УДК 512.542

В. Ф. Велесницкий, В. Н. Семенчук (Гомел. гос. ун-т им. Ф. Скорины, Беларусь)

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

We study the Kegel–Shemetkov problem of finding the classes of finite groups $\mathfrak{F}$ such that, in any finite group, the product of permutational $\mathfrak{F}$-subnormal groups is a $\mathfrak{F}$-subnormal subgroup.

Розглянуто проблему Кегеля – Шеметкова про знаходження класів скінченних груп $\mathfrak{F}$ таких, що в будь-якій скінченній групі добуток переставних $\mathfrak{F}$-субнормальних підгруп є $\mathfrak{F}$-субнормальною підгрупою.

Все рассматриваемые в статье группы конечны. Согласно классической теореме Виландта [1], множество всех субнормальных подгрупп в любой конечной группе образует решетку. Развивая этот результат, Кегель [2] установил, что множество всех $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп в любой конечной группе образует решетку, если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, замкнутая относительно расширения.

В теории классов конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности($\mathfrak{F}$-достижимости). Напомним эти понятия.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппу H группы G называют $\mathfrak{F}$-*субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Несколько другое понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности введено Кегелем в работе [2]. Фактически оно объединяет понятие субнормальности и $\mathfrak{F}$-субнормальности.

Подгруппу H называют $\mathfrak{F}$-*субнормальной в смысле Кегеля* или $\mathfrak{F}$-*достижимой*, если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

В настоящее время $\mathfrak{F}$-субнормальные ($\mathfrak{F}$-достижимые) подгруппы называют обобщенно субнормальными подгруппами.

В 1978 году Кегель и Шеметков поставили следующую проблему.

Проблема 1 [2, 3]. *Найти классы групп $\mathfrak{F}$, обладающие тем свойством, что в любой конечной группе множество всех обобщенно субнормальных подгрупп образует решетку.*

Полное решение проблемы 1 о нахождении наследственных насыщенных формаций $\mathfrak{F}$, обладающих решеточным свойством для $\mathfrak{F}$-достижимых ($\mathfrak{F}$-субнормальных) подгрупп в классе разрешимых групп, получили Баллестер-Болинше, Дерк и Перец-Рамош в работе [4], а в произвольном случае Васильев, Каморников, Семенчук [5].

© В. Ф. ВЕЛЕСНИЦКИЙ, В. Н. СЕМЕНЧУК, 2013

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ обладает решеточным свойством, если в любой группе G для любых ее $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп H и K подгруппы $\langle H, K\rangle$ и $H \cap K$ $\mathfrak{F}$-субнормальны в G.

Если условия порождения $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп заменить более слабым условием — произведением перестановочных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, а также опустить условие насыщенности формаций $\mathfrak{F}$, то проблема 1 обобщается следующим образом.

Проблема 2. *Найти классы групп $\mathfrak{F}$ такие, что для любой группы G и для любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-субнормальных ($\mathfrak{F}$-достижимых) подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-субнормальна ($\mathfrak{F}$-достижима) в G.*

В настоящей статье найдены непустые наследственные формации $\mathfrak{F}$, удовлетворяющие условиям, сформулированным в проблеме 2. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная сверхрадикальная формация. Тогда для любой группы G и любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

В дальнейшем нам потребуются следующие определения и обозначения.

Пусть π — некоторое множество простых чисел, $\mathfrak{G}_\pi$ — класс всех π-групп, $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп. Через π' обозначим дополнение к π во множестве всех простых чисел; если $\pi = \{p\}$, то вместо π' будем писать p'.

Если $\mathfrak{F}$ — класс групп и G — группа, то корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ — пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Формация — класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений.

Обозначим через $\pi(\mathfrak{F})$ множество всех простых чисел p, для которых в $\mathfrak{F}$ имеется неединичная p-группа.

Формация $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{X}$-сверхрадикальной, если любая группа $G \in \mathfrak{X}$ такая, что $G = AB$, где $A, B \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$-субнормальны в G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{X}$ — класс всех групп, то $\mathfrak{X}$-сверхрадикальная формация называется сверхрадикальной.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — непустые формации конечных групп. Напомним, что произведением формаций называется $\mathfrak{F}\mathfrak{X} = \{G \mid G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{F}\}$.

Если $\mathfrak{F}$ — класс групп, то группа G называется минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, если она не принадлежит $\mathfrak{F}$, а любая ее собственная подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$. Множество всех таких минимальных не $\mathfrak{F}$-групп обозначается через $M(\mathfrak{F})$.

Приведем известные свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если H — подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G;*

2) *если H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то $H \cap K$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа K для любой подгруппы K группы G.*

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, H и N — подгруппы группы G, причем N нормальна в G. Тогда:*

1) *если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то HN $\mathfrak{F}$-субнормальна в G и HN/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N;*

2) *если* $N \subseteq H$, *то* H $\mathfrak{F}$-*субнормальна в* G *тогда и только тогда, когда* H/N $\mathfrak{F}$-*субнормальна в* G/N.

Лемма 3 [7]. *Пусть* $W = Z_{p^{n-1}} \wr Z_p$ *и* B — *база сплетения,* $p \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) W *содержит субнормальную подгруппу, изоморфную* Z_{p^n};

2) *если* $M = [B, Z_p]$, $N = MZ_p$ *и* $\omega \in N \setminus M$, *то* $\omega^p = 1$;

3) $W = BN$, *где* B *и* N — *нормальные подгруппы* W *экспоненты* p^{n-1}, $n \geq 2$.

Лемма 4. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *непустая наследственная* $\mathfrak{S}$-*сверхрадикальная формация. Тогда* $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$.

Доказательство. Вначале докажем, что любая примарная минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является циклической. Пусть $G \in M(\mathfrak{F})$ и G — p-группа. Если G не циклическая, то в G найдутся две различные максимальные подгруппы M_1 и M_2. Ясно, что они нормальны в G и $G/M_i \in \mathfrak{F}$, $M_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M_i$. Согласно лемме 1 M_1, M_2 — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G. Поскольку $G = M_1M_2$ и $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{S}$-сверхрадикальная формация, то $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно.

Покажем, что $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим противное и пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \setminus \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}$ — наследственная формация, то G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Покажем, что G — примарная группа. Пусть $\left|\pi(G)\right| > 1$. Поскольку G нильпотентна, то $G = A \times B$. Очевидно, что $G/A \in \mathfrak{F}$ и $G/B \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, то $G \simeq G/A \cap B \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Итак, G — p-группа. Выше было показано, что G — циклическая p-группа. Пусть $|G| = p^n$, где n — некоторое фиксированное натуральное число.

Если $n = 1$, то G — группа простого порядка p. Поскольку $G \in \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}$, где $\pi(\mathfrak{F})$ — характеристика формации $\mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно.

Пусть $n > 1$. Рассмотрим группу $W = Z_{p^{n-1}} \wr Z_p$. Тогда $W = BZ_p$, где B — база сплетения. По лемме 3 W содержит подгруппу P, изоморфную G. Так как $P \in M(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то W не принадлежит $\mathfrak{F}$.

Согласно лемме 3 $W = BN$, где B и N — нормальные подгруппы группы W экспоненты p^{n-1}. Заметим, что $B \in \mathfrak{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $W/B \in \mathfrak{F}$ и $W/N \in \mathfrak{F}$. А это значит, что $W^{\mathfrak{F}} \subseteq B \cap N$. Согласно лемме 1 B и N — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы W. Так как $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{S}$-сверхрадикальная формация, то $W \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Лемма доказана.

***Доказательство теоремы* 1** проведем индукцией по порядку группы G. Пусть A и B — перестановочные $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G. Обозначим $T = AB$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Учитывая лемму 2, по индукции получаем, что TN/N — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа G/N. По лемме 2 TN — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Если $TN \neq G$, то по индукции T — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа из TN, а это значит, что T $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

Пусть теперь $TN = G$ для любой нормальной подгруппы N группы G. Очевидно, что $T_G = 1$. Если $A^{\mathfrak{F}} \neq 1$, то в силу леммы 1 подгруппа $A^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Но тогда по теореме 7.10 из [3]

$$1 \neq (A^{\mathfrak{F}})^G = (A^{\mathfrak{F}})^{TN} \subseteq T.$$

А это значит, что $T_G \neq 1$. Получили противоречие. Значит, $A^{\mathfrak{F}} = 1$. Аналогичным образом доказывается, что $B^{\mathfrak{F}} = 1$.

Покажем, что $AN \in \mathfrak{F}$, $BN \in \mathfrak{F}$. Рассмотрим следующие два случая:

1. Пусть N — абелева подгруппа. Так как N — минимальная нормальная подгруппа группы G, то N — p-группа. Покажем, что $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Поскольку $AN/N \simeq A/A \cap N$ и $A \in \mathfrak{F}$, то $AN/N \in \mathfrak{F}$. Отсюда $(AN)^{\mathfrak{F}} \subseteq N$.

Пусть $(AN)^{\mathfrak{F}} = N$. Поскольку A — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то по лемме 1 A — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в AN. Так как $A \in \mathfrak{F}$, то, очевидно, что A — собственная подгруппа AN. Тогда $A \subseteq M$, где M — максимальная $\mathfrak{F}$-нормальная подгруппа в AN. Ясно, что $(AN)^{\mathfrak{F}} \subseteq M$. Тогда $A(AN)^{\mathfrak{F}} = AN \subset M$, что невозможно. Итак, $(AN)^{\mathfrak{F}} \subset N$. Теперь из того факта, что $AN/(AN)^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $p \in \pi\big(AN/(AN)^{\mathfrak{F}}\big)$, следует, что $p \in \pi(\mathfrak{F})$. По лемме 4 $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $N \in \mathfrak{F}$. Согласно лемме 1 N — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа AN. Так как $\mathfrak{F}$ — сверхрадикальная формация, то $AN \in \mathfrak{F}$. Аналогичным образом получаем, что $BN \in \mathfrak{F}$.

2. Пусть N — неабелева подгруппа. Тогда

$$N = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_t$$

— прямое произведение изоморфных неабелевых простых групп. Поскольку $A \in \mathfrak{F}$, то $AN/N \in \mathfrak{F}$. Отсюда $(AN)^{\mathfrak{F}} \subseteq N$. Если $(AN)^{\mathfrak{F}} = N$, то $AN = (AN)^{\mathfrak{F}}A$. Если A — собственная подгруппа AN, то $A \subseteq M$, где M — максимальная $\mathfrak{F}$-нормальная подгруппа в AN. Так как $(AN)^{\mathfrak{F}} \subseteq M$, то $M = AN$, что невозможно. Итак, $A = AN$ и $AN \in \mathfrak{F}$. Пусть теперь $(AN)^{\mathfrak{F}} \subset N$. Если $(AN)^{\mathfrak{F}} \neq 1$, то

$$(AN)^{\mathfrak{F}} = N_{i_1} \times N_{i_2} \times \ldots \times N_{i_n}.$$

Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $N/(AN)^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Но тогда нетрудно заметить, что $N \in \mathfrak{F}$. Согласно лемме 1 N — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа AN. Так как $\mathfrak{F}$‘— сверхрадикальная формация, то $AN \in \mathfrak{F}$. Аналогичным образом получаем, что $BN \in \mathfrak{F}$. По лемме 2 AN и BN — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G. Поскольку $\mathfrak{F}$‘— сверхрадикальная формация, то $G \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то T — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G.

Теорема доказана.

Обозначим через I некоторое подмножество из $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Пусть π_i, π_j — некоторые множества простых чисел, а $\mathfrak{G}_{\pi_i}$, $\mathfrak{G}_{\pi_j}$ — классы всех π_i-групп и π_j-групп соответственно. В дальнейшем мы рассматриваем формации вида

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j)\in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}.$$

Напомним, что группа G называется p-замкнутой (p-нильпотентной), если ее силовская p-подгруппа (силовское p-дополнение) нормальна в G. Группа G называется p-разложимой, если она одновременно p-замкнута и p-нильпотентна. Тогда $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p$ — класс всех p-нильпотентных групп, $\mathfrak{G}_p\mathfrak{G}_{p'}$ — класс всех p-замкнутых групп, $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p \bigcap \mathfrak{G}_p\mathfrak{G}_{p'}$ — класс всех p-разложимых групп, $\mathfrak{N} = \bigcap \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p$ — класс всех нильпотентных групп, где p пробегает все простые числа.

Группа G называется π-нильпотентной (π-разложимой), если она p-нильпотентна (p-разложима) для любого простого числа p из π. Классы всех π-нильпотентных (π-разложимых) групп можно записать в виде

$$\bigcap_{p\in\pi} \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p \bigcap_{p\in\pi} \left(\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p \bigcap \mathfrak{G}_p\mathfrak{G}_{p'}\right).$$

Группа G называется π-замкнутой, если она имеет нормальную π-холлову подгруппу. Тогда $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{G}_{\pi'}$ — класс всех π-замкнутых групп.

В работе [8] доказано, что формации вида $\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j)\in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$ являются сверхрадикальными.

Таким образом, учитывая теорему 1, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — либо класс всех p-замкнутых групп, либо класс всех p-нильпотентных групп, либо класс всех p-разложимых групп, либо класс всех π-нильпотентных групп, либо класс всех π-разложимых групп, либо класс всех π-замкнутых групп. Тогда для любой группы G и для любых ее перестановочных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп H и K подгруппа HK $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Нетрудно показать, что полученные результаты также справедливы, если понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности заменить понятием $\mathfrak{F}$-достижимости.

1. *Wielandt H.* Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen // Math. Z. – 1958. – **69**, № 8. – S. 463 – 465.
2. *Kegel O.H.* Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die Subnormalteilerverband echt enthalten // Arch. Math. – 1978. – **30**, № 3. – S. 225 – 228.
3. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
4. *Ballester-Bolinches A., Döerk K., Perez-Ramos M. D.* On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups // J. Algebra. – 1992. – **148**, № 2. – P. 42 – 52.
5. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н.* О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. – Киев, 1993. – С. 27 – 54.
6. *Семенчук В. Н.* Разрешимые $\mathfrak{F}$-радикальные формации // Мат. заметки. – 1996. – **59**, № 2. – С. 261 – 266.
7. *Döerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
8. *Семенчук В. Н., Шеметков Л. А.* Сверхрадикальные формации // Докл. НАН Беларуси. – 2000. – **44**, № 5. – С. 24 – 26.

Получено 20.11.12