УДК 517.9

М. А. Нудельман (Интегр. банк. информ. системы, Одесса)

О НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПРОСТОЙ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ РАССЕЯНИЯ, КОТОРЫЕ МОГУТ БЫТЬ ПЕРЕВЕДЕНЫ В НОЛЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ВХОДОВ ИЗ l^2

We describe the lineal of initial data of a simple conservative scattering system which can be transferred to zero by a sequence from l^2. The proof is based on the known connection between the Lax – Phillips scattering theory and the theory of unitary operator nodes developed by B. Szökefalvi-Nagy, C. Foias, and M. S. Brodskii.

Описано лінеал початкових даних простої консервативної системи розсіювання, які можна перевести в нуль послідовністю входів з l^2. Доведення ґрунтується на відомому зв'язку між теорією розсіювання Лакса – Філліпса та теорією унітарних вузлів Б. Секефальві-Надя, Ч. Фояша та М. С. Бродського.

1. Предварительные сведения и формулировка результата. Рассмотрим линейную систему с дискретным временем λ вида

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B\xi_k, \\ \sigma_k &= Cx_k + D\xi_k, \\ k &= 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x_k \in X$, $\xi_k \in U$, $\sigma_k \in V$; пространство состояний X, пространство входов U и пространство выходов V — сепарабельные гильбертовы пространства (может быть, конечномерные); A, B, C, D — ограниченные линейные операторы.

В соответствии с принятой терминологией пространство управлений системы λ есть подпространство X_λ^c пространства X, которое определяется формулой

$$X_\lambda^c = \bigvee_{k=0}^{\infty} A^k BU$$

(здесь знак $\vee$ обозначает замыкание линейной оболочки), и пространство наблюдений системы λ есть подпространство X_λ^o пространства X, которое определяется формулой

$$X_\lambda^o = \bigvee_{k=0}^{\infty} A^{*k} C^* V.$$

Система λ называется простой, если $X = X_\lambda^c \vee X_\lambda^o$.

Если начальное данное x_0 системы λ равно 0, то действием конечной последовательности входов $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m$ эта система переходит в состояние

$$x_{m+1} = \sum_{k=0}^{m} A^k B \xi_{m-k} \tag{2}$$

и, таким образом, пространство управлений есть множество элементов пространства X, которые могут быть сколь угодно близко достижимы из нулевого начального условия конечной последовательностью входов; можно аналогично интерпретировать пространство наблюдений X_λ^o, если заменить систему λ сопряженной системой λ^*, которая определяется равенствами

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A^* x_k + C^* \xi_k, \\ \sigma_k &= B^* x_k + D^* \xi_k, \end{aligned} \tag{3}$$

где $x_k \in X$, $\xi_k \in V$, $\sigma_k \in U$.

Настоящая работа посвящена решению следующего вопроса: каковы начальные данные $x_0 = a$, для которых существует такая последовательность входов $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty} \subset U$, что $\sum_{k=0}^{\infty} \|\xi_k\|^2 < +\infty$ и $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = 0$. Этот вопрос исследуется для случая, когда λ — простая консервативная система рассеяния.

Напомним соответствующее определение [1]: система λ вида (1) называется консервативной системой рассеяния, если равенства (1) влекут равенство

$$\|x_{k+1}\|^2 - \|x_k\|^2 = \|\xi_k\|^2 - \|\sigma_k\|^2$$

и аналогичное равенство для системы λ^* вида (3).

Легко видеть, что это определение равносильно тому факту, что блочный оператор

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

который действует из $X \oplus U$ в $X \oplus V$, изометричен и сопряженный к нему оператор также изометричен. В другой терминологии [2] это означает, что пространства X, U, V и операторы A, B, C, D образуют унитарный узел.

Хорошо известна связь между теорией унитарных операторных узлов и теорией рассеяния Лакса – Филлипса (описание этой связи см., например, во введении к статье [3]). Центральным объектом теории Лакса – Филлипса является (в данном случае дискретная) унитарная группа операторов $\{W^k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, где W — унитарный оператор, действующий в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. В этом пространстве выделяются два подпространства $\mathfrak{D}_+$ и $\mathfrak{D}_-$, которые имеют следующие свойства:

1) $W\mathfrak{D}_+ \subset \mathfrak{D}_+$;

2) $\bigcap_{k=0}^{\infty} W^k \mathfrak{D}_+ = \{0\}$;

3) $W^* \mathfrak{D}_- \subset \mathfrak{D}_-$;

4) $\bigcap_{k=0}^{\infty} W^{*k} \mathfrak{D}_- = \{0\}$.

Каждому унитарному узлу (или, что равносильно, каждой консервативной системе рассеяния вида (1)) соответствует такая унитарная группа Лакса – Филлипса, для которой выполнены следующие соотношения:

$$\begin{gathered} \mathfrak{D}_+ \perp \mathfrak{D}_-, \\ \mathfrak{H} = \mathfrak{D}_+ \oplus X \oplus \mathfrak{D}_-, \\ \mathfrak{D}_+ \ominus W\mathfrak{D}_+ = V, \\ \mathfrak{D}_- \ominus W^* \mathfrak{D}_- = U. \end{gathered} \tag{4}$$

Использовав технику, разработанную в теории Лакса – Филлипса, мы докажем следующее утверждение.

Пусть M — множество тех начальных данных $x_0 = a \in X$ системы λ вида (1), для которых существует такая последовательность входов $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$, что $\sum_{k=0}^{\infty} \|\xi\|^2 < +\infty$ и $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = 0$.

Обозначим через $\mathring{X}_\lambda^o$ линейную оболочку $L(A^{*k}C^*V)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (таким образом, $X_\lambda^o = \overline{\mathring{X}_\lambda^o}$, где черта обозначает замыкание).

Пусть $\Theta(z) = D + zC(I - zA)^{-1}B$ — передаточная функция консервативной системы рассеяний λ (и в то же время характеристическая функция соответствующего унитарного узла и матрица рассеяния соответствующей унитарной группы Лакса – Филлипса; см. [1, 2, 4]). Известно, что эта функция принадлежит классу Шура сжимающих аналитических оператор-функций, которые определены в открытом единичном круге. Пусть $\Delta(\xi) = (I - \Theta(\xi)^*\Theta(\xi))^{1/2}$, где $\Theta(\xi)$ ($|\xi| = 1$) — граничные значения функции $\Theta(z)$.

Пусть $H^2(U)$ — пространство Харди, которое трактуется как подпространство пространства $L^2(U)$ на единичной окружности.

Теорема. *Для каждой простой консервативной системы рассеяния λ имеет место включение*

$$\mathring{X}_\lambda^o \subset M \subset X_\lambda^o. \tag{5}$$

Равенство $M = X_\lambda^o$ имеет место тогда и только тогда, когда линеал $\Delta(\xi)H^2(U)$ замкнут в топологии пространства $L^2(U)$.

2. Доказательство теоремы. Как было отмечено в п. 1, каждой консервативной системе рассеяния λ канонически соответствует некоторая унитарная группа Лакса – Филлипса $\{W^k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, для которой справедливо соотношение $\mathfrak{D}_- \perp \mathfrak{D}_+$. При этом простота системы λ равносильна соотношению

$$\left(\bigvee_{k=0}^{+\infty} W^{*k}\mathfrak{D}_+\right) \vee \left(\bigvee_{k=0}^{+\infty} W^{k}\mathfrak{D}_-\right) = \mathfrak{H}.$$

Известно (см., например, [3]), что эволюция унитарной полугруппы $\{W^k\}_{k=0}^{\infty}$ воспроизводит динамику системы λ в следующем смысле: подпространство $\mathfrak{D}_+ \subset \mathfrak{H}$ может быть канонически отождествлено с пространством $l^2(V)$ и подпространство $\mathfrak{D}_- \subset \mathfrak{H}$ может быть канонически отождествлено с пространством $l^2(U)$; если $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty} \subset l^2(U)$ — последовательность входов системы λ и

$$x_0 = a \in X \text{ — начальное данное,}$$

$$h = \operatorname{col}(\ldots, \lambda_3, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_0; a; \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$$

(здесь $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty} \subset l^2(U)$ интерпретируется как элемент $\mathfrak{D}_-$ и $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \subset l^2(V)$ — как элемент $\mathfrak{D}_+$), то

$$W^k h = \operatorname{col}(\ldots, \lambda_1, \lambda_0, \sigma_0, \ldots, \sigma_{k-2}, \sigma_{k-1}; x_k; \xi_k, \xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots). \tag{6}$$

Отсюда ясно, что множество M содержит те и только те элементы $a \in X$, для которых существует такое $d_- \in \mathfrak{D}_-$, что

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| P_X W^k(a + d_-)\right\| = 0 \tag{7}$$

(здесь и далее символом P_L обозначается оператор ортогонального проектирования на подпространство L).

Запишем вектор $W^k(a + d_-) \in \mathfrak{H}$ в виде

$$W^k(a+d_-) \;=\; \{d_n^+\}_{n=0}^{+\infty} \oplus P_X W^k(a+d_-) \oplus \{d_n^-\}_{n=0}^{+\infty}$$

в соответствии с ортогональным разложением (4).

Пусть выполнено предельное равенство (7). Поскольку в силу формулы (6) последовательность $\{d_n^-\}_{n=0}^{+\infty}$ стремится к нулю в метрике пространства $l^2(U)$ при $k \to \infty$, то получаем

$$0 \;=\; \lim_{k\to+\infty}\left\|P_X W^k(a+d_-)\right\| \;=\; \lim_{k\to+\infty}\left\|W^k(a+d_-) - \{d_n^+\}_{n=0}^{+\infty}\right\| \;=$$

$$=\; \lim_{k\to+\infty}\left\|a+d_- - W^{*k}\{d_n^+\}_{n=0}^{+\infty}\right\|$$

(напомним, что оператор W унитарен).

Таким образом, $a+d_- \in \bigvee_{k=0}^{+\infty} W^{*k}\mathfrak{D}_+$ и, следовательно,

$$a \in P_X \bigvee_{k=0}^{+\infty} W^{*k}\mathfrak{D}_+. \tag{8}$$

Обратно, пусть выполнено включение (8). Тогда существует вектор l такой, что $l \perp X$ и $a+l \in \bigvee_{k=0}^{+\infty} W^{*k}\mathfrak{D}_+$. В соответствии с ортогональным разложением (4) l представляется в виде $d_+ \oplus d_-$, где $d_+ \in \mathfrak{D}_+$, $d_- \in \mathfrak{D}_-$. Поскольку $\bigvee_{k=0}^{+\infty} W^{*k}\mathfrak{D}_+ \supset \mathfrak{D}_+$, то $d_+ \in \bigvee_{k=0}^{+\infty} W^{*k}\mathfrak{D}_+$ и, таким образом, $a+d_- \in \bigvee_{k=0}^{+\infty} W^{*k}\mathfrak{D}_+$. Далее, так как $\{W^{*k}\mathfrak{D}_+\}_{k=0}^{+\infty}$ — расширяющаяся последовательность множеств, т. е.

$$\mathfrak{D}_+ \subset W^*\mathfrak{D}_+ \subset W^{*2}\mathfrak{D}_+ \subset \ldots,$$

то существует последовательность $\{h_k\}_{k=0}^{+\infty} \subset \mathfrak{D}_+$ такая, что $a+d_- = \lim_{k\to+\infty} W^{*k}h_k$. Если теперь рассмотреть двойную последовательность $\{g_{kl}\}_{k,l=0}^{+\infty} \subset \mathfrak{H}$, где

$$g_{kl} \;=\; P_X W^l W^{*k} h_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

то будем иметь

$$\lim_{k\to\infty} g_{kl} \;=\; P_X W^l(a+d_-), \qquad l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

причем сходимость равномерна относительно l, поскольку

$$\left\|g_{kl} - P_X W^l(a+d_-)\right\| \;=\; \left\|P_X W^l W^{*k}h_k - P_X W^l(a+d_-)\right\| \;\le$$

$$\le\; \left\|W^l W^{*k}h_k - W^l(a+d_-)\right\| \;=\; \left\|W^{*k}h_k - (a+d_-)\right\|$$

(последнее равенство является следствием того, что оператор W унитарен). Имеем

$$\lim_{l\to+\infty} P_X W^l(a+d_-) \;=\; \lim_{l\to+\infty}\lim_{k\to+\infty} P_X W^l W^{*k}h_k \;=\; \lim_{l\to+\infty}\lim_{k\to+\infty} P_X W^{l-k}h_k.$$

Поскольку в предельном процессе (9) сходимость равномерна относительно l, то корректна перестановка предельных переходов и мы получаем

$$\lim_{l\to+\infty} P_X W^l(a+d_-) \;=\; \lim_{k\to+\infty}\lim_{l\to+\infty} P_X W^{l-k}h_k.$$

Но $h_k \in \mathfrak{D}_+$ при всех $k \ge 0$, поэтому при $l \ge k$ $P_X W^{l-k}h_k = 0$, откуда ясно, что последний повторный предел равен нулю, что доказывает равенство

$$M = P_X \bigvee_{k=0}^{+\infty} W^{*k} \mathfrak{D}_+. \tag{10}$$

Известно, что если эволюция полугруппы $\{W^k\}_{k=0}^{+\infty}$ описывает динамику системы λ, то эволюция полугруппы $\{W^{*k}\}_{k=0}^{+\infty}$ описывает динамику системы λ^*. Используя формулу (2), находим

$$P_X W^{*m} \mathfrak{D}_+ = L(A^{*k} C^* V), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m \tag{11}$$

(здесь L обозначает линейную оболочку). Из равенств (10) и (11) следует двойное включение (5).

Для завершения доказательства отметим, что в силу этого двойного включения равенство $M = X_\lambda^o$ равносильно тому факту, что множество M замкнуто.

С помощью простого геометрического рассуждения легко доказать следующее равенство:

$$\bigvee_{k=0}^{+\infty} W^{*k} \mathfrak{D}_+ \oplus \left(I_{\widehat{\mathfrak{H}}} - P_{\bigvee_{k=0}^{+\infty} W^{*k} \mathfrak{D}_+}\right)\mathfrak{D}_- = \mathfrak{D}_+ \oplus M \oplus \mathfrak{D}_-.$$

При доказательстве этого равенства удобно воспользоваться тем фактом, что включение

$$h \in \mathfrak{D}_+ \oplus M \oplus \mathfrak{D}_-$$

равносильно тому, что существует такой вектор $w \in \bigvee_{k=0}^{+\infty} W^{*k} \mathfrak{D}_+$, что

$$P_X h = P_X w$$

(см. равенство (10)).

Таким образом, замкнутость множества M равносильна замкнутости множества

$$Z = \left(I_{\widehat{\mathfrak{H}}} - P_{\bigvee_{k=0}^{+\infty} W^{*k} \mathfrak{D}_+}\right)\mathfrak{D}_-.$$

В силу формулы (2.6) § 2 гл. VI книги [5] и непосредственно предшествующего ей в [5] текста множество Z замкнуто тогда и только тогда, когда линеал $\Delta(\xi) H^2(U)$ замкнут в топологии пространства $L^2(U)$.

Теорема доказана.

Замечание. В книге [5] рассуждение, на которое мы ссылаемся, приводится не для произвольного унитарного узла, а для унитарного узла, порожденного простым (т. е. вполне неунитарным) сжатием. Однако это рассуждение без изменений переносится на случай произвольного простого унитарного узла.

Автор выражает благодарность рецензенту за существенное улучшение и упрощение доказательства.

1. *Аров Д. З.* Пассивные линейные стационарные динамические системы // Сиб. мат. журн. – 1979. – № 20. – С. 211 – 228.
2. *Бродский М. С.* Унитарные узлы и их характеристические функции // Успехи мат. наук. – 1978. – **33**, № 4. – С. 141 – 168.
3. *Нудельман М. А.* Достаточные условия абсолютной устойчивости оптимальных пассивных систем рассеяния // Алгебра и анализ. – 1994. – **6**, № 4. – С. 187 – 203.
4. *Адамян В. М., Аров Д. З.* Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов // Мат. исслед. – 1966. – № 1. – С. 3 – 66.
5. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 431 с.

Получено 20.01.2003