УДК 517.5

Е. А. Севостьянов (Житомир. гос. ун-т им. И. Франко)

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ МОНТЕЛЯ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ КЛАССА СОБОЛЕВА С КОНЕЧНЫМ ИСКАЖЕНИЕМ

We study the classes of mappings with unbounded chracteristic of quasiconformality and obtain a result on the normal families of open discrete mappings $f : D \to \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ from the class $W^{1,1}_{loc}$ with finite distortion that do not take at least two fixed values $a \neq b$ in $\mathbb{C}$ whose maximal dilatations has a majorant of finite mean oscillation at every point. This result is true, in particular, for the so-called Q-mappings. It is an analog of well-known Montel theorem for analytic functions.

Вивчаються класи відображень з необмеженою характеристикою квазіконформності. Отримано результат про нормальність сімей відкритих дискретних відображень $f\colon D \to \mathbb{C}\setminus\{a,b\}$ класу $W^{1,1}_{\rm loc}$, що мають скінченне спотворення і не набувають принаймні двох фіксованих значень $a \neq b$ в $\mathbb{C}$, максимальна дилатація котрих має мажоранту скінченного середнього коливання в кожній точці. Цей результат справедливий, зокрема, для так званих Q-відображень і є аналогом відомої теореми Монтеля для аналітичних функцій.

1. Введение. Настоящая статья посвящена обобщению одного аналога известной теоремы Монтеля о нормальности семейств аналитических функций (см. [1], § 32, гл. II). В силу этой теоремы, как известно, семейство $\mathfrak{F}_{a,b}(D)$ аналитических функций $f\colon D \to \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ области $D \subset \mathbb{C}$ является нормальным при любых фиксированных значениях $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ (см. там же). Как оказалось, указанный результат остается справедливым и для более общих классов открытых дискретных отображений класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ с конечным искажением, как только так называемая дилатация $K_\mu(z)$ этих отображений удовлетворяет некоторым (достаточно общим) ограничениям на рост. Более того, указанный результат справедлив также для так называемых Q-отображений, исследованных автором ранее (см., например, [2], разд. 5). Одно из сформулированных в данной работе утверждений усиливает более ранние результаты о нормальности семейств Q-отображений, не принимающих значений множества E положительной конформной емкости. Вместо этого в настоящей статье предлагается ограничиться лишь двухточечным множеством E комплексной плоскости. Следует также отметить, что здесь речь идет лишь о случае размерности пространства $\mathbb{R}^n$ при $n = 2$, так как случаи больших размерностей требуют иных подходов.

Основные определения и обозначения, используемые в статье, см. в [3 – 8]. Всюду далее m — мера Лебега в $\mathbb{C}$, D — область в $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация $\mathbb{C}$. Для комплекснозначной функции $f\colon D \to \mathbb{C}$, заданной в области $D \subset \mathbb{C}$, имеющей частные производные по x и y при почти всех $z = x + iy$, полагаем $\overline{\partial} f = f_{\overline{z}} = (f_x + if_y)/2$ и $\partial f = f_z = (f_x - if_y)/2$. Полагаем $\mu(z) = \mu_f(z) = f_{\overline{z}}/f_z$ при $f_z \neq 0$ и $\mu(z) = 0$ — в противном случае. Указанная комплекснозначная функция μ называется *комплексной дилатацией* отображения f в точке z. *Максимальной дилатацией* отображения f в точке z называется функция $K_{\mu_f}(z) = K_\mu(z) = \dfrac{1 + |\mu(z)|}{|1 - |\mu(z)||}$. Заметим, что $J(f, z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$, где $J(f, z) := \det f'(z)$, что может быть проверено непосредственным подсчетом (см., например, [4], п. С, гл. I). Отображение $f\colon D \to \mathbb{C}$ называется *отображением с конечным искажением*, если $f \in W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ и для некоторой функции $K(z)\colon D \to [1, \infty)$ выполнено условие $\|f'(z)\|^2 \leq K(z)|J(f, z)|$ при почти всех $z \in D$, где $\|f'(z)\| = |f_z| + |f_{\overline{z}}|$ (см. [5], п. 6.3, гл. VI). Суть понятия отображения с конечным искажением заключается в том, что у указанного отображения f матричная норма производной $\|f'(z)\|$ равна нулю в почти всех точках вырождения якобиана $J(f,z)$.

Пусть $(X,\ d)$ и (X',d') — метрические пространства с расстояниями d и d' соответственно. Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений $f\colon X\to X'$ называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений $f_m\in\mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k}, которая сходится локально равномерно в X к непрерывной функции $f\colon X\to X'$. Отметим, что всюду далее, если не оговорено противное, $(X,d)=\big(D,|\cdot|\big)$, где D — область в $\mathbb{C}$, а $|\cdot|$ — евклидова метрика; $|x-y|=\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(y_i-x_i)^2}$, где $x=x_1+ix_2$, $y=y_1+iy_2$; $(X',\ d')=(\overline{\mathbb{C}},\ h)$, где h — хордальная метрика (см. [8], соотношение (1.13), гл. I). Определение и примеры функций $\varphi: D\to\mathbb{R}$ класса $FMO(z_0)$, $z_0\in\mathbb{C}$ (*конечного среднего колебания в точке* z_0), см. в работе [6] либо монографии [8] (разд. 6.1, гл. 6). Пусть $Q\colon D\to[0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, тогда $q_{z_0}(r)$ обозначает среднее интегральное значение $Q(z)$ над окружностью $|z-z_0|=r$, $q_{z_0}(r):=\dfrac{1}{2\pi r}\displaystyle\int_{|z-z_0|=r}Q(z)\,d\mathcal{H}^1$, где $\mathcal{H}^1$ — 1-мерная мера Хаусдорфа.

Для фиксированных области $D\subset\mathbb{C}$, чисел $a,b\in\mathbb{C}$, $a\neq b$, и измеримой по Лебегу функции $Q\colon D\to[0,\infty]$ обозначим символом $\mathfrak{G}_{a,b,Q}(D)$ семейство всех открытых дискретных отображений $f\colon D\to\mathbb{C}\setminus\{a,b\}$ класса $W_{\mathrm{loc}}^{1,1}(D)$, имеющих конечное искажение, таких, что $K_{\mu_f}(z)\le Q(z)$ при почти всех $z\in D$. Сформулируем один из основных результатов настоящей работы.

Теорема 1. *Семейство отображений $\mathfrak{G}_{a,b,Q}(D)$ является нормальным, как только выполнено, по крайней мере, одно из следующих условий*: 1) $Q\in FMO(z_0)$ *в каждой точке* $z_0\in D$; 2) $q_{z_0}(r)\le C(z_0)\log\dfrac{1}{r}$ *при* $r\to 0$ *в каждой точке* $z_0\in D$, *где* $C(z_0)>0$ — *некоторая постоянная* ; 3) $Q\in L_{\mathrm{loc}}^1(D)$ *и при некотором* $\varepsilon_0=\varepsilon_0(z_0)$ *имеет место соотношение*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0}\frac{dt}{tq_{z_0}(t)}=\infty\,. \tag{1}$$

Приведем еще результат в этом направлении. Далее M обозначает конформный модуль семейства кривых (см., например, [7], разд. 6, гл. I). Пусть $Q\colon D\to[0,\infty]$ — некоторая фиксированная вещественнозначная функция. Согласно [8] (гл. 4), отображение $f\colon D\to\overline{\mathbb{C}}$ условимся называть *Q-отображением*, если f удовлетворяет соотношению $M(f(\Gamma))\le\displaystyle\int_D Q(z)\rho^2(z)dm(z)$ для произвольного семейства кривых Γ в области D и каждой допустимой функции $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$. (Определение условия допустимости $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$ функции ρ см. в [7] (гл. I).) В частности, если f — гомеоморфизм, будем называть такое отображение *Q-гомеоморфизмом*.

Для фиксированных области $D\subset\mathbb{C}$, чисел $a,b\in\mathbb{C}$, $a\neq b$, и измеримой по Лебегу функции $B\colon D\to[0,\infty]$ обозначим символом $\mathfrak{G}^*{}_{a,b,B}(D)$ семейство всех открытых дискретных Q-отображений $f\colon D\to\mathbb{C}\setminus\{a,b\}$ таких, что $Q(z)\le B(z)$ при почти всех $z\in D$. Имеет место следующее утверждение.

***Следствие* 1.** *Семейство отображений $\mathfrak{G}^*{}_{a,b,B}(D)$ является нормальным, как только выполнено, по крайней мере, одно из следующих условий*: 1) $B \in FMO(z_0)$ *в каждой точке* $z_0 \in D$; 2) $b_{z_0}(r) \le C(z_0)\log\dfrac{1}{r}$ *при* $r \to 0$ *в каждой точке* $z_0 \in D$, *где* $C(z_0) > 0$ — *некоторая постоянная, а* $b_{z_0}(r)$ — *среднее значение функции* $B(z)$ *над окружностью* $S(z_0, r)$; 3) $B \in L^1_{\rm loc}(D)$ *и при некотором* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(z_0)$ *имеет место соотношение* (1), *где вместо* $q_{z_0}(r)$ *следует взять* $b_{z_0}(r)$ — *среднее значение функции* $B(z)$ *над окружностью* $S(z_0, r)$.

2. Формулировка и доказательство основной леммы. Докажем, прежде всего, следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $f\colon D \to \mathbb{C}$, $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$, — *отображение с конечным искажением, имеющее вид* $f = \varphi \circ g$, *где* g — *некоторый гомеоморфизм, а* φ — *аналитическая функция. Тогда* $g \in W^{1,1}_{\rm loc}$ *и, кроме того,* g *имеет конечное искажение.*

Доказательство. Пусть $f = \varphi \circ g$, где g — некоторый гомеоморфизм, а φ — аналитическая функция, при этом $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ и f имеет конечное искажение. Отметим, что множество точек ветвления $B_\varphi \subset g(D)$ функции φ состоит только из изолированных точек (см. [9], пп. 5 и 6 (II), гл. V). Следовательно, $g(z) = \varphi^{-1} \circ f$ локально вне множества $g^{-1}(B_\varphi)$. Ясно, что множество $g^{-1}(B_\varphi)$ также состоит из изолированных точек, следовательно, $g \in ACL(D)$ как композиция аналитической функции φ^{-1} и отображения $f \in W^{1,1}_{\rm loc}(D)$.

Покажем, что $g \in W^{1,1}_{\rm loc}(D)$. Пусть далее $\mu_f(z)$ обозначает комплексную дилатацию функции $f(z)$, а $\mu_g(z)$ — комплексную дилатацию g. Согласно [4] ((1), п. С, гл. I) для почти всех $z \in D$ получаем

$$f_z = \varphi_z\bigl(g(z)\bigr) g_z, \qquad f_{\overline{z}} = \varphi_z\bigl(g(z)\bigr) g_{\overline{z}},$$
$$\mu_f(z) = \mu_g(z) =: \mu(z), \qquad K_{\mu_f}(z) = K_{\mu_g}(z) := K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu|}{|1 - |\mu||}. \tag{2}$$

Таким образом, $K_\mu(z) \in L^1_{\rm loc}(D)$. Поскольку f имеет конечное искажение, из (2) непосредственно следует, что g также имеет конечное искажение и при почти всех $z \in D$ выполнены соотношения $|\partial g| \le |\partial g| + |\overline{\partial} g| = K_\mu^{1/2}(z)\bigl(|J(f, z)|\bigr)^{1/2}$. Отсюда по неравенству Гельдера $|\partial g| \in L^1_{\rm loc}(D)$ и $|\overline{\partial} g| \in L^1_{\rm loc}(D)$. Следовательно, $g \in W^{1,1}_{\rm loc}(D)$ и g имеет конечное искажение.

Лемма 1 доказана.

Для фиксированных области $D \subset \mathbb{C}$, числа $a \in \mathbb{C}$ и измеримой по Лебегу функции $Q\colon D \to [0, \infty]$ обозначим символом $\mathfrak{H}_{a,Q}(D)$ семейство всех гомеоморфизмов $f\colon D \to \mathbb{C} \setminus \{a\}$ класса $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$, имеющих конечное искажение, таких, что $K_{\mu_f}(z) \le Q(z)$ при почти всех $z \in D$. Для установления основных результатов настоящей работы нам понадобится также следующее утверждение.

Лемма 2. 1. *Класс* $\mathfrak{H}_{a,Q}(D)$ *образует нормальное семейство отображений, как только функция* Q *удовлетворяет одному из следующих условий*: 1) $Q \in FMO(z_0)$ *в каждой точке* $z_0 \in D$; 2) $q_{z_0}(r) \le C(z_0)\log\dfrac{1}{r}$ *при* $r \to 0$ *в каждой точке* $z_0 \in D$, *где* $C(z_0) > 0$ — *некоторая постоянная*; 3) *при некотором* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(z_0)$ *имеет место соотношение* (1). *Нормальность необходимо интерпретировать в смысле хордальной метрики* h.

2. *Если последовательность* $f_n : D \to \mathbb{C}$, $f_n \in \mathfrak{H}_{a,Q}(D)$, *сходится локально равномерно в* D *к отображению* $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ *в смысле метрики* h, *и, кроме того, функция* Q *удовлетворяет хотя бы одному из указанных выше условий* $1-3$, *то* f — *либо гомеоморфизм* $f : D \to \mathbb{C}$, *либо постоянная* $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство. Пусть $f_m \in \mathfrak{H}_{a,Q}(D)$ — произвольная последовательность, тогда комплексная дилатация $\mu_{f_m}(z)$ отображения $f_m \in \mathfrak{H}_{a,Q}(D)$ удовлетворяет следующему условию: $|\mu_{f_m}(z)| \neq 1$ почти всюду, поскольку по условию леммы f_m имеет конечное искажение. Так как f_m — гомеоморфизмы, то либо $|\mu_{f_m}(z)| > 1$ почти всюду (что соответствует случаю $J(f_m, z) < < 0$ п.в.), либо $|\mu_{f_m}(z)| < 1$ почти всюду (что соответствует случаю $J(f_m, z) > 0$ п.в.) (см., например, [10, с. 332], разд. V.2.2, соотношение (68), либо [11], лемма 2.14 и комментарии после леммы 2.11). Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $|\mu_{f_m}(z)| < 1$ почти всюду (например, рассмотрев для отображений f_m, для которых $|\mu_{f_m}(z)| > 1$, вспомогательное семейство $\psi_m = \psi \circ f_m$, где $\psi(z) = x - iy$, $z = x + iy$). В таком случае первая часть заключения леммы 2 является прямым следствием результатов работы [12] (теоремы 5.1, 5.2 и следствие 5.3).

Вторая часть утверждения леммы вытекает из леммы 3.1 [12] и теорем 4.1, 4.2 [13] (см. также [14], теорема 5.3, разд. 5.3, гл. 5 и теоремы 1.3, 1.4, следствие 1.8, разд. 1.5, гл. 1).

Лемма 2 доказана.

3. Доказательство основных результатов. ***Доказательство теоремы* 1** основано на так называемом представлении Стоилова. Пусть $f_m \in \mathfrak{G}_{a,b,Q}(D)$ — произвольная последовательность отображений семейства $\mathfrak{G}_{a,b,Q}(D)$. Тогда согласно представлению Стоилова [9] (п. 5 (III), гл. V) каждое отображение $f_m \in \mathfrak{G}_{a,b,Q}(D)$ имеет вид $f_m = \varphi_m \circ g_m$, где g_m — некоторый гомеоморфизм, а φ_m — аналитическая функция.

Пусть z_1, z_2 — две произвольные различные точки области D. Рассмотрим отображения

$$\Psi_m(z) = z - g_m(z_1), \qquad \psi_m(z) = \frac{z}{|g_m(z_2) - g_m(z_1)|} e^{-i \arg(g_m(z_2) - g_m(z_1))},$$

тогда

$$f_m(z) = \varphi_m \circ \Psi_m^{-1} \circ \Psi_m \circ g_m(z) = \varphi_m \circ \Psi_m^{-1} \circ \psi_m^{-1} \circ \psi_m \circ \Psi_m \circ g_m(z)\,.$$

Обозначая

$$A_m(w) := \varphi_m \circ \Psi_m^{-1} \circ \psi_m^{-1}(w)$$

и

$$B_m(z) = \psi_m \circ \Psi_m \circ g_m(z) = \frac{g_m(z) - g_m(z_1)}{|g_m(z_2) - g_m(z_1)|} e^{-i \arg(g_m(z_2) - g_m(z_1))},$$

видим, что $f_m(z) = A_m \circ B_m(z)$, где A_m — аналитические функции и B_m — гомеоморфизмы, удовлетворяющие условиям $B_m(z_1) = 0$, $B_m(z_2) = 1$. Следует отметить, что в силу леммы 1 семейство гомеоморфизмов $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ принадлежит классу $\mathfrak{H}_{0,Q}(D \setminus \{z_1\})$ (см. обозначения леммы 2), а также классу $\mathfrak{H}_{1,Q}(D \setminus \{z_2\})$. Тогда согласно первой части леммы 2 семейство отображений B_m является нормальным семейством отображений как в $D \setminus \{z_1\}$, так и в $D \setminus \{z_2\}$.

Поскольку произвольный компакт $C \subset D$ может быть представлен в виде объединения $C = C_1 \cup C_2$, где C_1 — компакт в $D \setminus \{z_1\}$ и C_2 — компакт в $D \setminus \{z_1\}$, отсюда следует, что B_m также образует нормальное семейство отображений в области D.

Итак, пусть $h(B_{m_k}(x), B(x)) \to 0$ при $k \to \infty$ локально равномерно в D, где B — некоторое непрерывное отображение. Тогда в силу условий $B_{m_k}(z_1) = 0$, $B_{m_k}(z_2) = 1$ и второй части леммы 2 отображение B является гомеоморфизмом из D в $\mathbb{C}$.

Заметим, что $B(D) \subset B_{m_k}(D)$ при всех $k \geq K_0$ и некотором $K_0 \in \mathbb{N}$ (см. [13], предложение 3.1 либо [14], предложение 1.5, гл. 1). В таком случае все отображения A_{m_k} определены в области $B(D)$. Отметим, что в этой области каждое отображение A_{m_k} не может принимать ни значения a, ни значения b, так как в противном случае и сами отображения f_{m_k} принимали бы все те же значения, что противоречит условию теоремы. В таком случае семейство отображений A_{m_k} является нормальным в силу теоремы Монтеля о нормальности семейств аналитических функций, не принимающих пары комплексных значений (см. [1], § 32, гл. II).

Пусть $A_{m_{k_l}}$ — последовательность аналитических функций, являющаяся подпоследовательностью последовательности A_{m_k}, сходящаяся локально равномерно в $B(D)$ при $l \to \infty$ к аналитической функции (либо тождественной бесконечности), которую мы обозначим через $A(x)$. Пусть C — произвольный компакт в области D. Тогда вследствие локально равномерной сходимости B_{m_k} к отображению B все точки $B_{m_{k_l}}(x)$ лежат внутри некоторого компакта $C_1 \subset B(D)$ при всех $x \in C$ и всех $l \geq K_1 \in \mathbb{N}$. Тогда при тех же x и l имеем

$$h\big(A_{m_{k_l}} \circ B_{m_{k_l}}(x), A \circ B(x)\big) \leq$$

$$\leq h\big(A_{m_{k_l}} \circ B_{m_{k_l}}(x), A \circ B_{m_{k_l}}(x)\big) + h\big(A \circ B_{m_{k_l}}(x), A \circ B(x)\big) \leq$$

$$\leq \sup_{y \in C_1} h\big(A_{m_{k_l}}(y), A(y)\big) + h\big(A \circ B_{m_{k_l}}(x), A \circ B(x)\big) \to 0$$

при $l \to \infty$ равномерно по $x \in C$. Таким образом, последовательность $f_m \in \mathfrak{G}_{a,b,Q}(D)$ имеет подпоследовательность, сходящуюся локально равномерно в D.

Теорема 1 доказана.

***Доказательство следствия* 1** вытекает из того, что семейство $\mathfrak{G}^*_{a,b,B}(D)$ является подклассом семейства $\mathfrak{G}_{a,b,B}(D)$ при указанных условиях на функцию B. Действительно, $\mathfrak{G}^*_{a,b,B}(D) \subset W^{1,1}_{\rm loc}$ и каждое $f \in \mathfrak{G}^*_{a,b,B}(D)$ имеет конечное искажение в силу следствий 3.3, 3.5 [15], кроме того, $K_\mu(z) \leq Q(z)$ почти всюду согласно следствию 3.2 [15].

4. О компактности классов Соболева. Для фиксированных области $D \subset \mathbb{C}$, чисел $a, b \in D$, $a \neq b$, $a', b' \in \mathbb{C}$, $a' \neq b'$, и измеримой по Лебегу функции $Q\colon D \to [0, \infty]$ обозначим символом $\mathfrak{A}_{a,b,a',b',Q}(D)$ семейство всех открытых дискретных отображений $f\colon D \to \mathbb{C}$ класса $W^{1,1}_{\rm loc}(D)$, имеющих конечное искажение, таких, что $f(a) = a'$, $f(b) = b'$ и $K_{\mu_f}(z) \leq Q(z)$ при почти всех $z \in D$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Класс $\mathfrak{A}_{a,b,a',b',Q}(D)$ является компактным (т. е. нормальным и замкнутым семейством отображений в топологии локально равномерной сходимости).*

Доказательство. Заметим, что семейство отображений является нормальным в силу теоремы 1. Более того, повторяя доказательство этой теоремы, приходим к заключению, что произвольная сходящаяся последовательность f_m представима в виде композиции $f_m = A_m \circ B_m$, где B_m — последовательность гомеоморфизмов, сходящаяся локально равномерно к гомеоморфизму B, а A_m — последовательность аналитических функций, сходящаяся к аналитической функции A. При этом $f_m \to f := A \circ B$. Осталось показать, что $f \in \mathfrak{A}_{a,b,a',b',Q}(D)$.

Заметим, что условия нормировки $f_m(a) = a'$, $f_m(b) = b'$ исключают возможность, когда A является постоянной функцией. Значит, f дискретно и открыто. Кроме того, в силу леммы 1 заключаем, что $B_m \in W^{1,1}_{\text{loc}}$, B_m имеют конечное искажение и $K_{\mu_{B_m}}(z) = K_{\mu_{f_m}}(z)$. Согласно теоремам 17.1, 17.2 [13] предельное отображение B также принадлежит классу $W^{1,1}_{\text{loc}}$, имеет конечное искажение и его максимальная дилатация $K_{\mu_B}(z)$ не превышает $Q(z)$ почти всюду. Тогда, очевидно, $f = A \circ B \in W^{1,1}_{\text{loc}}$ и $K_{\mu_f}(z) \leq Q(z)$. Равенства $f(a) = a'$ и $f(b) = b'$ элементарно получаются предельным переходом по m из равенств $f_m(a) = a'$ и $f_m(b) = b'$.

Теорема 2 доказана.

5. Некоторые примеры. Отметим, что ограничения на функцию Q, содержащиеся в формулировках основных результатов настоящей работы, нельзя, вообще говоря, заменить условием $Q \in L^p$ ни для какого (сколь угодно большого) $p > 0$. Для простоты рассмотрим случай, когда $D := \mathbb{B}^2 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Для каждого $p \geq 1$ существуют функция $Q \colon \mathbb{B}^2 \to [1, \infty]$, $Q(z) \in L^p(\mathbb{B}^2)$, и равномерно ограниченная последовательность гомеоморфизмов $g_m \colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}$, $g_m \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{B}^2)$, имеющих конечное искажение, таких, что $K_\mu(z) \leq Q(z)$, при этом семейство $\{g_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$ не является равностепенно непрерывным в точке $z_0 = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим следующий пример. Зафиксируем числа $p \geq 1$ и $\alpha \in (0, 2/p)$. Можно считать, что $\alpha < 1$ в силу произвольности выбора p. Зададим последовательность гомеоморфизмов $g_m \colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}$ следующим образом:

$$g_m(z) = \begin{cases} \dfrac{1 + |z|^\alpha}{|z|} \cdot z, & 1/m \leq |z| < 1, \\ \dfrac{1 + (1/m)^\alpha}{(1/m)} \cdot z, & 0 < |z| < 1/m. \end{cases}$$

Заметим, что каждое отображение g_m переводит единичный круг $D = \mathbb{B}^2$ в круг $D' = B(0, 2)$ и последовательность g_m постоянна при $|z| \geq 1/m$, а именно, $g_m(z) \equiv g(z)$ при всех $z \colon \dfrac{1}{m} < |z| < 1$, $m = 1, 2 \ldots$, где $g(z) = \dfrac{1 + |z|^\alpha}{|z|} \cdot z$.

Заметим, что $g_m \in ACL(\mathbb{B}^2)$. Действительно, отображения $g_m^{(1)}(z) = \dfrac{1 + (1/m)^\alpha}{(1/m)} \cdot z$, $m = 1, 2, \ldots$, являются отображениями класса C^1, например, в шаре $B(0, 1/m + \varepsilon)$ при малых $\varepsilon > 0$, а отображения $g_m^{(2)}(z) = \dfrac{1 + |z|^\alpha}{|z|} \cdot z$ — отображениями класса C^1, например, в кольце

$$A(1/m - \varepsilon, 1, 0) = \{z \in \mathbb{C} \colon 1/m - \varepsilon < |z| < 1\}$$

при малых $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что гомеоморфизмы g_m являются липшицевыми в $\mathbb{B}^2$ и, значит, $g_m \in ACL(\mathbb{B}^2)$ (см., например, [7, с. 12], разд. 5). Далее, непосредственно получаем

$|J(g_m, z)| = \dfrac{|z|^\alpha + 1}{|z|} \cdot \alpha|z|^{\alpha-1}$, $\|g_m'(z)\| = \dfrac{|z|^\alpha + 1}{|z|}$, так что в каждой регулярной точке $z \in \in D$ отображения $g_m : D \to \mathbb{C}$ дилатация $K_{\mu_{g_m}}(z)$ отображения g_m в точке z вычисляется следующим образом:

$$K_{\mu_{g_m}}(z) = \begin{cases} \dfrac{1 + |z|^\alpha}{\alpha|z|^\alpha}, & 1/m \le |z| \le 1, \\ 1, & 0 < |z| < 1/m. \end{cases}$$

Заметим, что отображения g_m имеют конечное искажение, так как их якобиан $J(g_m, z)$ почти всюду не равен нулю. Кроме того, $K_{\mu_{g_m}}(z) \le Q(z)$, где $Q = \dfrac{1 + |z|^\alpha}{\alpha|z|^\alpha}$ и $Q(z) \le \dfrac{C}{|z|^\alpha}$, $C := \dfrac{2}{\alpha}$. Таким образом, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{B}^2} \big(Q(z)\big)^p dm(z) \le C^p \int\limits_{\mathbb{B}^2} \frac{dm(z)}{|z|^{p\alpha}} = C^p \int\limits_0^1 \int\limits_{S(0,r)} \frac{d\mathcal{H}^1}{|z|^{p\alpha}}\, dr = 2\pi C^p \int\limits_0^1 \frac{dr}{r^{(p\alpha-1)}}. \tag{3}$$

Известно, что интеграл $I := \displaystyle\int_0^1 \frac{dr}{r^\beta}$ сходится при $\beta < 1$. Таким образом, интеграл в правой части соотношения (3) сходится, поскольку показатель степени $\beta := (p\alpha - 1)$ удовлетворяет условию $\beta < 1$ при $\alpha \in (0, 2/p)$. Отсюда следует, что $Q(z) \in L^p(\mathbb{B}^2)$. С другой стороны, легко видеть, что

$$\lim_{z \to 0} |g(z)| = 1 \tag{4}$$

и g отображает проколотый круг $\mathbb{B}^2 \setminus \{0\}$ на кольцо $1 < |y| < 2$. Тогда в силу (4) получаем $|g_m(z)| = |g(z)| \ge 1$ для всех z таких, что $|z| \ge 1/m$, $m = 1, 2, \ldots$, т. е. семейство $\{g_m\}_{m=1}^\infty$ не является равностепенно непрерывным в нуле.

Теорема 3 доказана.

Приведем еще один пример, касающийся выполнения условия (1) в формулировках основных утверждений работы.

Теорема 4. *Для каждой измеримой по Лебегу функции* $Q : \mathbb{B}^2 \to [1, \infty]$, $Q \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^2)$, *такой, что* $\displaystyle\int_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_0(t)} < \infty$, *найдется семейство равномерно ограниченных отображений* $f_m \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^2)$ *с конечным искажением со следующими свойствами*:

1) $K_{\mu_{f_m}}(z) \le \widetilde{Q}(z)$, *где* $\widetilde{Q}(z)$ — *некоторая измеримая по Лебегу функция, такая, что* $\widetilde{q}_0(r) := \dfrac{1}{2\pi r} \displaystyle\int_{S(0,r)} \widetilde{Q}(z) d\mathcal{H}^1 = q_0(r)$ *для почти всех* $r \in (0, 1)$;

2) *последовательность* f_m *не является равностепенно непрерывной в нуле.*

Доказательство. Определим последовательность отображений $f_m : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}$ следующим образом:

$$f_m(z) = \frac{z}{|z|} \rho_m(|z|), \qquad f_m(0) := 0,$$

где

$$\rho_m(r) = \exp\left\{-\int\limits_r^1 \frac{dt}{tq_{0,m}(t)}\right\}, \qquad q_{0,m}(r) := \frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|z|=r} Q_m(z)\,d\mathcal{H}^1,$$

$$Q_m(z) = \begin{cases} Q(z), & |z| > 1/m, \\ 1, & |z| \le 1/m. \end{cases}$$

Заметим, что $f_m \in ACL$ при любом $m \in \mathbb{N}$. Непосредственными вычислениями получаем

$$\|f_m'(z)\| = \frac{\exp\left\{-\int_{|z|}^1 \dfrac{dt}{tq_{0,m}(t)}\right\}}{|z|}, \qquad \big|J(f_m, z)\big| = \frac{\exp\left\{-2\int_{|z|}^1 \dfrac{dt}{tq_{0,m}(t)}\right\}}{|z|^2 q_{0,m}(|z|)}.$$

Заметим, что $J(f_m, z) \neq 0$ при почти всех z, так что все f_m имеют конечное искажение. Далее, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{B}^2} \|f_m'(z)\|\,dm(z) = 2\pi\int\limits_0^1 r\frac{\exp\left\{-\int_r^1 \dfrac{dt}{tq_{0,m}(t)}\right\}}{r}dr \le 2\pi\exp\left\{-\int\limits_0^1 \frac{dt}{tq_0(t)}\right\} \le \infty\,. \qquad (5)$$

В таком случае из соотношений (5) следует, что $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^2)$.

Заметим, что $K_{\mu_{f_m}}(z) = q_{0,m}(|z|) \le q_0(|z|)$. Полагаем $\widetilde{Q}(z) := q_0(|z|)$, тогда $\widetilde{q}_0(r) = q_0(r)$ для почти всех $r \in (0,1)$.

С другой стороны, заметим, что $|f_m(z)| \le 1$ для всех $m \in \mathbb{N}$ и, таким образом, семейство отображений $\{f_l(z)\}_{l=1}^{\infty}$ равномерно ограничено. Осталось показать, что построенная таким образом последовательность отображений f_m не является равностепенно непрерывной в нуле. Для произвольной последовательности z_m такой, что $|z_m| = 1/m$, $m = 1, 2, \ldots$, имеем $|f_m(z_m)| \ge \sigma$, где σ не зависит от m. Окончательно, для некоторого числа σ и произвольного элемента последовательности $1/(m-1)$, $m = 2, 3, \ldots$, найдутся $z_m \in \mathbb{B}^2$ и элемент семейства отображений $f_m \in \{f_l(z)\}_{l=1}^{\infty}$ такие, что $|z_m - 0| < 1/(m-1)$ и в то же время $|f_m(z_m) - f_m(0)| \ge \sigma$. Таким образом, семейство отображений $\{f_l(z)\}_{l=1}^{\infty}$ не является равностепенно непрерывным в нуле.

Теорема 4 доказана.

1. *Монтель П.* Нормальные семейства аналитических функций. – М., Л.: ОНТИ, 1936.
2. *Севостьянов Е. А.* Теория модулей, емкостей и нормальные семейства отображений, допускающих ветвление // Укр. мат. вестн. – 2007. – **4**, № 4. – С. 582 – 604.
3. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1985.
4. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969.
5. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical function theory and non-linear analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001.
6. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395 – 417.
7. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971. – **229**.
8. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Sci. + Business Media, LLC, 2009.

9. *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. – М.: Наука, 1964.
10. *Rado T., Reichelderfer P. V.* Continuous transformations in analysis. – Berlin etc.: Springer-Verlag. 1955.
11. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1969. – **448**. – P. 1 – 40.
12. *Lomako T., Salimov R., Sevost'yanov E.* On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations // Ann. Univ. Bucharest (Math. Ser.). – 2010. – **59**, № 2. – P. 261 – 271.
13. *Ryazanov V., Salimov R., Sevost'yanov E.* On convergence analysis of space homeomorphisms // Sib. Adv. Math. – 2013. – **23**, № 4. – P. 263 – 293.
14. *Ковтонюк Д. А., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории отображений классов Соболева и Орлича – Соболева. – Киев: Наук. думка, 2013.
15. *Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* Теория кольцевых Q-отображений в геометрической теории функций // Мат. сб. – 2010. – **201**, № 6. – С. 131 – 158.

Получено 28.04.14