УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Днепропетр. ун-т им. Альфреда Нобеля),
А. В. Швачко (Днепропетр. гос. аграр. ун-т)

О НАИЛУЧШЕЙ АППРОКСИМАЦИИ В СРЕДНЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ С ВЕСОМ И ТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

The exact value of the extremal characteristic

$$\sup\left\{\lambda_n^r(\rho)E_n(f)_{2,\rho}\Big/\left(\int\limits_0^h\Omega_{k,\rho}^p(D_\rho^r(f),t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}:f\in L_2^r(D_\rho),\ f\not\equiv\mathrm{const}\right\}$$

is obtained for the class $L_2^r(D_\rho)$, where $r\in\mathbb{Z}_+$; $D_\rho=\sigma(x)\dfrac{d^2}{dx^2}+\tau(x)\dfrac{d}{dx}$, σ and τ are polynomials that do not exceed the second and first degrees, respectively; ρ is a weight function; $0<p\leqslant 2$; $0<h<1$; $\lambda_n(\rho)$ are the eigenvalues of the operator D_ρ; φ is a nonnegative measurable and summable function on the interval (a,b) which is not equivalent to zero; $\Omega_{k,\rho}$ is the generalized modulus of continuity of the kth order in the space $L_{2,\rho}(a,b)$, and $E_n(f)_{2,\rho}$ is the best polynomial approximation in the mean for a function $f\in L_{2,\rho}(a,b)$ by algebraic polynomials with weight ρ. The exact values of the widths for the classes of functions defined by the characteristic of smoothness $\Omega_{k,\rho}$ and of the K-functional $\mathbb{K}_m$ are also obtained.

На класі функцій $L_2^r(D_\rho)$, де $r\in\mathbb{Z}_+$, $D_\rho=\sigma(x)\dfrac{d^2}{dx^2}+\tau(x)\dfrac{d}{dx}$, σ та τ — поліноми не вище другого та першого степенів відповідно, ρ — вагова функція, обчислено точне значення екстремальної характеристики

$$\sup\left\{\lambda_n^r(\rho)E_n(f)_{2,\rho}\Big/\left(\int\limits_0^h\Omega_{k,\rho}^p(D_\rho^r(f),t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}:f\in L_2^r(D_\rho),\ f\not\equiv\mathrm{const}\right\}$$

Тут $0<p\leqslant 2$, $0<h<1$, $\lambda_n(\rho)$ — власні значення оператора D_ρ, φ — невід'ємна вимірна та сумовна на інтервалі (a,b) функція, яка не еквівалентна нулю, $\Omega_{k,\rho}$ — узагальнений модуль неперервності k-го порядку у просторі $L_{2,\rho}(a,b)$; $E_n(f)_{2,\rho}$ — найкраще поліноміальне наближення в середньому з вагою ρ функції $f\in L_{2,\rho}(a,b)$. Знайдено точні значення поперечників класів функцій, означених за допомогою характеристики гладкості $\Omega_{k,\rho}$ та K-функціоналу $\mathbb{K}_m$.

1. Пусть на интервале (a,b), который может быть как конечным, так и бесконечным, задана неотрицательная суммируемая функция ρ, отличная от нуля на множестве положительной меры. Эту функцию будем называть весом. Обозначим через $L_{2,\rho}(a,b)$ множество функций $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$, для которых функция $\rho^{1/2}\cdot f$ суммируема с квадратом на (a,b). При этом будем отождествлять две функции f_1 и f_2, если $\rho^{1/2}(x)f_1(x)=\rho^{1/2}(x)f_2(x)$ почти для всех $x\in(a,b)$. Множество $L_{2,\rho}(a,b)$ линейно и с введением скалярного произведения

$$\langle f,g\rangle:=\int\limits_a^b\rho(x)f(x)g(x)dx,$$

где $f,g\in L_{2,\rho}(a,b)$, и нормы

$$\|f\|_{2,\rho}:=\sqrt{\langle f,f\rangle}$$

превращается в полное гильбертово пространство.

Согласно работам [1, с. 33, 37; 2] рассмотрим весовую функцию ρ, удовлетворяющую на интервале (a,b) дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d}{dx}\big(\sigma(x)\rho(x)\big) = \tau(x)\rho(x), \tag{1}$$

где σ и τ — многочлены не выше второй и первой степени соответственно, причем для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$\lim_{x\to a+0} \sigma(x)\rho(x)x^k = \lim_{x\to b-0} \sigma(x)\rho(x)x^k = 0.$$

Напомним (см., например, [1, с. 33]), что только в трех случаях решение ρ данной задачи (в зависимости от многочленов σ и τ) с точностью до линейного преобразования независимой переменной является весовой функцией для определения (с точностью до постоянного множителя) классических ортогональных на (a,b) полиномов, а именно, полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита.

Обозначим, как и в [2], через D_ρ дифференциальный оператор вида

$$D_\rho := \sigma(x)\frac{d^2}{dx^2} + \tau(x)\frac{d}{dx}, \tag{2}$$

и пусть

$$\lambda(\rho) := \lambda_n(\rho) = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\,\sigma''. \tag{3}$$

Указанные выше ортогональные многочлены Якоби, Лагерра и Эрмита удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка

$$-D_\rho y = \lambda(\rho)y. \tag{4}$$

Явные выражения для этих многочленов задаются формулой Родрига

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)}\left(\sigma^n(x)\rho(x)\right)^{(n)}, \tag{5}$$

где B_n — нормировочная постоянная, а функция ρ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1).

Очевидно, что в силу формулы (4) числа $\lambda_n(\rho),\ n \in \mathbb{Z}_+$, являются собственными значениями оператора $(-D_\rho)$, а соответствующие им собственные функции — ортогональными на (a,b) многочленами, соответствующими весовой функции ρ.

В зависимости от вида функции ρ получаем следующие системы ортогональных на (a,b) полиномов (см., например, [1]).

Если $\rho(x) := (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, где $\alpha, \beta > -1,\ \sigma(x) := 1-x^2$, $\tau(x) := -(\alpha+\beta+2)x+\beta-\alpha$, (a,b) — интервал $(-1,1)$, то согласно формуле (5) соответствующие полиномы y_n при $B_n := \frac{(-1)^n}{2^n n!}$ являются полиномами Якоби

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) := \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\Big((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\Big).$$

При этом $\lambda_n(\rho) = n(n+\alpha+\beta+1)$.

Если $\rho(x) := x^{\alpha}e^{-x}$, где $\alpha > -1$, $\sigma(x) := x$, $\tau(x) := -x+\alpha+1$, (a,b) является интервалом $(0,\infty)$, то в силу формулы (5) соответствующие полиномы y_n при $B_n := 1/n!$ будут полиномами Лагерра

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!}\, e^x x^{-\alpha}\, \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\alpha}e^{-x}\right).$$

В данном случае $\lambda_n(\rho) = n$.

В случае, когда $\rho(x) := e^{-x^2}$, $\sigma(x) := 1$, $\tau(x) := 2x$, (a,b) является интервалом $(-\infty,\infty)$, соответствующие, согласно формуле (5), полиномы y_n при $B_n := (-1)^n$ являются полиномами Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right).$$

При этом $\lambda_n(\rho) = 2n$.

2. В качестве математического аппарата теории аппроксимации функций часто используют классические ортогональные полиномы Якоби и их частные случаи $\big($полиномы Чебышева 1-го $(\alpha=\beta=-1/2)$ и 2-го $(\alpha=\beta=1/2)$ рода, полиномы Лежандра $(\alpha=\beta=0)$, ультрасферические полиномы $(\alpha=\beta)\big)$, а также полиномы Лагерра и Эрмита [3]. Отметим, что многие из указанных ортогональных полиномов применяются также в ряде задач математической физики, квантовой механики, статистики. Вопросы, связанные с изучением различных систем ортогональных полиномов, а также вопросы, связанные с исследованием разложения функций в ряды Фурье по полиномам из этих систем, рассмотрены, например, в монографиях [4 – 6]. Отметим, что проблема аппроксимации функций в среднем алгебраическими полиномами с весом, построенными по ортогональным системам Якоби, Лагерра или Эрмита, изучалась во многих работах (см., например, [7 – 23]).

Одной из важных экстремальных задач теории аппроксимации функций является поиск точных констант в неравенствах Джексона. Напомним, что неравенствами Джексона принято называть неравенства, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством в нормированном пространстве оценивается через модуль непрерывности функции. Первое неравенство подобного вида с порядковой константой было получено Джексоном в 1911 году в случае равномерного приближения непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами. Много усилий было предпринято для нахождения точной константы в этом неравенстве, и лишь в 1962 году это удалось сделать Н. П. Корнейчуку [24]. Следующий шаг был сделан в 1967 году Н. И. Черных, которому удалось доказать неравенство Джексона с точной константой в пространстве L_2 [25]. В дальнейшем данная тематика получила свое развитие во многих работах (см., например, [26 – 33]).

В случае приближения в среднем непериодических функций алгебраическими полиномами с весом экстремальная задача подобного рода рассматривалась, например, в статьях [19 – 23]. В данной работе продолжены указанные исследования.

3. Пусть $\{P_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ — одна из рассмотренных выше ортогональных на (a,b) систем полиномов с соответствующей весовой функцией ρ, принадлежащая пространству $L_{2,\rho}(a,b)$. Следуя [6, с. 166, 198, 236], запишем для нее ортонормированную систему полиномов $\{\widehat{P_j}\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$. Представим функцию $f\in L_{2,\rho}(a,b)$ в виде разложения в ряд Фурье по системе полиномов $\{\widehat{P_j}\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j(f)\widehat{P}_j(x), \tag{6}$$

где равенство понимается в смысле сходимости в пространстве $L_{2,\rho}(a,b)$;

$$c_j(f):=\int\limits_a^b \rho(x)f(x)\widehat{P}_j(x)dx, \quad j\in\mathbb{Z}_+,$$

— коэффициенты Фурье функции f. Обозначим через $\mathcal{P}_n$ подпространство алгебраических полиномов степени, не превышающей n. Пусть $E_n(f)_{2,\rho}$, $n\in\mathbb{N}$, — величина наилучшего приближения функции $f\in L_{2,\rho}(a,b)$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$, т. е.

$$E_n(f)_{2,\rho}:=\inf\big\{\|f-g_{n-1}\|_{2,\rho}\colon g_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}\big\}.$$

Символом $S_{n-1}(f)$, $n\in\mathbb{N}$, обозначим частную сумму ряда Фурье (6), т. е.

$$S_{n-1}(f,x):=\sum_{j=0}^{n-1}c_j(f)\widehat{P}_j(x).$$

Известно (см., например, [34]), что для произвольной функции $f\in L_{2,\rho}(a,b)$

$$\|f\|_{2,\rho}=\left\{\sum_{j=0}^{\infty}c_j^2(f)\right\}^{1/2},$$

$$E_n(f)_{2,\rho}=\big\|f-S_{n-1}(f)\big\|_{2,\rho}=\left\{\sum_{j=n}^{\infty}c_j^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{7}$$

При решении ряда задач теории аппроксимации функций действительной переменной часто используют различные модификации классического определения модуля непрерывности. Во многих случаях это продиктовано спецификой рассматриваемых задач и позволяет получить результаты, раскрывающие содержательную суть исследуемых проблем. Например, при аппроксимации непериодических функций алгебраическими полиномами М. К. Потапов и его ученики предложили различные модификации классического определения модуля непрерывности, использующие вместо оператора сдвига $T_hf(x):=f(x+h)$ различные усредняющие операторы (см., например, [35, 17, 18]). В рассматриваемом нами случае воспользуемся подходом, предложенным в работах [2, 20].

Пусть

$$\mathcal{T}_\rho(x,y;h):=\sum_{j=0}^{\infty}\widehat{P}_j(x)\widehat{P}_j(y)h^j, \tag{8}$$

где $h\in(0,1)$, $x,y\in(a,b)$, причем равенство в формуле (8) понимается в смысле сходимости в среднем в пространстве $L_{2;\rho,\rho}\big((a,b)\times(a,b)\big)$, которое состоит из суммируемых в квадрате функций $f\colon(a,b)\times(a,b)\to\mathbb{R}$ с весом $\rho(x)\rho(y)$ и нормой

$$\|f\|_{2;\rho,\rho} = \left\{ \int\limits_a^b \int\limits_a^b \rho(x)\rho(y)f^2(x,y)dxdy \right\}^{1/2} < \infty.$$

В ряде случаев для функции $\mathcal{T}_\rho$ можно указать явное выражение. Так, для ортонормированной системы полиномов Эрмита $\{\widehat{H}_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, где

$$\widehat{H}_j(x) = \frac{H_j(x)}{\sqrt{j!2^j\sqrt{\pi}}},$$

в силу [36, с. 383] получаем

$$\mathcal{T}_\rho(x,y;h) := \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{H}_j(x)\widehat{H}_j(y)h^j = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-h^2)}} \exp\left(\frac{2xyh - (x^2+y^2)h^2}{1-h^2}\right).$$

Здесь $\rho(x) = \exp(-x^2)$. Для ортонормированной системы полиномов Лагерра $\{\widehat{L}_j^\alpha\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, где

$$\widehat{L}_j^\alpha(x) = (-1)^j \sqrt{\frac{j!}{\Gamma(\alpha+j+1)}} L_j^\alpha(x),$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, используя результаты [36, с. 111], имеем

$$\mathcal{T}_\rho(x,y;h) := \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{L}_j^\alpha(x)\widehat{L}_j^\alpha(y)h^j = \frac{\exp\big(-(x+y)h/(1-h)\big)}{1-h}(xyh)^{-\alpha/2} J_\alpha\left(\frac{2\sqrt{xyh}}{1-h}\right).$$

Здесь $J_\alpha(\cdot)$ — функция Бесселя I рода порядка α $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$.

Следуя работе [2] и используя формулу (8), для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}(a,b)$ запишем оператор усреднения

$$F_{h,\rho}(f,x) := \int\limits_a^b \rho(t)f(t)\mathcal{T}_\rho(x,t,1-h)dt, \quad 0 < h < 1, \tag{9}$$

и перечислим его свойства: для любых $f_1, f_2 \in L_{2,\rho}(a,b)$ и $\mu,\eta \in \mathbb{R}$ $F_{h,\rho}(\mu f_1 + \eta f_2) = \mu F_{h,\rho}(f_1) + \eta F_{h,\rho}(f_2)$, $\big\|F_{h,\rho}(f)\big\|_{2,\rho} \leqslant \|f\|_{2,\rho}$, для произвольного полинома $\widehat{P}_n, n \in \mathbb{Z}_+$, из рассматриваемой ортонормированной системы полиномов $F_{h,\rho}(\widehat{P}_n, x) = (1-h)^n \widehat{P}_n(x)$, при $h \to 0+0$ имеем $\|F_{h,\rho}(f) - f\|_{2,\rho} \to 0$. Используя оператор усреднения (9), записываем для функции $f \in L_{2,\rho}(a,b)$ конечные разности первого и высших порядков. Пусть $\mathbb{I}_\rho$ — единичный оператор в пространстве $L_{2,\rho}(a,b)$, $F_{h,\rho}^0(f) := f$, $F_{h,\rho}^1(f) := F_{h,\rho}(f)$, $F_{h,\rho}^i(f) := F_{h,\rho}^1\big(F_{h,\rho}^{i-1}(f)\big)$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\Delta_{h,\rho}^1(f,x) := F_{h,\rho}^1(f,x) - f(x) = \left(F_{h,\rho}^1 - \mathbb{I}_\rho\right) f(x),$$

$$\Delta_{h,\rho}^k(f,x) := \Delta_{h,\rho}^1\left(\Delta_{h,\rho}^{k-1}(f), x\right) = \left(F_{h,\rho}^1 - \mathbb{I}_\rho\right)^k f(x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F_{h,\rho}^i(f,x), \quad k = 2,3,\ldots.$$

С помощью указанных величин для функции $f \in L_{2,\rho}(a,b)$ определяем обобщенный модуль непрерывности k-го порядка [2, 20]

$$\Omega_{k,\rho}(f,t) := \sup\left\{\|\Delta^k_{h,\rho}(f)\|_{2,\rho}\colon 0 < h \leqslant t\right\}, \tag{10}$$

где $0 < t < 1$, $k \in \mathbb{N}$.

4. Обозначим через $L_2(D_\rho)$, где оператор D_ρ определяется формулой (2), множество функций $f \in L_{2,\rho}(a,b)$, имеющих абсолютно непрерывные производные первого порядка f' и таких, что функции $\tau(x)\dfrac{df}{dx}$ и $\sigma(x)\dfrac{d^2f}{dx^2}$ принадлежат пространству $L_{2,\rho}(a,b)$, т. е. $D_\rho f \in L_{2,\rho}(a,b)$. В случае, когда (a,b) — один из интервалов $(-\infty,\infty)$ или $(0,\infty)$, полагаем, что функция f' является локально абсолютно непрерывной. Следует отметить, что ранее для системы ортогональных с весом на $(-\infty,\infty)$ полиномов Эрмита дифференциальные операторы

$$D = -\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx} \tag{11}$$

и

$$\widetilde{D} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx} \tag{12}$$

рассматривались в работах [17] и [18] соответственно. Очевидно, что с точностью до постоянных множителей дифференциальные операторы (11) и (12) совпадают с дифференциальным оператором (2), где $\rho(x) = e^{-x^2}$, $\sigma(x) = 1$, $\tau(x) = -2x$.

Пусть $D^0_\rho f := f$, $D^1_\rho f := D_\rho f$ и $D^r_\rho f := D^1_\rho\big(D^{r-1}_\rho f\big), r \in \mathbb{N}$. Символом $L^r_2(D_\rho)$, $r = 2, 3, \ldots$, обозначим множество функций $f \in L_{2,\rho}(a,b)$, которые имеют абсолютно непрерывные производные $(2r-1)$-го порядка и для которых $D^r_\rho f \in L_{2,\rho}(a,b)$. В случае, когда (a,b) является одним из интервалов $(-\infty,\infty)$ или $(0,\infty)$, полагаем, что производные $(2r-1)$-го порядка локально абсолютно непрерывны.

Приведем ряд результатов из работы [2], которые понадобятся в дальнейшем. Так, если функция f принадлежит множеству $L^r_2(D_\rho), r \in \mathbb{N}$, то для ее коэффициентов Фурье $c_j(f)$, $j \in \mathbb{N}$, справедлива формула

$$c_j(f) = (-1)^r\frac{1}{\lambda^r_j(\rho)}c_j\left(D^r_\rho f\right). \tag{13}$$

Отметим также, что для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}(a,b)$, имеющей на (a,b) разложение в ряд Фурье по системе ортонормированных полиномов $\left\{\widehat{P}_j\right\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ с весом ρ, оператор усреднения $F_{h,\rho}(f)$ представим следующим образом:

$$F_{h,\rho}(f,x) = \sum_{j=0}^{\infty}(1-h)^j c_j(f)\widehat{P}_j(x), \tag{14}$$

где равенство (14) понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\rho}(a,b)$.

Используя формулы (6) и (14), для функции $f \in L_{2,\rho}(a,b)$ записываем равенство

$$\Delta^1_{h,\rho}(f,x) = \sum_{j=1}^{\infty}\big((1-h)^j - 1\big)c_j(f)\widehat{P}_j(x). \tag{15}$$

На основании метода математической индукции и формулы (15) получаем

$$\Delta_{h,\rho}^{k}(f,x)=\sum_{j=1}^{\infty}\big((1-h)^{j}-1\big)^{k}c_{j}(f)\widehat{P}_{j}(x). \tag{16}$$

Из равенства (16) имеем

$$\big\|\Delta_{h,\rho}^{k}(f)\big\|_{2,\rho}^{2}=\sum_{j=1}^{\infty}\big(1-(1-h)^{j}\big)^{2k}c_{j}^{2}(f), \tag{17}$$

где $h\in(0,1)$. Используя формулы (10) и (17), записываем

$$\Omega_{k,\rho}(f,t)=\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-(1-t)^{j}\right)^{2k}c_{j}^{2}(f)\right\}^{1/2},\quad 0<t<1. \tag{18}$$

Для характеристики гладкости (10) в работе [2] было получено неравенство Джексона

$$E_{n}(f)_{2,\rho}\leqslant\big(1-(1-t)^{n}\big)^{-k}\lambda_{n}^{-r}(\rho)\Omega_{k,\rho}\big(D_{\rho}^{r}(f),t\big), \tag{19}$$

где $f\in L_{2}^{r}(D_{\rho})$, $r\in\mathbb{Z}_{+}$, $L_{2}^{0}(D_{\rho}):=L_{2}(D_{\rho})$, $t\in(0,1)$, $n,k\in\mathbb{N}$, которое является точным в том смысле, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ существует функция из множества $L_{2}^{r}(D_{\rho})$, обращающая неравенство (19) в равенство.

Отметим, что с помощью соотношения (19) можно получить следующее равенство:

$$\sup_{\substack{f\in L_{2}^{r}(D_{\rho})\\ f\not\equiv\mathrm{const}}}\frac{\lambda_{n}^{r}(\rho)E_{n}(f)_{2,\rho}}{\Omega_{k,\rho}(D_{\rho}^{r}(f),t)}=\frac{1}{(1-(1-t)^{n})^{k}}, \tag{20}$$

где $t\in(0,1)$. Полагая в формуле (20) $t=1/n$ и вычисляя верхнюю грань по $n\in\mathbb{N}$ от левой и правой частей указанного равенства, получаем

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{\substack{f\in L_{2}^{r}(D_{\rho})\\ f\not\equiv\mathrm{const}}}\frac{\lambda_{n}^{r}(\rho)E_{n}(f)_{2,\rho}}{\Omega_{k,\rho}(D_{\rho}^{r}(f),1/n)}=\frac{1}{(1-e^{-1})^{k}}.$$

5. Сформулируем и докажем один из основных результатов данной статьи.

Теорема 1. *Пусть $n,k\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_{+}$, $0<p\leqslant 2$, $0<h<1$, φ — неотрицательная измеримая суммируемая на интервале $(0,h)$ неэквивалентная нулю функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_{2}^{r}(D_{\rho})\\ f\not\equiv\mathrm{const}}}\frac{\lambda_{n}^{r}(\rho)E_{n}(f)_{2,\rho}}{\left\{\displaystyle\int_{0}^{h}\Omega_{k,\rho}^{p}(D_{\rho}^{r}(f),t)\varphi(t)dt\right\}^{1/p}}=\frac{1}{\left\{\displaystyle\int_{0}^{h}(1-(1-t)^{n})^{kp}\varphi(t)dt\right\}^{1/p}}. \tag{21}$$

Доказательство. Для получения оценки сверху экстремальной характеристики, расположенной в левой части соотношения (21), применим один вариант неравенства Минковского из монографии [37, с. 104]

$$\left\{\int\limits_0^h \left(\sum_{j=m}^{\infty} \left|\widetilde{f}_j(t)\right|^2\right)^{p/2} dt\right\}^{1/p} \geqslant \left\{\sum_{j=m}^{\infty} \left(\int\limits_0^h \left|\widetilde{f}_j(t)\right|^p dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}, \tag{22}$$

где $0 < p \leqslant 2$. Полагая $\widetilde{f}_j := f_j \varphi^{1/p}$, из формулы (22) получаем

$$\left\{\int\limits_0^h \left(\sum_{j=m}^{\infty} \left|f_j(t)\right|^2\right)^{p/2} \varphi(t)dt\right\}^{1/p} \geqslant \left\{\sum_{j=m}^{\infty} \left(\int\limits_0^h \left|f_j(t)\right|^p \varphi(t)dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}. \tag{23}$$

Для произвольного элемента $f \in L_2^r(D_\rho)$ в силу формулы (13) запишем разложение функции $D_\rho^r(f)$ в ряд Фурье по системе полиномов $\{\widehat{P}_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, ортонормированной на (a,b) с весом ρ,

$$D_\rho^r(f,x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\big(D_\rho^r(f)\big)\widehat{P}_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^r \lambda_j^r(\rho) c_j(f) \widehat{P}_j(x), \tag{24}$$

где равенство понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\rho}(a,b)$. Из формул (18) и (24) имеем

$$\Omega_{k,\rho}^2\big(D_\rho^r(f),t\big) = \sum_{j=1}^{\infty} \big(1-(1-t)^j\big)^{2k} \lambda_j^{2r}(\rho) c_j^2(f), \quad 0<t<1. \tag{25}$$

Используя соотношения (23), (25), (7) и учитывая, что последовательность $\{\lambda_j(\rho)\}_{j\in\mathbb{N}}$ положительных чисел является монотонно возрастающей, записываем

$$\left\{\int\limits_0^h \Omega_{k,\rho}^p\big(D_\rho^r(f),t\big)\varphi(t)dt\right\}^{1/p} = \left\{\int\limits_0^h \big(\Omega_{k,\rho}^2\big(D_\rho^r(f),t\big)\big)^{p/2} \varphi(t)dt\right\}^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant \left\{\int\limits_0^h \left(\sum_{j=n}^{\infty} \lambda_j^{2r}(\rho)(1-(1-t)^j)^{2k} c_j^2(f)\right)^{p/2} \varphi(t)dt\right\}^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant \left\{\sum_{j=n}^{\infty} \lambda_j^{2r}(\rho) c_j^2(f) \left(\int\limits_0^h \big(1-(1-t)^j\big)^{kp} \varphi(t)dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_n^r(\rho) \left\{\int\limits_0^h \big(1-(1-t)^n\big)^{kp} \varphi(t)dt\right\}^{1/p} E_n(f)_{2,\rho}.$$

Отсюда получаем оценку сверху рассматриваемой экстремальной характеристики

$$\sup_{\substack{f\in L_2^r(D_\rho)\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{\lambda_n^r(\rho) E_n(f)_{2,\rho}}{\left\{\int_0^h \Omega_{k,\rho}^p(D_\rho^r(f),t)\varphi(t)dt\right\}^{1/p}} \leqslant \frac{1}{\left\{\int_0^h (1-(1-t)^n)^{kp} \varphi(t)dt\right\}^{1/p}}. \tag{26}$$

Для получения оценки снизу указанной экстремальной характеристики полагаем $f_0 := := \widehat{P}_n$. Очевидно, что функция $f_0 \in L_2^r(D_\rho)$. В силу формулы (7) имеем $E_n(f_0)_{2,\rho} = 1$. Из равенства (25) получаем

$$\Omega_{k,\rho}(D_\rho^r(f_0), t) = (1-(1-t)^n)^k \lambda_n^r(\rho), \quad 0 < t < 1.$$

Тогда

$$\int\limits_0^h \Omega_{k,\rho}^p\big(D_\rho^r(f_0), t\big)\varphi(t)dt = \lambda_n^{rp}(\rho)\int\limits_0^h \big(1-(1-t)^n\big)^{kp}\varphi(t)dt.$$

Отсюда следует неравенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^r(D_\rho)\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{\lambda_n^r(\rho)E_n(f)_{2,\rho}}{\left\{\int_0^h \Omega_{k,\rho}^p\big(D_\rho^r(f), t\big)\varphi(t)dt\right\}^{1/p}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\lambda_n^r(\rho)E_n(f_0)_{2,\rho}}{\left\{\int_0^h \Omega_{k,\rho}^p\big(D_\rho^r(f_0), t\big)\varphi(t)dt\right\}^{1/p}} = \frac{1}{\left\{\int_0^h \big(1-(1-t)^n\big)^{kp}\varphi(t)dt\right\}^{1/p}}. \tag{27}$$

Сопоставляя оценку сверху (26) и оценку снизу (27), получаем требуемое равенство (21).

Теорема 1 доказана.

Два приведенных далее следствия, вытекающие из теоремы 1, касаются двух частных случаев: $p = 1/k$ и $\varphi \equiv 1, p = 1/k$ соответственно.

***Следствие* 1.** *Имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^r(D_\rho)\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{\lambda_n^r(\rho)E_n(f)_{2,\rho}}{\left\{\int_0^h \Omega_{k,\rho}^{1/k}\big(D_\rho^r(f), t\big)\varphi(t)dt\right\}^k} = \frac{1}{\left\{\int_0^h \big(1-(1-t)^n\big)\varphi(t)dt\right\}^k},$$

где $k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0,1)$, *а функция* φ *и величина* h *удовлетворяют требованиям теоремы* 1.

***Следствие* 2.** *Пусть* $k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0,1)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^r(D_\rho)} \frac{\lambda_n^r(\rho)E_n(f)_{2,\rho}}{\left\{(n+1)\int_0^h \Omega_{k,\rho}^{1/k}\big(D_\rho^r(f), t\big)dt\right\}^k} = \frac{1}{\big\{(n+1)h - 1 + (1-h)^{n+1}\big\}^k}. \tag{28}$$

Полагая, например, в формуле (28) $h := 1/(n+1)$ и $r := 0$, получаем один из результатов работы [21] в одномерном случае, а именно,

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\rho}(a,b)\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{E_n(f)_{2,\rho}}{\left\{(n+1)\int_0^{1/(n+1)} \Omega_{k,\rho}^{1/k}(f, t)dt\right\}^k} = \frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{(n+1)k}}. \tag{29}$$

Из формулы (29) имеем предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{f\in L_{2,\rho}(a,b)\\ f\not\equiv\mathrm{const}}}\frac{E_n(f)_{2,\rho}}{\left\{(n+1)\displaystyle\int_0^{1/(n+1)}\Omega_{k,\rho}^{1/k}(f,t)dt\right\}^k}=e^k.$$

6. В теории аппроксимации функций вещественной переменной часто используется идея замены произвольной функции f достаточно гладкой функцией g. Одна из наиболее эффективных ее реализаций основана на методе K-функционала Петре в теории интерполяционных пространств [38]. Также отметим, что K-функционалы нашли применение при решении ряда задач, в том числе и экстремальных, теории аппроксимации функций (см., например, [17, 18, 23, 39, 40]). Напомним, что при изучении вопросов аппроксимации функций на всей вещественной оси полиномами с весом Чебышева – Эрмита K-функционалы с использованием дифференциальных операторов (11) и (12) были введены в работах [17] и [18] соответственно. При этом, в смысле слабой эквивалентности, были установлены связи между K-функционалами и характеристиками гладкости функций, основанными на использовании операторов обобщенного сдвига.

Использовав введенные ранее обозначения и понятия, определим в рассматриваемом случае K-функционал

$$\mathbb{K}_m(f,t^m)_{2,\rho}:=\mathbb{K}_m\big(f,t^m;L_{2,\rho}(a,b);L_2^m(D_\rho)\big)=$$

$$=\inf\Big\{\|f-g\|_{2,\rho}+t^m\big\|D_\rho^m(g)\big\|_{2,\rho}\colon g\in L_2^m(D_\rho)\Big\},\tag{30}$$

где $m\in\mathbb{N}$, $0<t<1$. Определенный интерес, с нашей точки зрения, представляет вычисление точных значений экстремальных величин, подобных приведенной в формуле (20), где вместо модуля непрерывности (10) будет использован K-функционал (30).

Теорема 2. *Пусть n,m,r принадлежат $\mathbb{N}$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^r(D_\rho)\\ f\not\equiv\mathrm{const}}}\frac{\lambda_n^r(\rho)E_n(f)_{2,\rho}}{\mathbb{K}_m\big(D_\rho^r(f),1/\lambda_n^m(\rho)\big)_{2,\rho}}=1.\tag{31}$$

Доказательство. Воспользовавшись формулами (7) и (13), для произвольной функции $f\in L_2^r(D_\rho)$ запишем

$$E_n(f)_{2,\rho}=\left\{\sum_{j=n}^\infty\frac{1}{\lambda_j^{2r}(\rho)}c_j^2\big(D_\rho^r(f)\big)\right\}^{1/2}\leqslant\frac{1}{\lambda_n^r(\rho)}\left\{\sum_{j=n}^\infty c_j^2\big(D_\rho^r(f)\big)\right\}^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{\lambda_n^r(\rho)}E_n\big(D_\rho^r(f)\big)_{2,\rho}\leqslant\frac{1}{\lambda_n^r(\rho)}\big\|D_\rho^r(f)-S_{n-1}(g)\big\|_{2,\rho},\tag{32}$$

где

$$S_{n-1}(g,x)=\sum_{j=0}^{n-1}c_j(g)\widehat{P}_j(x)$$

— частная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье произвольной функции $g\in L_2^m(D_\rho)$ по ортонормированной на (a,b) с весом ρ системе полиномов $\{\widehat{P}\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$. В силу равенства (7) и соображений, связанных с получением соотношения (32), для произвольной функции $g \in L_2^m(D_\rho)$ имеем

$$\|g - S_{n-1}(g)\|_{2,\rho} = E_n(g)_{2,\rho} \leqslant \frac{1}{\lambda_n^m(\rho)} E_n\big(D_\rho^m(g)\big)_{2,\rho}. \tag{33}$$

Применяя к правой части соотношения (32) неравенство треугольника и используя формулу (33), получаем

$$E_n(f)_{2,\rho} \leqslant \frac{1}{\lambda_n^r(\rho)} \Big\{ \big\|D_\rho^r(f) - g\big\|_{2,\rho} + \big\|g - S_{n-1}(g)\big\|_{2,\rho} \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda_n^r(\rho)} \left\{ \big\|D_\rho^r(f) - g\big\|_{2,\rho} + \frac{1}{\lambda_n^m(\rho)} \big\|D_\rho^m(g)\big\|_{2,\rho} \right\}. \tag{34}$$

Нетрудно видеть, что левая часть данного неравенства не зависит от функции g, являющейся произвольным элементом множества $L_2^m(D_\rho)$. Переходя в правой части неравенства (34) к нижней грани по $g \in L_2^m(D_\rho)$ и используя определение K-функционала (30), записываем

$$E_n(f)_{2,\rho} \leqslant \frac{1}{\lambda_n^r(\rho)} \mathbb{K}_m \left(D_\rho^r(f), \frac{1}{\lambda_n^m(\rho)} \right).$$

Отсюда следует оценка сверху

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r(D_\rho) \\ f \not\equiv \mathrm{const}}} \frac{\lambda_n^r(\rho) E_n(f)_{2,\rho}}{\mathbb{K}_m\big(D_\rho^r(f), 1/\lambda_n^m(\rho)\big)_{2,\rho}} \leqslant 1. \tag{35}$$

Установим оценку снизу рассматриваемой экстремальной характеристики. Используя формулу (13), для произвольного полинома n-й степени

$$Q_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j \widehat{P}_j(x),$$

где $a_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{0,n}$, имеем

$$D_\rho^r(Q_n, x) = (-1)^r \sum_{j=1}^n \lambda_j^r(\rho) a_j \widehat{P}_j(x). \tag{36}$$

Поскольку

$$\|Q_n\|_{2,\rho} = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j^2 \right\}^{1/2},$$

учитывая, что последовательность чисел $\{\lambda_j(\rho)\}_{j=1}^n$ является монотонно возрастающей, из (36) получаем

$$\|D_\rho^r(Q_n)\|_{2,\rho} = \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j^{2r}(\rho) a_j^2 \right\}^{1/2} \leqslant \lambda_n^r(\rho) \|Q_n\|_{2,\rho}. \tag{37}$$

Пусть $Q_n \in \mathcal{P}_n$ — произвольный полином. Полагая в формуле (30) последовательно $g \equiv 0$ и $g \equiv Q_n$, для K-функционала $\mathbb{K}_m(Q_n)_{2,\rho}$ получаем неравенства

$$\mathbb{K}_m(Q_n, t^m)_{2,\rho} \leqslant \begin{cases} \|Q_n\|_{2,\rho}, \\ t^m \big\|D_\rho^m(Q_n)\big\|_{2,\rho}. \end{cases} \tag{38}$$

Пусть, как и ранее, $f_0 := \widehat{P}_n$. Поскольку $f_0 \in L_2^r(D_\rho)$, в силу равенства (36) записываем

$$D_\rho^{r+m}(f_0, x) = (-1)^{r+m} \lambda_n^{r+m}(\rho) \widehat{P}_n(x). \tag{39}$$

Из формулы (39) и второго неравенства в соотношении (38) получаем

$$\mathbb{K}_m\left(D_\rho^r(f_0), \frac{1}{\lambda_n^m(\rho)}\right)_{2,\rho} \leqslant \frac{1}{\lambda_n^m(\rho)} \big\|D_\rho^{r+m}(f_0)\big\|_{2,\rho} = \lambda_n^r(\rho) \|\widehat{P}_n\|_{2,\rho} = \lambda_n^r(\rho). \tag{40}$$

Используя неравенство (40) и тот факт, что $E_n(f_0)_{2,\rho} = 1$, имеем

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r(D_\rho) \\ f \not\equiv \mathrm{const}}} \frac{\lambda_n^r(\rho) E_n(f)_{2,\rho}}{\mathbb{K}_m\big(D_\rho^r(f), 1/\lambda_n^m(\rho)\big)_{2,\rho}} \geqslant \frac{\lambda_n^r(\rho) E_n(f_0)_{2,\rho}}{\mathbb{K}_m\big(D_\rho^r(f_0), 1/\lambda_n^m(\rho)\big)_{2,\rho}} \geqslant 1. \tag{41}$$

Сопоставляя оценку сверху (35) и оценку снизу (41) рассматриваемой экстремальной характеристики, получаем требуемое равенство (31).

Теорема 2 доказана.

7. Пусть $\mathbb{B}$ — единичный шар в пространстве $L_{2,\rho}(a,b)$, $L_n \subset L_{2,\rho}(a,b)$ — n-мерное подпространство, $L^n \subset L_{2,\rho}(a,b)$ — подпространство коразмерности n, $\Lambda\colon L_{2,\rho}(a,b) \to L_n$ — непрерывный линейный оператор, $\Lambda^\perp\colon L_{2,\rho}(a,b) \to L_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования, $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_{2,\rho}(a,b)$. Величины

$$b_n\big(\mathfrak{M}; L_{2,\rho}(a,b)\big) = \sup\Big\{\sup\big\{\varepsilon > 0\colon \varepsilon\mathbb{B} \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M}\big\}\colon L_{n+1} \subset L_{2,\rho}(a,b)\Big\},$$

$$d_n\big(\mathfrak{M}; L_{2,\rho}(a,b)\big) = \inf\Big\{\sup\big\{\inf\big\{\|f-g\|_{2,\rho}\colon g \in L_n\big\}\colon f \in \mathfrak{M}\big\}\colon L_n \subset L_{2,\rho}(a,b)\Big\},$$

$$\delta_n\big(\mathfrak{M}; L_{2,\rho}(a,b)\big) =$$

$$= \inf\Big\{\inf\big\{\sup\big\{\|f - \Lambda f\|_{2,\rho}\colon f \in \mathfrak{M}\big\}\colon \Lambda L_{2,\rho}(a,b) \subset L_n\big\}\colon L_n \subset L_{2,\rho}(a,b)\Big\},$$

$$d^n\big(\mathfrak{M}; L_{2,\rho}(a,b)\big) = \inf\Big\{\inf\big\{\|f\|_{2,\rho}\colon f \in \mathfrak{M} \cap L^n\big\}\colon L^n \subset L_{2,\rho}(a,b)\Big\},$$

$$\Pi_n\big(\mathfrak{M}; L_{2,\rho}(a,b)\big) =$$

$$= \inf\Big\{\inf\big\{\sup\big\{\|f - \Lambda^\perp f\|_{2,\rho}\colon f \in \mathfrak{M}\big\}\colon \Lambda^\perp L_{2,\rho}(a,b) \subset L_n\big\}\colon L_n \subset L_{2,\rho}(a,b)\Big\}$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским и проекционным поперечниками подмножества $\mathfrak{M}$ в пространстве $L_{2,\rho}(a,b)$. Поскольку, как отмечалось ранее, пространство $L_{2,\rho}(a,b)$ с соответствующим образом введенным скалярным произведением является гильбертовым, между введенными экстремальными характеристиками подмножества $\mathfrak{M}$ имеют место следующие соотношения (см., например, [41]):

$$b_n\big(\mathfrak{M}; L_{2,\rho}(a,b)\big) \leqslant d^n\big(\mathfrak{M}; L_{2,\rho}(a,b)\big) \leqslant d_n\big(\mathfrak{M}; L_{2,\rho}(a,b)\big) =$$

$$= \Pi_n\big(\mathfrak{M}; L_{2,\rho}(a,b)\big) = \delta_n\big(\mathfrak{M}; L_{2,\rho}(a,b)\big). \tag{42}$$

Пусть $H \in (0,1)$, $p \in (0,2]$, $r, k \in \mathbb{N}$, φ — неотрицательная суммируемая на интервале $(0,H)$ неэквивалентная нулю измеримая функция. Через $HW^r_{2,p}(\Omega_{k,\rho};\varphi)$ обозначим класс, состоящий из функций $f \in L^r_2(D_\rho)$, у которых $D^r_\rho(f)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^H \Omega^p_{k,\rho}\big(D^r_\rho(f), t\big)\varphi(t)dt \leqslant 1.$$

Теорема 3. *Имеют место равенства*

$$q_n\big(HW^r_{2,p}(\Omega_{k,\rho};\varphi); L_{2,\rho}(a,b)\big) = E_n\big(HW^r_{2,p}(\Omega_{k,\rho};\varphi)\big)_{2,\rho} =$$

$$= \lambda_n^{-r}(\rho)\left\{\int\limits_0^H \big(1-(1-t)^n\big)^{kp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}, \tag{43}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $0 < p \leqslant 2$, $q_n(\cdot)$ — *любой из поперечников, перечисленных выше,*

$$E_n\big(HW^r_{2,p}(\Omega_{k,\rho};\varphi)\big)_{2,\rho} := \sup\big\{E_n(f)_{2,\rho} \colon f \in HW^r_{2,p}(\Omega_{k,\rho};\varphi)\big\}.$$

Доказательство. Используя определение класса $HW^r_{2,p}(\Omega_{k,\rho};\varphi)$, соотношения (21) и (42), получаем оценки сверху рассматриваемых экстремальных характеристик

$$q_n\big(HW^r_{2,p}(\Omega_{k,\rho};\varphi); L_{2,\rho}(a,b)\big) \leqslant d_n\big(HW^r_{2,p}(\Omega_{k,\rho};\varphi); L_{2,\rho}(a,b)\big) \leqslant$$

$$\leqslant E_n\big(HW^r_{2,p}(\Omega_{k,\rho};\varphi)\big)_{2,\rho} \leqslant \lambda_n^{-r}(\rho)\left\{\int\limits_0^H \big(1-(1-t)^n\big)^{kp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{44}$$

Для получения оценок снизу на множестве $\mathcal{P}_n \cap L_{2,\rho}(a,b)$ рассмотрим шар

$$\mathbb{B}_{n+1} := \left\{Q_n \in \mathcal{P}_n \colon \|Q_n\|_{2,\rho} \leqslant \lambda_n^{-r}(\rho)\left(\int\limits_0^H \big(1-(1-t)^n\big)^{kp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}\right\}$$

и покажем его принадлежность классу $HW^r_{2,p}(\Omega_{k,\rho};\varphi)$. Для произвольного полинома $Q_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j\widehat{P}_j(x)$, являющегося элементом множества $\mathbb{B}_{n+1}$, на основании формул (25), (36) и монотонного возрастания элементов последовательности $\big\{\lambda_j(\rho)\big\}_{j\in\mathbb{N}}$ имеем

$$\Omega_{k,\rho}\big(D^r_\rho(Q_n), t\big) = \left\{\sum_{j=1}^n \big(1-(1-t)^j\big)^{2k}\lambda_j^{2r}(\rho)a_j^2\right\}^{1/2} \leqslant \lambda_n^r(\rho)(1-(1-t)^n)^k\|Q_n\|_{2,\rho}. \tag{45}$$

Возводя левую и правую части неравенства (45) в степень p, умножая их затем на функцию φ и интегрируя обе части полученного таким образом неравенства по переменной t в пределах от 0 до H, имеем

$$\int\limits_0^H \Omega_{k,\rho}^p\big(D_\rho^r(Q_n),t\big)\varphi(t)dt \leqslant \lambda_n^{rp}(\rho)\|Q_n\|_{2,\rho}^p\int\limits_0^H (1-(1-t)^n)^{kp}\varphi(t)dt \leqslant 1.$$

Следовательно, $\mathbb{B}_{n+1}\subset HW_{2,p}^r(\Omega_{k,\rho};\varphi)$. Используя определение бернштейновского поперечника и соотношение (42), записываем

$$q_n\big(HW_{2,p}^r(\Omega_{k,\rho};\varphi);L_{2,\rho}(a,b)\big)\geqslant b_n\big(HW_{2,p}^r(\Omega_{k,\rho};\varphi);L_{2,\rho}(a,b)\big)\geqslant$$

$$\geqslant b_n\big(\mathbb{B}_{n+1};L_{2,\rho}(a,b)\big)_{2,\rho}\geqslant \lambda_n^{-r}(\rho)\left\{\int\limits_0^H\big(1-(1-t)^n\big)^{kp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{46}$$

Требуемые равенства (43) следуют из сопоставления оценок сверху (44) и снизу (46), что и завершает доказательство теоремы 3.

Изучением на некоторых классах функций поведения коэффициентов ряда Фурье, полученных для определенных систем ортогональных с весом полиномов, в разное время занимались С. З. Рафальсон, В. А. Абилов, Б. А. Халилова и другие (см., например, [10, 14, 23]). С нашей точки зрения данный вопрос представляет интерес и в рассматриваемом случае.

***Следствие* 3.** *Пусть n принадлежит $\mathbb{N}$, $0<p\leqslant 2$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup\big\{\big|c_n(f)\big|:\, f\in HW_{2,p}^r(\Omega_{k,\rho};\varphi)\big\}=\lambda_n^{-r}(\rho)\left\{\int\limits_0^H(1-(1-t)^n)^{kp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{47}$$

Доказательство. Для произвольной функции $f\in L_{2,\rho}(a,b)$ и $n\in\mathbb{N}$ запишем

$$c_n(f)=\int\limits_a^b\rho(x)f(x)\widehat{P}_n(x)dx=\int\limits_a^b\rho(x)\big(f(x)-S_{n-1}(f,x)\big)\widehat{P}_n(x)dx=$$

$$=\int\limits_a^b\left\{\rho^{1/2}(x)\big(f(x)-S_{n-1}(f,x)\big)\right\}\left\{\rho^{1/2}(x)\widehat{P}_n(x)\right\}dx, \tag{48}$$

где $S_{n-1}(f)$ — частная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье функции f, построенного по системе полиномов $\{\widehat{P}_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, ортонормированных с весом ρ на (a,b). Используя неравенство Коши – Буняковского и формулу (7), из равенства (48) имеем

$$\big|c_n(f)\big|\leqslant\big\|f-S_{n-1}(f)\big\|_{2,\rho}\|\widehat{P}_n\|_{2,\rho}=E_n(f)_{2,\rho}. \tag{49}$$

Из формул (43) и (49) получаем оценку сверху исследуемой экстремальной характеристики

$$\sup\left\{\big|c_n(f)\big|:\, f\in HW_{2,p}^r(\Omega_{k,\rho};\varphi)\right\}\leqslant E_n\big(HW_{2,p}^r(\Omega_{k,\rho};\varphi)\big)_{2,\rho}=$$

$$= \lambda_n^{-r}(\rho)\left\{\int\limits_0^H \big(1-(1-t)^n\big)^{kp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{50}$$

Для получения оценки снизу величины, записанной в левой части неравенства (50), рассмотрим функцию

$$\widetilde{f}(x) := \lambda_n^{-r}(\rho)\left\{\int\limits_0^H \big(1-(1-t)^n\big)^{kp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}\widehat{P}_n(x),$$

которая, как нетрудно убедиться, является элементом множества $\mathbb{B}_{n+1}$, введенного при доказательстве теоремы 3. Поскольку $\mathbb{B}_{n+1}\subset HW_{2,p}^r(\Omega_{k,\rho};\varphi)$, то и функция $\widetilde{f}$ принадлежит данному классу. Поэтому

$$\sup\Big\{\big|c_n(f)\big|\colon f\in HW_{2,p}^r(\Omega_{k,\rho};\varphi)\Big\}\geqslant\big|c_n(\widetilde{f})\big| =$$

$$= \lambda_n^{-r}(\rho)\left\{\int\limits_0^H \big(1-(1-t)^n\big)^{kp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{51}$$

Сопоставляя оценку сверху (50) с оценкой снизу (51), получаем требуемое равенство (47).

Следствие 2 доказано.

8. Неубывающую на $[0,\infty)$ функцию Φ называют k-мажорантой (см., например, [43, с. 25]), если функция $\Phi(t)/t^k$, где $k\in\mathbb{N}$, не возрастает на $(0,\infty)$, $\Phi(0)=0$ и при $t\to 0$ имеем $\Phi(t)\to 0$. Множество всех k-мажорант обозначим символом $\mathfrak{F}^k$.

Символом $W_{2,k}^r(\mathbb{K}_{m,\rho};\Phi)$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $m,k\in\mathbb{N}$, обозначим класс функций $f\in L_2^r(D_\rho)$, для которых функция $D_\rho^r(f)$ удовлетворяет условию

$$\mathbb{K}_m\big(D_\rho^r(f),t^m\big)_{2,\rho}\leqslant\Phi(t^m),$$

где $0<t\leqslant 1$ — любое число. Здесь Φ — произвольная функция из множества $\mathfrak{F}^k$. В случае $k=1$ вместо символа $W_{2,1}^r(\mathbb{K}_{m,\rho};\Phi)$ всюду далее будем использовать обозначение $W_2^r(\mathbb{K}_{m,\rho};\Phi)$.

Теорема 4. *Для любого натурального числа n имеют место следующие равенства*:

$$q_n\big(W_2^r(\mathbb{K}_{m,\rho};\Phi);L_{2,\rho}(a,b)\big)=E_n\big(W_2^r(\mathbb{K}_{m,\rho};\Phi)\big)_{2,\rho}=\lambda_n^{-r}(\rho)\Phi\big(\lambda_n^{-m}(\rho)\big), \tag{52}$$

где $r\in\mathbb{Z}_+$, $m\in\mathbb{N}$, $q_n(\cdot)$ — любой из поперечников, рассмотренных ранее.

Доказательство. Используя соотношения (42) и (31), а также определение класса $W_2^r(\mathbb{K}_{m,\rho};\Phi)$, получаем оценки сверху

$$q_n\big(W_2^r(\mathbb{K}_{m,\rho};\Phi);L_{2,\rho}(a,b)\big)\leqslant d_n\big(W_2^r(\mathbb{K}_{m,\rho};\Phi);L_{2,\rho}(a,b)\big)\leqslant E_n\big(W_2^r(\mathbb{K}_{m,\rho};\Phi)\big)_{2,\rho}=$$

$$=\sup\big\{E_n(f)_{2,\rho}\colon f\in W_2^r(\mathbb{K}_{m,\rho};\Phi)\big\}\leqslant\lambda_n^{-r}(\rho)\Phi\big(\lambda_n^{-m}(\rho)\big). \tag{53}$$

Для получения оценок снизу рассматриваемых экстремальных характеристик воспользуемся формулой (42) и определением бернштейновского поперечника, предварительно показав справедливость включения $\widetilde{\mathbb{B}}_{n+1} \subset W_2^r(\mathbb{K}_{m,\rho};\Phi)$, где

$$\widetilde{\mathbb{B}}_{n+1} := \Big\{Q_n \in \mathcal{P}_n \colon \big\|Q_n\big\|_{2,\rho} \leqslant \lambda_n^{-r}(\rho)\Phi\big(\lambda_n^{-m}(\rho)\big)\Big\}.$$

Поскольку функция Φ, в силу определения класса $W_2^r(\mathbb{K}_{m,\rho};\Phi)$, принадлежит множеству $\mathfrak{F}^1$, для любых значений $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant 1$ выполняется неравенство

$$\frac{\Phi(x_1)}{x_1} \geqslant \frac{\Phi(x_2)}{x_2}. \tag{54}$$

Полагая $x_1 := t_1^m, x_2 := t_2^m$, где $0 < t_1 \leqslant t_2 < 1$, из (54) имеем

$$\frac{\Phi(t_1^m)}{\Phi(t_2^m)} \geqslant \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^m. \tag{55}$$

Нам также понадобится неравенство

$$\big\|D_\rho^{r+m}(Q_n)\big\|_{2,\rho} \leqslant \lambda_n^{r+m}(\rho)\|Q_n\|_{2,\rho}, \quad Q_n \in \mathcal{P}_n, \tag{56}$$

вытекающее из соотношения (37).

Пусть $0 < t \leqslant 1/\lambda_n(\rho)$. Используя неравенство (55), в котором полагаем $t_1 := t$, $t_2 :=$ $:= 1/\lambda_n(\rho)$, а также применяя второе неравенство из соотношения (38) и неравенство (56), для произвольного полинома $Q_n \in \widetilde{\mathbb{B}}_{n+1}$ получаем

$$\mathbb{K}_m\big(D_\rho^r(Q_n), t^m\big)_{2,\rho} \leqslant t^m\big\|D_\rho^{r+m}(Q_n)\big\|_{2,\rho} \leqslant \lambda_n^{r+m}(\rho)t^m\|Q_n\|_{2,\rho} \leqslant$$

$$\leqslant t^m\lambda_n^m(\rho)\Phi\big(\lambda_n^{-m}(\rho)\big) \leqslant \Phi(t^m). \tag{57}$$

Далее полагаем $1/\lambda_n(\rho) \leqslant t < 1$. Используя первое неравенство в соотношении (38) и неравенство (37), а также учитывая, что Φ — неубывающая функция, для произвольного полинома $Q_n \in \widetilde{\mathbb{B}}_{n+1}$ записываем

$$\mathbb{K}_m\big(D_\rho^r(Q_n), t^m\big)_{2,\rho} \leqslant \big\|D_\rho^r(Q_n)\big\|_{2,\rho} \leqslant \lambda_n^r(\rho)\|Q_n\|_{2,\rho} \leqslant \Phi\big(\lambda_n^{-m}(\rho)\big) \leqslant \Phi(t^m). \tag{58}$$

Следовательно, множество $\widetilde{\mathbb{B}}_{n+1}$ принадлежит классу $W_2^r(\mathbb{K}_{m,\rho};\Phi)$. Из изложенного и формулы (42) имеем

$$q_n\big(W_2^r(\mathbb{K}_{m,\rho};\Phi); L_{2,\rho}(a,b)\big) \geqslant b_n\big(W_2^r(\mathbb{K}_{m,\rho};\Phi); L_{2,\rho}(a,b)\big) \geqslant$$

$$\geqslant b_n\big(\widetilde{\mathbb{B}}_{n+1}; L_{2,\rho}(a,b)\big) \geqslant \lambda_n^{-r}(\rho)\Phi\big(\lambda_n^{-m}(\rho)\big). \tag{59}$$

Равенства (52) получаем, сравнивая оценки сверху (53) и оценки снизу (59).

Теорема 4 доказана.

***Следствие* 4.** *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup\Big\{\big|c_n(f)\big| \colon f \in W_2^r(\mathbb{K}_{m,\rho};\Phi)\Big\} = \lambda_n^{-r}(\rho)\Phi\big(\lambda_n^{-m}(\rho)\big).$$

Доказательство данного следствия не приводится, поскольку оно, в общих чертах, повторяет доказательство следствия 3.

В заключение отметим, что множество функций $\mathfrak{F}^1$ является достаточно широким, так как ему принадлежит, например, любой заданный на отрезке $[0,1]$ выпуклый вверх модуль непрерывности, и для него неравенство (54) выполняется автоматически. Другие примеры функций, принадлежащих множеству $\mathfrak{F}^1$, можно найти в работах [39, 40].

1. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1978. – 320 с.
2. *Абилов В. А., Абилова Ф. В., Керимов М. К.* Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в пространстве $L_2\big((a,b),p(x)\big)$ // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2009. – **49**, № 6. – С. 966 – 980.
3. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980. – 608 с.
4. *Джексон Д.* Ряды Фурье и ортогональные полиномы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 260 с.
5. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.
6. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. – Изд. 3-е. – М.: Физматлит, 2007. – 480 с.
7. *Потапов М. К.* О приближении непериодических функций алгебраическими полиномами // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1960. – **4**. – С. 14 – 25.
8. *Яхнин В. М.* Об остаточных членах разложения в ряд Фурье по полиномам Якоби функций, r-я производная которых удовлетворяет условию Липшица // Укр. мат. журн. – 1960. – **12**, № 2. – С. 194 – 204.
9. *Жидков Г. В.* Конструктивная характеристика одного класса непериодических функций // Докл. АН СССР. – 1969. – **169**, № 5. – С. 1002 – 1005.
10. *Рафальсон С. З.* О приближении функций в среднем суммами Фурье – Якоби // Изв. вузов. Математика. – 1968. – № 4. – С. 54 – 62.
11. *Рафальсон С. З.* О приближении функций в среднем суммами Фурье – Эрмита // Изв. вузов. Математика. – 1968. – № 7. – С. 78 – 84.
12. *Фройд Г.* Об аппроксимации с весом алгебраическими многочленами на действительной оси // Докл. АН СССР. – 1970. – **191**, № 2. – С. 293 – 294.
13. *Джафаров А. С.* Осредненные модули непрерывности и некоторые связи их с наилучшими приближениями // Докл. АН СССР. – 1977. – **236**, № 2. – С. 288 – 291.
14. *Халилова Б. А.* О коэффициентах Фурье – Якоби и о приближении функций ультрасферическими многочленами // Изв. АН АзербССР. Сер. физ.-тех. и мат. наук. – 1973. – № 2. – С. 87 – 94.
15. *Моторный В. П.* О сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Лежандра // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1973. – **37**, № 1. – С. 135 – 147.
16. *Бадков В. М.* Аппроксимативные свойства рядов Фурье по ортогональным полиномам // Успехи мат. наук. – 1978. – **33**, № 4. – С. 51 – 106.
17. *Федоров В. М.* Приближение алгебраическими многочленами с весом Чебышева – Эрмита // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 6. – С. 55 – 63.
18. *Алексеев Д. В.* Приближение полиномами с весом Чебышева – Эрмита на действительной оси // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1997. – № 6. – С. 68 – 71.
19. *Абилов В. А.* Приближение функций суммами Фурье – Лагерра // Мат. заметки. – 1995. – **57**, № 2. – С. 163 – 170.
20. *Абилов В. А., Абилова Ф. В.* Приближение функций алгебраическими полиномами в среднем // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 3. – С. 61 – 63.
21. *Абилов М. В., Айгунов Г. А.* Некоторые вопросы приближения функций многих переменных суммами Фурье в пространстве $L_2\big((a,b)^n;p(x)\big)$ // Успехи мат. наук. – 2004. – **59**, № 6. – С. 201 – 202.
22. *Бабенко А. Г.* Точное неравенство Джексона – Стечкина для L^2-приближений на полупрямой с весом Лагерра // Труды Междунар. школы С. Б.Стечкина по теории функций (Россия, Миасс Челябинской обл., 24 июля – 3 августа 1998 г.). – Екатеринбург: Ин-т математики и механики УрОРАН. – 1999. – С. 38 – 63.
23. *Вакарчук С. Б.* О неравенствах типа Джексона в $L_2[-1,1]$ и точных значениях n-поперечников функциональных классов // Укр. мат. вісн. – 2006. – **3**, № 41. – С. 102 – 119.
24. *Корнейчук Н. П.* Точная константа в теореме Д.Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. – 1962. – **145**, № 3. – С. 514 – 515.

25. *Черных Н. И.* О неравенстве Джексона в L_2 // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 71 – 74.
26. *Тайков Л. В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности в L_2 // Мат. заметки. – 1976. – **20**, № 3. – С. 433 – 438.
27. *Лигун А. А.* Точные неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Мат. заметки. – 1978. – **24**, № 6. – С. 785 – 792.
28. *Бабенко А. Г.* О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Мат. заметки. – 1986. – **39**, № 5. – С. 651 – 664.
29. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Прямые и обратные теоремы теории приближения функций в пространстве S^p // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 1. – С. 106 – 124.
30. *Сердюк А. С.* Поперечники в просторі S^p класів функцій, що означаються модулями неперервності їх ψ-похідних // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 229 – 248.
31. *Вакарчук С. Б.* Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Мат. заметки. – 2006. – **80**, № 1. – С. 11 – 19.
32. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* Точные неравенства типа Джексона – Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Мат. заметки. – 2009. – **86**, № 3. – С. 328 – 336.
33. *Иванов В. И., Смирнов О. И.* Константы Джексона и константы Юнга в пространстве L_p. – Тула: Тул. ун-т, 1995. – 192 с.
34. *Даугавет И. К.* Введение в теорию приближения функций. – Л.: Ленингр. гос. ун-т, 1977. – 184 с.
35. *Потапов М. К.* О применении одного оператора обобщенного сдвига в теории приближений // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1998. – № 3. – С. 38 – 48.
36. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
37. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. – New York: Springer-Verlag, 1985. – 290 p.
38. *Берг И., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. – М.: Мир, 1980. – 264 с.
39. *Вакарчук С. Б.* K-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из L_2 // Мат. заметки. – 1999. – **66**, № 4. – С. 494 – 499.
40. *Вакарчук С. Б.* О K-функционалах и точных значениях n-поперечников некоторых классов в пространствах $C(2\pi)$ и $L_1(2\pi)$ // Мат. заметки. – 2002. – **71**, № 4. – С. 522 – 531.
41. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Моск. ун-т, 1976. – 304 с.
42. *Абилов В. А.* О коэффициентах ряда Фурье – Эрмита непрерывных функций // Изв. вузов. Математика. – 1969. – № 12. – С. 3 – 8.
43. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 225 с.

Получено 07.11.12