УДК 517.925.52

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

КРИТЕРІЙ ІСНУВАННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ

We establish conditions for the existence of almost periodic solutions of nonlinear almost periodic differential equations with impulsive perturbation in Banach spaces without using the $\mathcal{H}$-classes of these equations.

Получены условия существования почти периодических решений нелинейных почти периодических дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в банаховом пространстве, не использующие $\mathcal{H}$-классы этих уравнений.

1. Основні позначення й об'єкт досліджень. Нехай E — довільний банахів простір із нормою $\|\cdot\|_E$. Розглянемо довільну зліченну множину T ізольованих точок $\tau\in\mathbb{R}$. Вважатимемо, що існує таке число $\omega>0$, що справджується рівність

$$\omega+T=T,$$

тобто множина T є інваріантною по відношенню до зсуву на ω. Нагадаємо, що $\omega+T=\{\omega+\tau:\tau\in T\}$. Множина T може бути такою, що її підмножина $[0,\omega)\cap T$ є нескінченною.

Позначимо через $C_b(\mathbb{R}\setminus T,E)$ банахів простір усіх неперервних і обмежених на $\mathbb{R}\setminus T$ функцій $x=x(t)$ зі значеннями в E з нормою

$$\|x\|_{C_b(\mathbb{R}\setminus T,E)}=\sup_{t\in\mathbb{R}\setminus T}\|x(t)\|_E.$$

У цьому просторі розглянемо підпростір $\mathscr{X}^0(\mathbb{R}\setminus T,E)$ таких функцій $x=x(t)$, що для кожного $\tau\in T$ існують односторонні границі

$$x(\tau+0)=\lim_{t\to\tau+0}x(t)$$

і

$$x(\tau-0)=\lim_{t\to\tau-0}x(t)$$

(ці границі, очевидно, є скінченними). Норма в $\mathscr{X}^0(\mathbb{R}\setminus T,E)$, очевидно, визначається рівністю

$$\|x\|_{\mathscr{X}^0(\mathbb{R}\setminus T,E)}=\|x\|_{C_b(\mathbb{R}\setminus T,E)}.$$

Також розглянемо банахів простір $\mathscr{X}^1(\mathbb{R}\setminus T,E)$ всіх диференційовних функцій $x\in\mathscr{X}^0(\mathbb{R}\setminus T,E)$, для кожної з яких $dx/dt\in\mathscr{X}^0(\mathbb{R}\setminus T,E)$, з нормою

$$\|x\|_{\mathscr{X}^1(\mathbb{R}\setminus T,E)}=\max\left\{\|x\|_{\mathscr{X}^0(\mathbb{R}\setminus T,E)},\left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{\mathscr{X}^0(\mathbb{R}\setminus T,E)}\right\}.$$

Позначимо через $\mathscr{I}(T,E)$ банахів простір визначених і обмежених на T функцій $y=y(\tau)$ зі значеннями в E з нормою

$$\|y\|_{\mathscr{I}(T,E)} = \sup_{\tau\in T} \|y(\tau)\|_E.$$

Для $h \in \omega\mathbb{Z}$ визначимо оператори зсуву $S_{h,1}: \mathscr{X}^0(\mathbb{R}\setminus T, E) \to \mathscr{X}^0(\mathbb{R}\setminus T, E)$ і $S_{h,2}: \mathscr{I}(T,E) \to \to \mathscr{I}(T,E)$ формулами

$$(S_{h,1}x)(t) = x(t+h),\ t \in \mathbb{R}\setminus T,$$

$$(S_{h,2}y)(\tau) = y(\tau+h),\ \tau \in T.$$

Нагадаємо, що $\omega\mathbb{Z} = \{\omega n : n \in \mathbb{Z}\}$. Елементи $x \in \mathscr{X}^0(\mathbb{R}\setminus T, E)$ і $y \in \mathscr{I}(T,E)$ називаються *майже періодичними* (за Бохнером) (див., наприклад, [1, 2]), якщо замикання множин $\{S_{h,1}x : h \in \omega\mathbb{Z}\}$ і $\{S_{h,2}y : h \in \omega\mathbb{Z}\}$ у просторах $\mathscr{X}^0(\mathbb{R}\setminus T, E)$ і $\mathscr{I}(T,E)$ відповідно є компактними підмножинами цих просторів.

Позначимо через $B^0(\mathbb{R}\setminus T, E)$, $B^1(\mathbb{R}\setminus T, E)$ і $B(T,E)$ банахові простори майже періодичних елементів просторів $\mathscr{X}^0(\mathbb{R}\setminus T, E)$, $\mathscr{X}^1(\mathbb{R}\setminus T, E)$ і $\mathscr{I}(T,E)$ з нормами

$$\|x\|_{B^0(\mathbb{R}\setminus T,E)} = \|x\|_{\mathscr{X}^0(\mathbb{R}\setminus T,E)},$$

$$\|x\|_{B^1(\mathbb{R}\setminus T,E)} = \|x\|_{\mathscr{X}^1(\mathbb{R}\setminus T,E)}$$

і

$$\|x\|_{B(T,E)} = \|x\|_{\mathscr{I}(T,E)}$$

відповідно.

Зазначимо, що у випадку скінченної множини $[0,\omega) \cap T$ замикання множин значень елементів просторів $B^0(\mathbb{R}\setminus T, E)$ і $B(T,E)$ у просторі E є компактними. Ці множини можуть не бути компактними, якщо множина $[0,\omega)\cap T$ є нескінченною і $\dim E = \infty$.

Нехай Ω — область простору E, тобто відкрита зв’язна множина простору E, і $\mathcal{K}$ — множина всіх непорожніх компактних підмножин $K \subset \Omega$.

Розглянемо неперервні відображення $f : (\mathbb{R}\setminus T)\times\Omega \to E$ і $I : T\times\Omega \to E$, що задовольняють такі умови:

1) для кожних $\tau \in T$ і $x \in \Omega$ існують скінченні границі

$$f(\tau+0,x) = \lim_{t\to\tau+0} f(t,x)$$

і

$$f(\tau-0,x) = \lim_{t\to\tau-0} f(t,x);$$

2) $f(t,x)$ рівномірно неперервне по x на кожній множині $(\mathbb{R}\setminus T)\times K$, де $K \in \mathcal{K}$;

3) $f(t,x)$ — майже періодичний по t елемент простору $B^0(\mathbb{R}\setminus T, E)$, рівномірний по x на кожній множині $K \in \mathcal{K}$;

4) $I(\tau,x)$ рівномірно неперервне по x на кожній множині $T\times K$, де $K \in \mathcal{K}$;

5) $I(\tau,x)$ — майже періодичний по τ елемент простору $B(T,E)$, рівномірний по x на кожній множині $K \in \mathcal{K}$.

Завдяки виконанню наведених умов функція $f(t, x(t))$ є елементом простору $\mathscr{X}^0(\mathbb{R} \setminus T, E)$ для кожної функції $x \in \mathscr{X}^0(\mathbb{R} \setminus T, E)$ зі значеннями в K ($K \in \mathcal{K}$), простору $B^0(\mathbb{R} \setminus T, E)$ для кожної функції $x \in B^0(\mathbb{R} \setminus T, E)$ зі значеннями в K ($K \in \mathcal{K}$), а $I(\tau, x(\tau))$ є елементом простору $B(T, E)$ для кожної функції $x \in B(T, E)$ зі значеннями в K ($K \in \mathcal{K}$).

Як і в [2] (доповнення, § 19), можна показати, використавши умови 2 – 5, що для кожної множини $K \in \mathcal{K}$

$$\sup_{t \in \mathbb{R} \setminus T,\ x \in K} \|f(t, x)\|_E < +\infty,$$

$$\sup_{\tau \in T,\ x \in K} \|I(\tau, x)\|_E < +\infty$$

і для довільної послідовності $(h_k)_{k \geqslant 1}$ дійсних чисел $h_k \in \omega\mathbb{Z}$ існує підпослідовність $(h_{k_l})_{l \geqslant 1}$, для якої послідовності $\big(f(t + h_{k_l}, x)\big)_{l \geqslant 1}$ і $\big(I(\tau + h_{k_l}, x)\big)_{l \geqslant 1}$ збігаються рівномірно на множинах $(\mathbb{R} \setminus T) \times K$ і $T \times K$ відповідно.

Вважатимемо, що послідовності $\big(f(t + h_{k_l}, x)\big)_{l \geqslant 1}$ і $\big(I(\tau + h_{k_l}, x)\big)_{l \geqslant 1}$ збігаються рівномірно на множинах $(\mathbb{R} \setminus T) \times K$ і $T \times K$, $K \in \mathcal{K}$, відповідно і граничні відображення $\tilde{f} \colon (\mathbb{R} \setminus T) \times \Omega \to E$ і $\tilde{I} \colon T \times \Omega \to E$, що визначаються співвідношеннями

$$\tilde{f}(t, x) = \lim_{l \to \infty} f(t + h_{k_l}, x) \tag{1}$$

і

$$\tilde{I}(\tau, x) = \lim_{l \to \infty} I(\tau + h_{k_l}, x), \tag{2}$$

задовольняють умови 1 – 5. У подальшому ця вимога відіграватиме допоміжну роль і не буде використовуватися при отриманні основного результату.

Для кожних функції $x \in \mathscr{X}^0(\mathbb{R} \setminus T, E)$ і точки $\tau \in T$ визначимо різницю $(\Delta x)(\tau)$ рівністю

$$(\Delta x)(\tau) = x(\tau + 0) - x(\tau - 0).$$

Будемо розглядати функції $x \in \mathscr{X}^0(\mathbb{R} \setminus T, E)$, що є розв'язками диференціального рівняння з імпульсним збуренням

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = f\big(t, x(t)\big), \quad t \in \mathbb{R} \setminus T, \\ &(\Delta x)(\tau) = I\big(\tau, x(\tau - 0)\big), \quad \tau \in T. \end{aligned} \tag{3}$$

$\mathcal{H}$-класом цієї системи називається множина всіх систем

$$\begin{aligned} &\frac{dy(t)}{dt} = \tilde{f}\big(t, y(t)\big), \quad t \in \mathbb{R} \setminus T, \\ &(\Delta y)(\tau) = \tilde{I}\big(\tau, y(\tau - 0)\big), \quad \tau \in T, \end{aligned}$$

праві частини яких визначаються за допомогою (1) і (2).

Метою статті є встановлення умов майже періодичності обмежених розв'язків системи (3) без використання елементів $\mathcal{H}$-класу цієї системи. При дослідженні системи (3) будемо використовувати функціонал, визначений на множині обмежених розв'язків цієї системи (множини значень цих розв'язків — підмножини компактних множин $K \in \mathcal{K}$). Цьому функціоналу приділимо увагу в наступному пункті.

2. Функціонал δ. Відокремлені та сильно відокремлені розв'язки системи (3). Зафіксуємо довільну множину $K \in \mathcal{K}$. Позначимо через $\mathcal{N}(K)$ множину всіх обмежених розв'язків $x = x(t)$ системи (3), для кожного з яких замикання $\overline{R(x)}$ множини $R(x) = \{x(t) : t \in \mathbb{R} \setminus T\}$ у просторі E є підмножиною множини $K \in \mathcal{K}$ і $\overline{R(x)} \neq K$.

Зафіксуємо довільний обмежений розв'язок $x^* \in \mathcal{N}(K)$ системи (3) (вважаємо, що $\mathcal{N}(K) \neq \neq \varnothing$.) Покладемо

$$r(x^*, K) = \sup\Big\{\|x - y\|_E : x \in \overline{R(x^*)},\ y \in K\Big\}. \tag{4}$$

Зазначимо, що $r(x^*, K) > 0$ завдяки нерівності $\overline{R(x)} \neq K$. Також зафіксуємо довільне число $\varepsilon \in [0, r(x^*, K)]$. Позначимо через $\Omega(x^*, K, \varepsilon)$ множину всіх елементів $y \in \mathscr{X}^1(\mathbb{R} \setminus T, E)$, для кожного з яких

$$R(x^* + y) \subset K, \tag{5}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}\setminus T} \left\|\frac{d(x^*(t) + y(t))}{dt}\right\|_E \leqslant \sup_{s\in\mathbb{R}\setminus T,\ x\in K} \|f(s,x)\|_E, \tag{6}$$

$$\sup_{\tau\in T} \big\|(\Delta(x^* + y))(\tau)\big\|_E \leqslant \sup_{s\in T,\ x\in K} \|I(s,x)\|_E \tag{7}$$

і

$$\|y\|_{\mathscr{X}^0(\mathbb{R}\setminus T, E)} \geqslant \varepsilon. \tag{8}$$

Аналогічним чином можна визначити множину $\Omega(z, K, \varepsilon)$ для будь-якої іншої функції $z \in \in \mathscr{X}^1(\mathbb{R} \setminus T, E) \setminus \{x^*\}$ зі значеннями в K.

Розглянемо функціонали

$$\delta_1(x^*, K, \varepsilon) = \inf_{y\in\Omega(x^*,K,\varepsilon)} \sup_{t\in\mathbb{R}\setminus T} \left\|\frac{d\big(x^*(t) + y(t)\big)}{dt} - f\big(t, x^*(t) + y(t)\big)\right\|_E, \tag{9}$$

$$\delta_2(x^*, K, \varepsilon) = \inf_{y\in\Omega(x^*,K,\varepsilon)} \sup_{\tau\in T} \Big\|\big(\Delta(x^* + y)\big)(\tau) - I\big(\tau, x^*(\tau - 0) + y(\tau - 0)\big)\Big\|_E \tag{10}$$

і

$$\delta(x^*, K, \varepsilon) = \max\big\{\delta_1(x^*, K, \varepsilon), \delta_2(x^*, K, \varepsilon)\big\}. \tag{11}$$

Означення 1. *Розв'язок $z \in \mathcal{N}(K)$ системи* (3) *називається відокремленим на множині $(\mathbb{R} \setminus T) \times K$, якщо або цей розв'язок єдиний на множині $(\mathbb{R} \setminus T) \times K$, або для кожного іншого розв'язку $u = u(t)$ зі значеннями в K виконується нерівність*

$$\inf_{t\in\mathbb{R}\setminus T} \|z(t) - u(t)\|_E \geqslant \rho,$$

де ρ — додатна стала, залежна тільки від z.

Означення 2. *Розв'язок* $z \in \mathcal{N}(K)$ *системи* (3) *називається сильно відокремленим на множині* $(\mathbb{R} \setminus T) \times K$, *якщо*

$$\delta(z, K, \varepsilon) > 0$$

для кожного $\varepsilon \in (0, r(z, K))$.

Очевидно, що кожний сильно відокремлений на множині $(\mathbb{R} \setminus T) \times K$ розв'язок $z \in \mathcal{N}(K)$ системи (3) є відокремленим на множині $(\mathbb{R} \setminus T) \times K$. Однак відокремлений на множині $(\mathbb{R} \setminus T) \times K$ розв'язок $z \in \mathcal{N}(K)$ цієї системи може не бути сильно відокремленим на множині $(\mathbb{R} \setminus T) \times K$. Це підтверджується наступним прикладом.

***Приклад* 1.** Розглянемо майже періодичне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(t)x, \tag{12}$$

де

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin \frac{t}{2k+1},$$

запозичене з [2] (доповнення, § 20), [3] і [4] (розділ IV, § 2). Виділимо важливі факти, що стосуються цього рівняння, потрібні для подальшого:

1) загальний розв'язок рівняння (12) подається у вигляді $x(t) = ce^{F(t)}$, де c — довільна дійсна стала і $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ — невід'ємна парна й необмежена на $\mathbb{R}$ функція;

2) виконується співвідношення

$$f(t + t_n) = -f(t) + \gamma_n(t), \quad n \geqslant 1, \tag{13}$$

де $t_n = 1 \cdot 3 \ldots (2n+1)\pi$ і $\gamma_n(t)$ — неперервна на $\mathbb{R}$ функція, для якої

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |\gamma_n(t)| = 0, \tag{14}$$

і, отже, рівняння

$$\frac{dy}{dt} = -f(t)y \tag{15}$$

є елементом $\mathcal{H}$-класу рівняння (12);

3) загальний розв'язок рівняння (15) подається у вигляді $y(t) = ce^{-F(t)}$, причому $\sup_{t\in\mathbb{R}} |y(t)| = |c|$ і $\inf_{t\in\mathbb{R}} |y(t)| = 0$.

Розглянемо лінійну майже періодичну систему

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = f(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \\ &(\Delta x)(\tau) = 0, \quad \tau \in \pi\mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{16}$$

Завдяки другому співвідношенню в системі (16) *звуження* $x_{|\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}}(t)$ *кожного обмеженого розв'язку* $x(t)$ *рівняння* (12) *на множину* $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ *є розв'язком цієї системи і, навпаки, розширення*

$y(t)$ *кожного обмеженого розв'язку* $x(t)$ *цієї системи на множину* $\mathbb{R}$, *для якого* $y(\tau) = x(\tau - 0)$ *для кожного* $\tau \in \pi\mathbb{Z}$, *є розв'язком рівняння* (12).

Звідси та з наведених властивостей рівняння (12) випливає, що нульовий розв'язок системи (16) є відокремленим на кожній множині $(\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}) \times [a, b]$, де $a < 0$ і $b > 0$. Покажемо, що *нульовий розв'язок цієї системи не є сильно відокремленим на жодній із розглянутих множин.*

Зафіксуємо довільні відрізок $[a, b]$, $a < 0 < b$, і число $\varepsilon \in \big(0, r(0, [a, b])\big)$, де $r(0, [a, b]) = \max\{-a, b\}$ згідно з (4). Розглянемо звуження функцій

$$x_{\varepsilon,n}(t) = \begin{cases} \varepsilon e^{-F(t-t_n)}, & \text{якщо} \quad |a| \leqslant b, \\ -\varepsilon e^{-F(t-t_n)}, & \text{якщо} \quad |a| > b, \end{cases} \qquad n \geqslant 1,$$

на множину $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, що, очевидно, є елементами множини $\Omega(0, [a, b], \varepsilon)$. Зауважимо, що множина $\Omega(0, [a, b], \varepsilon)$ визначається співвідношеннями (5)–(8), в яких $x^* = 0$, $K = [a, b]$, $T = \pi\mathbb{Z}$, $f(t, x) = f(t)x$ і $I(t, x) = 0$.

Із (9), (13) і (14) при $x^* = 0$, $K = [a, b]$, $T = \pi\mathbb{Z}$ і $f(t, x) = f(t)x$ випливає, що

$$\delta_1(0, [a, b], \varepsilon) = \inf_{y \in \Omega(0,[a,b],\varepsilon)} \sup_{t \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}} \left| \frac{d(y(t))}{dt} - f(t)y(t) \right| =$$

$$= \inf_{n \geqslant 1} \inf_{y \in \Omega(0,[a,b],\varepsilon)} \sup_{t \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}} \left| \frac{d(y(t+t_n))}{dt} - f(t+t_n)y(t+t_n) \right| =$$

$$= \inf_{n \geqslant 1} \inf_{y \in \Omega(0,[a,b],\varepsilon)} \sup_{t \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}} \left| \frac{d(y(t+t_n))}{dt} + (f(t) - \gamma_n(t))y(t+t_n) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{n \geqslant 1} \sup_{t \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}} \left| \frac{d(x_{\varepsilon,n}(t+t_n))}{dt} + (f(t) - \gamma_n(t))x_{\varepsilon,n}(t+t_n) \right| =$$

$$= \inf_{n \geqslant 1} \sup_{t \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}} \left| \frac{d\varepsilon e^{-F(t)}}{dt} + (f(t) - \gamma_n(t))\varepsilon e^{-F(t)} \right| =$$

$$= \inf_{n \geqslant 1} \sup_{t \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}} \left| \left(\frac{d\varepsilon e^{-F(t)}}{dt} + f(t)\varepsilon e^{-F(t)} \right) - \gamma_n(t)\varepsilon e^{-F(t)} \right| =$$

$$= \inf_{n \geqslant 1} \sup_{t \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}} \left| \gamma_n(t)\varepsilon e^{-F(t)} \right| \leqslant \inf_{n \geqslant 1} \sup_{t \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}} |\gamma_n(t)\varepsilon| = \varepsilon \inf_{n \geqslant 1} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\gamma_n(t)| = 0.$$

Аналогічно із (10) при $x^* = 0$, $K = [a, b]$, $T = \pi\mathbb{Z}$ і $I(t, x) = 0$ випливає, що

$$\delta_2\big(0, [a, b], \varepsilon\big) = \inf_{y \in \Omega(0,[a,b],\varepsilon)} \sup_{\tau \in \pi\mathbb{Z}} |(\Delta y)(\tau) - I(\tau, y(\tau - 0))| =$$

$$= \inf_{y \in \Omega(0,[a,b],\varepsilon)} \sup_{\tau \in \pi\mathbb{Z}} |y(\tau + 0) - y(\tau - 0)| \leqslant \inf_{n \geqslant 1} \sup_{\tau \in \pi\mathbb{Z}} |x_{\varepsilon,n}(\tau + 0) - x_{\varepsilon,n}(\tau - 0) =$$

$$= \inf_{n \geqslant 1} \sup_{\tau \in \pi\mathbb{Z}} \left| \varepsilon e^{-F(\tau + t_n + 0)} - \varepsilon e^{-F(\tau + t_n - 0)} \right| = 0.$$

Тому $\delta\big(0,[a,b],\varepsilon\big)=0$ на підставі (11) і, отже, за довільністю вибору відрізка $[a,b]$, $a<0<b$, і числа $\varepsilon\in\big(0,r\big(0,[a,b]\big)\big)$ відокремлений на кожній множині $(\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z})\times[a,b]$ нульовий розв'язок системи (16) не є сильно відокремленим на жодній із цих множин.

Застосування функціонала δ до дослідження нелінійної майже періодичної системи (3) наведемо у наступному пункті.

3. Основні результати. Наведемо умови майже періодичності обмежених розв'язків системи (3), в яких на відміну від відомої теореми Амеріо про майже періодичні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь (див. [2, 5]) не використовуються $\mathcal{H}$-клас системи (3) та відокремленість обмежених розв'язків систем $\mathcal{H}$-класу цієї системи.

Нехай Λ — обмежена підмножина простору E. Визначимо діаметр множини Λ рівністю

$$\operatorname{diam}\Lambda=\sup\{\|x-y\|_E : x,y\in\Lambda\}.$$

Теорема 1. *Нехай $K\in\mathcal{K}$. Якщо для розв'язку $z\in\mathcal{N}(K)$ системи* (3) $\operatorname{diam}R(z)\neq0$ *і*

$$\delta(z,K,\varepsilon)>0 \tag{17}$$

для кожного $\varepsilon\in(0,r(z,K))$, то цей розв'язок є майже періодичним.

***Зауваження* 1.** Розв'язок $z\in\mathcal{N}(K)$ системи (3), для якого $\operatorname{diam}R(z)=0$, є сталим і, отже, майже періодичним.

Доведення. Припустимо, що розв'язок $z\in\mathcal{N}(K)$ системи (3) не є елементом простору $B^1(\mathbb{R}\setminus T,E)$ $\big($випадок, коли $z\in B^0(\mathbb{R}\setminus T,E)$ і $dz/dt\notin B^0(\mathbb{R}\setminus T,E)$, неможливий, оскільки

$$\frac{dz(t)}{dt}\equiv f\big(t,z(t)\big)$$

і $f\big(t,z(t)\big)$ — елемент простору $B^0(\mathbb{R}\setminus T,E)\big)$. Тоді існує послідовність $\big(S_{h_p,1}z\big)_{p\geqslant1}$, для якої кожна підпослідовність $\big(S_{k_p,1}z\big)_{p\geqslant1}$ буде розбіжною у просторі $\mathscr{X}^0(\mathbb{R}\setminus T,E)$. Отже, для деяких числа $\gamma\in(0,\operatorname{diam}R(z))$ і послідовностей $(p_r)_{r\geqslant1}$, $(q_r)_{r\geqslant1}$ натуральних чисел

$$\big\|S_{k_{p_r},1}z-S_{k_{q_r},1}z\big\|_{\mathscr{X}^0(\mathbb{R}\setminus T,E)}\geqslant\gamma,\quad r\geqslant1. \tag{18}$$

Зазначимо, що $\operatorname{diam}R(z)\leqslant r(z,K)$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що послідовності $\big(f(t+k_p,x)\big)_{p\geqslant1}$ і $\big(I(\tau+k_p,x)\big)_{p\geqslant1}$ елементів просторів $B^0(\mathbb{R}\setminus T,E)$ і $B(T,E)$ відповідно збігаються рівномірно на K. Тоді

$$\lim_{p,q\to\infty}\sup_{x\in K}\sup_{t\in\mathbb{R}\setminus T}\Big\|f(t+k_p,x)-f(t+k_q,x)\Big\|_E=0 \tag{19}$$

і

$$\lim_{p,q\to\infty}\sup_{x\in K}\sup_{\tau\in T}\Big\|I(\tau+k_p,x)-I(\tau+k_q,x)\Big\|_E=0. \tag{20}$$

Розглянемо елементи

$$y_r(t)=(S_{k_{p_r},1}z)(t)-(S_{k_{q_r},1}z)(t),\quad r\geqslant1,$$

простору $\mathscr{X}^1(\mathbb{R}\setminus T,E)$. На підставі (18)

$$y_r \in \Omega(S_{k_{q_r},1}z, K, \gamma), \quad r \geqslant 1. \tag{21}$$

Покажемо, що

$$\delta(z, K, \gamma) = 0. \tag{22}$$

Завдяки (3), (21) та тому, що

$$\frac{dz(t+k_{p_r})}{dt} - f\big(t+k_{p_r}, z(t+k_{p_r})\big) \equiv 0, \quad r \geqslant 1,$$

виконуються співвідношення

$$\delta_1(z, K, \gamma) = \inf_{y\in\Omega(z,K,\gamma)} \sup_{t\in\mathbb{R}\setminus T} \left\| \frac{d(z(t)+y(t))}{dt} - f(t, z(t)+y(t)) \right\|_E =$$

$$= \inf_{y\in\Omega(S_{k_{q_r},1}z,K,\gamma)} \sup_{t\in\mathbb{R}\setminus T} \left\| \frac{d(z(t+k_{q_r})+y(t))}{dt} - f(t+k_{q_r}, z(t+k_{q_r})+y(t)) \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}\setminus T} \left\| \frac{d(z(t+k_{q_r})+y_r(t))}{dt} - f(t+k_{q_r}, z(t+k_{q_r})+y_r(t)) \right\|_E =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}\setminus T} \left\| \frac{dz(t+k_{p_r})}{dt} - f(t+k_{q_r}, z(t+k_{p_r})) \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}\setminus T} \left\| \frac{dz(t+k_{p_r})}{dt} - f(t+k_{p_r}, z(t+k_{p_r})) \right\|_E +$$

$$+ \sup_{t\in\mathbb{R}\setminus T} \| f(t+k_{p_r}, z(t+k_{p_r})) - f(t+k_{q_r}, z(t+k_{p_r})) \|_E =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}\setminus T} \| f(t+k_{p_r}, z(t+k_{p_r})) - f(t+k_{q_r}, z(t+k_{p_r})) \|_E,$$

з яких на підставі (19) випливає, що

$$\delta_1(z, K, \gamma) = 0. \tag{23}$$

Аналогічно, завдяки (3), (21) та тому, що

$$(\Delta z)(\tau+k_{p_r}) - I\big(\tau+k_{p_r}, z(\tau+k_{p_r}-0)\big) \equiv 0, \quad r \geqslant 1,$$

виконуються співвідношення

$$\delta_2(z, K, \gamma) = \inf_{y\in\Omega(z,K,\gamma)} \sup_{\tau\in T} \|(\Delta(z+y))(\tau) - I(\tau, z(\tau-0)+y(\tau-0))\|_E =$$

$$= \inf_{y\in\Omega(S_{k_{q_r},1}z,K,\gamma)} \sup_{\tau\in T} \big\|(\Delta(S_{k_{q_r},1}z+y))(\tau) - I(\tau+k_{q_r}, z(\tau+k_{q_r}-0)+y(\tau-0))\big\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\tau\in T} \big\|(\Delta(S_{k_{q_r},1}z+y_r))(\tau) - I(\tau+k_{q_r}, z(\tau+k_{q_r}-0)+y_r(\tau-0))\big\|_E =$$

$$= \sup_{\tau\in T} \left\|(\Delta(S_{k_{p_r},1}z))(\tau) - I(\tau + k_{q_r}, z(\tau + k_{p_r} - 0))\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\tau\in T} \left\|(\Delta(S_{k_{p_r},1}z))(\tau) - I(\tau + k_{p_r}, z(\tau + k_{p_r} - 0))\right\|_E +$$

$$+ \sup_{\tau\in T} \|I(\tau + k_{p_r}, z(\tau + k_{p_r} - 0)) - I(\tau + k_{q_r}, z(\tau + k_{p_r} - 0))\|_E =$$

$$= \sup_{\tau\in T} \|I(\tau + k_{p_r}, z(\tau + k_{p_r} - 0)) - I(\tau + k_{q_r}, z(\tau + k_{p_r} - 0))\|_E ,$$

з яких на підставі (20) випливає, що

$$\delta_2(z, K, \gamma) = 0. \tag{24}$$

Із (23) і (24) отримуємо (22), що суперечить (17).

Отже, припущення, що розв'язок $z \in \mathcal{N}(K)$ системи (3) не є майже періодичним, є хибним.

Теорему 1 доведено.

Зазначимо, що виконання співвідношення (17) означає, що розв'язок $z \in \mathcal{N}(K)$ системи (3) є сильно відокремленим на множині $(\mathbb{R} \setminus T) \times K$. Тому цю теорему можна сформулювати в іншому вигляді.

Теорема 2. *Нехай $K \in \mathcal{K}$. Якщо розв'язок $z \in \mathcal{N}(K)$ рівняння* (3) *сильно відокремлений на множині $(\mathbb{R} \setminus T) \times K$ і $\operatorname{diam} R(z) \neq 0$, то цей розв'язок є майже періодичним.*

Зауваження 2. Якщо розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{f}, K)$ системи (3) не є сильно відокремленим на множині $(\mathbb{R} \setminus T) \times K$, то цей розв'язок може як бути майже періодичним, так і не бути таким. Це підтверджується двома прикладами.

Приклад 2. Розглянемо нелінійну систему

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = (x(t) - 1)x(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \\ &(\Delta x)(\tau) = 0, \quad \tau \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{25}$$

та її обмежений розв'язок $z = z(t)$, для якого $z(+0) = \dfrac{1}{2}$. Цей розв'язок не є майже періодичним, оскільки $\lim_{t\to+\infty} z(t) = 0$ і $\lim_{t\to-\infty} z(t) = 1$. Очевидно, що $R(z) \subset [0, 1]$.

Зафіксуємо відрізок $[-1, 2]$. Тоді елемент $y = -z(t)$ простору $\mathscr{X}^1(\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ є елементом множини $\Omega(z, [-1, 2], \varepsilon)$ для кожного $\varepsilon \in (0, 1)$. Тому для таких ε

$$\delta_1(z, [-1, 2], \varepsilon) = \inf_{x\in\Omega(z,[-1,2],\varepsilon)} \sup_{t\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}} \left| \frac{d(z(t) + x(t))}{dt} + (z(t) + x(t) - 1)(z(t) + x(t)) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}} \left| \frac{d(z(t) + (-z(t)))}{dt} + (z(t) + (-z(t)) - 1)(z(t) + (-z(t))) \right| = 0$$

і

$$\delta_2(z, [-1, 2], \varepsilon) = \inf_{x\in\Omega(z,[-1,2],\varepsilon)} \sup_{\tau\in\pi\mathbb{Z}} |(\Delta(z + x))(\tau)| \leqslant \sup_{\tau\in\pi\mathbb{Z}} |(\Delta(z + (-z)))(\tau)| = 0.$$

Отже, $\delta(z,[-1,2],\varepsilon)=0$ для кожного $\varepsilon\in(0,1)$, тобто розв'язок $z=z(t)$ системи (25) не є сильно відокремленим на множині $(\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z})\times[-1,2]$.

Зазначимо, що розв'язок $z=z(t)$ системи (25) також не є відокремленим на множині $(\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z})\times[-1,2]$, оскільки функції $z_1(t)\equiv 0$ і $z_2(t)\equiv 1$ також є обмеженими розв'язками цієї системи і

$$\inf_{t\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}}|z(t)-z_1(t)|=\inf_{t\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}}|z(t)-z_2(t)|=0.$$

***Приклад* 3.** Нехай $E=\mathbb{R}$. Розглянемо лінійну систему

$$\frac{dx(t)}{dt}=0,\quad t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},$$

$$(\Delta x)(\tau)=0,\quad \tau\in\mathbb{Z}.$$

Очевидно, що розв'язки цієї системи мають вигляд $x(t)=c$, $t\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, де c — довільна дійсна стала. Тому всі вони є елементами простору $B^1(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\mathbb{R})$. Усі ці розв'язки не є відокремленими і, отже, не є сильно відокремленими на множинах $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})\times[a,b]$ $(a,b\in\mathbb{R},\ a<b)$.

Отже, *властивість сильної відокремленості обмеженого розв'язку майже періодичної системи* (3) *не є необхідною* (*а є лише достатньою*) *умовою для майже періодичності цього розв'язку.*

4. Додаткові зауваження та літературні вказівки. Функціонали, аналогічні δ, вперше застосовані автором у [6–12] при дослідженні нелінійних майже періодичних різницевих, диференціальних та диференціально-різницевих рівнянь.

Наведені в пункті 3 умови існування майже періодичних розв'язків систем рівняння (3) є новими. На відміну від згадуваної теореми Амеріо [2, 5] в теоремах 1 і 2 не використовуються $\mathcal{H}$-клас системи (3) та умова відокремлення обмежених розв'язків систем $\mathcal{H}$-класу цієї системи і банаховий простір E може бути нескінченновимірним.

Зазначимо, що дослідженню розв'язків майже періодичних рівнянь присвячено багато публікацій. Відмітимо лише частину з них. Для звичайних лінійних диференціальних рівнянь перші теореми про майже періодичні розв'язки були доведені Фаваром у роботі [3], а для нелінійних диференціальних рівнянь — Амеріо в роботі [5]. У цих роботах суттєво використовуються $\mathcal{H}$-класи досліджуваних рівнянь, а в [5] — також вимога відокремленості обмежених розв'язків рівнянь. Результати Фавара були покращені Е. Мухамадієвим [13, 14]. Узагальненням теорем Мухамадієва присвячено роботи [15–17]. Важливі результати в цьому напрямку також належать Б. М. Левітану [4], Амеріо [18] та В. В. Жикову [19].

Майже періодичні диференціальні рівняння з імпульсними збуреннями досліджувалися А. М. Самойленком і М. О. Перестюком [20]. Лінійні майже періодичні абстрактні імпульсні системи досліджувалися С. І. Трофимчуком [21].

1. *Bochner S.* Beitrage zur Theorie der fastperiodischen // Math. Ann. – 1927. – **96**. – I Teil. – P. 119–147. II Teil. – P. 383–409.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
3. *Favard J.* Sur les équations différentielles à coefficients presquepériodiques // Acta math. – 1927. – **51**. – P. 31–81.
4. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.

5. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. – 1955. – **39**. – P. 97 – 119.
6. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, № 1. – С. 118 – 124.
7. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 307 – 312.
8. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом // Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, № 3. – С. 416 – 425.
9. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків не розв'язаних відносно похідної нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 3. – С. 384 – 393.
10. *Slyusarchuk V. Yu.* Almost periodic solutions of difference equations with discrete argument on metric space // Miskolc Math. Notes. – 2014. – **15**, № 1. – P. 211 – 215.
11. *Слюсарчук В. Е.* Исследование нелинейных почти периодических дифференциальных уравнений, не использующее $\mathcal{H}$-классы этих уравнений // Мат. сб. – 2014. – **205**, № 6. – С. 139 – 160.
12. *Слюсарчук В. Е.* Условия почти периодичности ограниченных решений нелинейных дифференциально-разностных уравнений // Изв. РАН. Сер. мат. – 2014. – **78**, № 6. – С. 179 – 192.
13. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269 – 274.
14. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Мат. заметки. – 1981. – **30**, № 3. – С. 443 – 460.
15. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. – **116(158)**, № 4(12). – С. 483 – 501.
16. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130(172)**, № 1(5). – С. 86 – 104.
17. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262 – 267.
18. *Amerio L.* Sull equazioni differenziali quasi-periodiche astratte // Ric. mat. – 1960. – **30**. – P. 288 – 301.
19. *Жиков В. В.* Доказательство теоремы Фавара о существовании почти-периодического решения в случае произвольного банахова пространства // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 1. – С. 121 – 126.
20. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
21. *Трофимчук С. И.* Почти периодические решения линейных абстрактных импульсных систем // Дифференц. уравнения. – 1995. – **31**, № 4. – С. 602 – 612.

Одержано 08.06.13,
після доопрацювання — 22.12.14