптотичні оцінки похибки наближення розв'язку операторного рівняння в гільбертовому просторі методами Рітца та найменших квадратів (1996 – 1997 рр.). Йдучи тим самим операторним шляхом, Г. В. Радзієвський поширив (1998 р.) зазначені прямі й обернені теореми на інші класи операторів у банаховому просторі. Прямі й обернені теореми у випадку генератора аналітичної півгрупи в гільбертовому просторі, пов'язані з поведінкою півгрупи в околі нуля, належать Я. І. Грушці (1998 – 2001 рр.). Про інші застосування див. п. 10.

Простори гладких векторів сімей необмежених операторів у гільбертовому просторі вивчалися в роботах Ю. С. Самойленка та О. В. Стрільця.

Інтегральним рівнянням у класі узагальнених функцій присвячено декілька робіт О. С. Парасюка (1957 р.).

9. Аналіз функцій нескінченної кількості змінних. Інтерес до цього розділу математики значно зріс протягом останніх двох десятиріч і стимулюється такими суміжними галузями, як сучасна математична фізика (квантова теорія поля, статистична фізика), теорія випадкових процесів, теорія зображень нескінченновимірних груп. Дослідження з нескінченновимірного аналізу в Інституті математики почалися з робіт 1967 – 1973 рр. Ю. М. Березанського та його учнів С. Н. Шифріна, І. М. Галі, Г. Ф. Уса, С. В. Тищенка, пов'язаних, з одного боку, зі спектральною теорією нескінченних сімей комутуючих самоспряжених операторів, а з іншого — з побудовою нескінченних тензорних добутків гільбертових просторів та операторів у них з метою їх застосування до цієї спектральної теорії. В 1973 р. Ю. М. Березанський і Ю. С. Самойленко розробили конструкцію нескінченного тензорного добутку ядерних просторів і, базуючись на ній, уперше визначили ядерні простори основних та узагальнених функцій нескінченновимірного аргументу. Ця діяльність була продовжена Ю. М. Березанським, Ю. Г. Кондратьєвим та Ю. С. Самойленком. Було введено й вивчено важливі класи основних і узагальнених функцій нескінченної кількості змінних, знайдено їх застосування та ін.

З іншого боку, приблизно в той самий час (1975 р.) Т. Хіда (Японія) запропонував дещо відмінний підхід до побудови теорії узагальнених функцій нескінченної кількості змінних: спочатку будувалось оснащення простору Фока, а потім за допомогою ізоморфізму Вінера – Іто – Сігала це оснащення перетворювалось на оснащення простору функцій нескінченної кількості змінних (так званий аналіз білого шуму). Об'єднання цих двох підходів здійснювалось, починаючи з 70-х років 20-го ст., Ю. М. Березанським, Ю. Г. Кондратьєвим, Ю. Л. Далецьким, Г. Ф. Усом, М. О. Качановським, В. А. Теском та за кордоном. В результаті було побудовано широкі й зручні для застосувань узагальнення теорії білого шуму: наприклад, замість ортогональної системи базисних функцій фігурувала біортогональна система, замість звичайного зсуву використовувався узагальнений або в теорії зсуву не було зовсім та ін. Зокрема, Ю. М. Березанський та Є. В. Литвинов розробили спектральний підхід до побудови такого аналізу, коли роль ізоморфізму Вінера – Іто – Сігала виконує перетворення Фур'є, породжене якобійовим полем.

До цього ж напряму прилягає аналіз на просторі конфігурацій, що розвивався упродовж 1998 – 2003 рр. Ю. Г. Кондратьєвим та його учнями (в тому числі з інституту — Д. Л. Фінкельштейном), Ю. М. Березанським, Є. В. Литвиновим та за кордоном.

У 80-х роках минулого століття школа Ю. М. Березанського розпочала систематичне дослідження спектральних властивостей диференціальних операторів у просторах функцій нескінченної кількості змінних. Різноманітні модельні класи нескінченновимірних диференціальних операторів стали об'єктами досліджень Ю. М. Березанського, Ю. Г. Кондратьєва, В. Г. Самойленка, Ю. С. Самойленка, Г. Ф. Уса та ін. Зокрема, було побудовано теорію диференціальних операторів, що допускають відокремлення змінних, розвинуто метод еволюційних рівнянь при доведенні самоспряженості нескінченновимірних еліптичних операторів, з вичерпною повнотою описано оператори вторинного квантування в шредінгеровому зображенні. У зв'язку з цим не можна не згадати роботи Ю. Л. Далецького (1967 – 1989 рр.) з теорії нескінченновимірних диференціальних операторів. Проведені в них дослідження еліптичних диференціальних операторів у просторах гладких функцій, заданих на гільбертовому просторі, а також мір і диференціальних рівнянь у банаховому просторі знайшли своє продовження в подальших його працях (в 1993 – 1997 рр. — знову співробітник інституту) та працях його учнів. З 1985 р. Ю. Г. Кондратьєв і Т. В. Цикаленко вивчають важливий клас нескінченновимірних диференціальних операторів, породжених формами Діріхле мір на лінійних просторах, а в 90-х роках Ю. Г. Кондратьєв разом з О. В. Антонюком розпочали розробку теорії операторів на нескінченних добутках многовидів.

З середини 80-х років 20-го ст. у відділі функціонального аналізу Ю. Г. Кондратьєвим та його учнями розвиваються деякі розділи нескінченновимірного аналізу в напрямках, пов'язаних із застосуваннями до статистичної механіки. В основі лежить дослідження моделей статистичної фізики за допомогою відповідних функціональних інтегралів. На цьому шляху одержано такі результати: математично строго введено клас квантових ґратчастих систем і досліджено фазові переходи в них, розвинуто ефективну техніку побудови гіббсових температурних станів, розроблено метод стохастичного квантування таких систем.

Неархімедів варіант нескінченновимірного аналізу був розвинутий А. Н. Кочубеєм (1999 – 2002 рр.). Він також є ініціатором і розробником теорії стохастичних диференціальних рівнянь над полем p-адичних чисел.

10. Диференціальні рівняння з операторними коефіцієнтами. Початок систематичному дослідженню диференціальних рівнянь з обмеженими операторними коефіцієнтами у банаховому просторі був покладений М. Г. Крейном у 1947 – 1948 рр. Основна увага при цьому концентрувалась на питаннях стійкості. В 1950 – 1951 рр. на такі рівняння було перенесено (Ю. Л. Далецький) асимптотичні методи інтегрування, витоки яких походять від робіт М. М. Боголюбова та М. М. Крилова. У подальшому Ю. Л. Далецький розвинув їх і для рівнянь з необмеженими операторами. В 1949 р. М. М. Боголюбов разом з Б. І. Хацетом звів математичне описання рівноважного стану нескінченних систем класичної статистичної механіки до проблеми розв'язності операторного рівняння у банаховому просторі (просторі функцій розподілу), розв'язаної ними та Д. Я. Петриною у 1969 р. для випадку малих щільностей. Еволюція нерівноважної системи описується диференціальним рівнянням у банаховому просторі з необмеженим оператором (ланцюжок Боголюбова). Д. Я. Петрина разом з учнями детально вивчив задачу Коші для цього рівняння в різних функціональних просторах. Сюди ж належать одержані в 1962 – 1964 рр. Л. М. Прокопенком результати, пов'язані із застосуваннями абстрактної задачі Коші до вивчення параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами.

В 70 – 80-х рр. минулого століття М. Л. Горбачук і В. І. Горбачук для двочленних диференціально-операторних рівнянь першого і другого порядку в гільбертовому просторі параболічного та еліптичного типу відповідно описали всі гладкі всередині інтервалу розв'язки і знайшли лінійний топологічний простір, взагалі кажучи, ширший за початковий, в якому кожний такий розв'язок має граничне значення. Виявилось, що цей простір є максимальним для коректної постановки задачі Коші у випадку рівняння першого порядку і задачі Діріхле для рівнянь другого порядку. Було побудовано теорію граничних значень розв'язків розглянутих рівнянь, зокрема, з'ясовано зв'язок між поведінкою розв'язку в околі границі і степенем „узагальненості" його граничного значення. Вона містить у собі як частинний випадок теорію граничних значень гармонічних (аналітичних) функцій, включаючи класичні теореми Фату, Рісса, Кете, Тільмана, Владімірова, Комацу та ін. У подальшому ці результати були поширені П. Й. Дудніковим, О. І. Кашпіровським, Б. І. Кнюхом, В. В. Левчуком, М. І. Півтораком, І. П. Фішманом на інші види диференціально-операторних рівнянь у гільбертовому просторі і А. В. Князюком — на рівняння у банаховому просторі.

Для рівнянь першого та другого порядку в банаховому просторі одержано ознаки їх експоненціальної й асимптотичної стійкості (М. Л. Горбачук, В. М. Горбачук, І. В. Федак, О. Я. Шкляр), а у випадку асимптотичної, але не експоненціальної стійкості встановлено взаємозв'язок між швидкістю спадання розв'язку на нескінченності і степенем гладкості його початкового значення (М. Л. Горбачук, Я. Ф. Виннишин, І. Т. Мацишин). Для рівнянь другого порядку еліптичного типу в банаховому просторі А. В. Князюк знайшов умови розв'язності задачі Діріхле на півосі та асимптотичної єдиності її розв'язків. Для розв'язків диференціально-операторних рівнянь гіперболічного типу М. Л. Горбачуком, І. В. Федаком, М. В. Маркіним, О. А. Бутиріним знайдено критерії існування узагальнених за Чезаро й Абелем границь і виписано явні формули для них. У випадку абстрактного обернено параболічного рівняння на півосі описано усі його розв'язки і дано ознаки асимптотичної єдиності розв'язків задачі Коші (М. Л. Горбачук, М. І. Півторак та ін.).

Питанням поліноміального наближення розв'язків задачі Коші з достатньо гладкими початковими даними для рівнянь з операторними коефіцієнтами у гільбертовому просторі присвячено низку робіт М. Л. Горбачука і В. В. Городецького (1984 – 1990 рр.).

У 1977 – 1983 рр. А. Н. Кочубей побудував теорію узагальнених розв'язків диференціально-операторних рівнянь довільного порядку. Було доведено існування фундаментальних розв'язків у класах узагальнених функцій, ультрарозподілів та гіперфункцій і знайдено умови існування майже періодичних розв'язків.

У кінці 80-х рр. 20-го ст. А. П. Киричук увів поняття операторнозначної функції типу Міттаг-Леффлера — узагальнення експоненти та косинус-оператор-функції, яке знайшло своє застосування при дослідженні абстрактної задачі Коші для диференціальних рівнянь високого порядку в банаховому просторі та абстрактних стохастичних інтегро-диференціальних рівнянь.

Для диференціальних рівнянь у банаховому просторі як над архімедовим, так і неархімедовим полем встановлено необхідні й достатні умови розв'язності задачі Коші в різних класах аналітичних вектор-функцій скінченного порядку і скінченного типу, що дозволило визначити межі застосування степеневих рядів до знаходження як точних, так і наближених розв'язків розглядуваних рівнянь. Для наближених розв'язків одержано апріорні оцінки похибки наближення (М. Л. Горбачук і В. І. Горбачук, 2000 – 2003 рр.).

11. Застосування узагальнених функцій у задачах квантової теорії поля. Виявилось, що відома теорія перенормувань, що відіграє надзвичайно важливу роль у теорії поля і теорії елементарних частинок, вимагає для свого обґрунтування залучення методів функціонального аналізу, зокрема теорії узагальнених функцій. Спочатку виникла задача регуляризації матриць розсіяння у квантовій електродинаміці в будь-якому порядку теорії збурень. М. М. Боголюбов уперше помітив (1953 р.), що проблема зводиться до правильного визначення добутку сильно узагальнених функцій — так званих каузальних пропагаторів, і запропонував використати з цією метою теорему Хана – Банаха про продовження функціоналів. Таким чином, він прийшов до відкриття нової форми віднімальної процедури, названої згодом R-операцією Боголюбова.

В 1955 – 1960 рр. у спільних роботах М. М. Боголюбова й О. С. Парасюка було вивчено комбінаторні й аналітичні властивості цієї операції і доведено фундаментальну теорему про можливість регуляризації матриці розсіяння в будь-якому порядку теорії збурень. Ці результати набули особливого значення у 80-х роках у зв'язку з їх застосуваннями при побудові єдиної теорії електромагнітних та слабких взаємодій, а також при ренормалізації калібрувальних та суперсиметричних теорій.

До цього розділу примикають і деякі інші дослідження, виконані в інституті, зокрема: вивчення сумовності рядів та аналітичних властивостей амплітуд розсіяння теорії збурень і доведення існування нетривіальної матриці розсіяння (Д. Я. Петрина); дослідження на самоспряженість польових операторів та інтегральне зображення функцій Вайтмана, що визначають аксіоматичну теорію поля (Ю. М. Березанський, В. П. Гачок, М. Л. Горбачук, Ю. С. Самойленко, Л. М. Корсунський); побудова теорії розсіяння Хаага – Рюеля в термінах білінійних функціоналів, теорії розсіяння на мові функцій Швінгера (В. Д. Кошманенко). В 1970 – 1971 рр. Ю. М. Березанський і В. Д. Кошманенко показали, що будь-яке аксіоматичне квантоване поле можна задати в термінах якобійових матриць. Роботи, пов'язані із застосуваннями теорії узагальнених функцій нескінченної кількості змінних, згадувались у п. 9.

У 1998 р. А. Н. Кочубей побудував зображення канонічних комутаційних співвідношень операторами над локальним полем характеристики p (для поля p-адичних чисел це було зроблено в 1996 р.). Це зображення виявилось корисним для систематичної розробки ним (1999 р.) основ аналізу над такими полями. В роботах 2000 – 2003 рр. він також заклав основи відповідної теорії звичайних диференціальних рівнянь, у тому числі рівнянь з регулярною особливою точкою.

12. Нелінійний функціональний аналіз. У 1950 – 1952 рр. М. О. Красносельський отримав значні результати стосовно операторних рівнянь з нелінійними операторами. Він розробив нові топологічні методи, за допомогою яких дослідив нові класи нелінійних інтегральних рівнянь. Ці дослідження були широко розгорнуті ним після переїзду до Воронежа.

Отримано 09.02.2005