УДК 517.53

Т. Я. Глова (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів),
П. В. Філевич (Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ)

ЕФЕКТ ПЕЛІ ДЛЯ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

For the entire Dirichlet series $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{z\lambda_n}$, we establish necessary and sufficient conditions on the coefficients a_n and indices λ_n under which the function f has Paley's effect, i.e., the condition $\overline{\lim}_{r\to+\infty}\dfrac{\ln M_f(r)}{T_f(r)}=+\infty$ is satisfied, where $M_f(r)$ and $T_f(r)$ are the maximum modulus and the Nevanlinna characteristic of the function f, respectively.

Для целого ряда Дирихле $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{z\lambda_n}$ установлены необходимые и достаточные условия на коэффициенты a_n и показатели λ_n, при которых функция f имеет эффект Пейли, т. е. выполняется соотношение $\overline{\lim}_{r\to+\infty}\dfrac{\ln M_f(r)}{T_f(r)}=+\infty$, где $M_f(r)$ и $T_f(r)$ — соответственно максимум модуля и характеристика Неванлинны функции f.

Вступ. Нехай Ω — клас опуклих на $\mathbb{R}$ функцій Φ таких, що $\dfrac{\Phi(x)}{x}\to+\infty$, якщо $x\to+\infty$.

Для довільної трансцендентної цілої функції f її максимум модуля, характеристику Неванлінни і порядок визначимо відповідно за рівностями

$$M_f(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\},$$

$$T_f(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln^+|f(re^{i\theta})|d\theta,$$

$$\rho_f=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r},$$

де $\ln^+x=\ln\max\{x,1\}$. Зрозуміло, що $T_f(r)\le\ln M_f(r)$ для всіх $r\ge r_0$. Як відомо, $\ln M_f(e^x)$ і $T_f(e^x)$ є функціями з класу Ω.

Зростання функції f, як це прийнято, утотожнюємо зі зростанням її логарифма максимуму модуля $\ln M_f(r)$.

Як і в [1], скажемо, що функція f має *ефект Пелі*, якщо для неї виконується співвідношення

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\ln M_f(r)}{T_f(r)}=+\infty. \tag{1}$$

З наступної теореми Дж. Клуні [2] можна зробити такий висновок: жодні умови на зростання цілої функції не можуть забезпечити наявності в неї ефекту Пелі.

Теорема А. *Нехай $\Phi\in\Omega$. Існує трансцендентна ціла функція f, для якої*

$$\ln M_f(r)\sim\Phi(\ln r),\quad r\to+\infty,$$

і справджується співвідношення

$$\ln M_f(r)\sim T_f(r),\quad r\to+\infty. \tag{2}$$

З іншого боку, умови на зростання цілої функції, які забезпечують відсутність у неї ефекту Пелі, вже можна вказати. Зокрема, як відомо (див., наприклад, [3]), якщо для цілої функції f виконується умова

$$\ln M_f(r) = O(\ln^2 r), \quad r \to +\infty, \tag{3}$$

то для неї справджується співвідношення (2). Поряд з цим серед трансцендентних цілих функцій, для яких умова (3) не виконується, існують цілі функції довільного повільного зростання, що мають ефект Пелі. Цей факт випливає з такої теореми [4].

Теорема B. *Нехай* $\Phi \in \Omega$. *Якщо*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\Phi(x)}{x^2} = +\infty,$$

то існує трансцендентна ціла функція f, *для якої*

$$\ln M_f(r) \leq \Phi(\ln r), \quad r \geq r_0,$$

і справджується (1).

Перш ніж сформулювати наступний результат щодо ефекту Пелі для цілих функцій, введемо деякі позначення. Нехай Λ — клас невід'ємних зростаючих до $+\infty$ послідовностей $\lambda = (\lambda_n)$. Через D позначимо клас усіх рядів Діріхле вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \tag{4}$$

де $\lambda \in \Lambda$ і (a_n) — довільна комплексна послідовність така, що $a_n \neq 0$ для безлічі n. Нехай S — підклас цілих (абсолютно збіжних у $\mathbb{C}$) рядів Діріхле з класу D, а S_+ — підклас рядів Діріхле з класу S з невід'ємними коефіцієнтами a_n. Зауважимо, що кожен ряд Діріхле з класу S задає деяку цілу функцію. Ряд Діріхле з ширшого класу D може бути розбіжним у кожній точці $z \in \mathbb{C}$.

А. А. Гольдберг і Й. В. Островський [1] довели наступну теорему.

Теорема C. *Нехай* $\lambda \in \Lambda$, $\rho \geq 1$. *Існує ряд Діріхле* $f \in S_+$ *вигляду* (4) *такий, що* $\rho_f = \rho$ *і функція* f *має ефект Пелі.*

Умова $\rho \geq 1$ в теоремі C обумовлена тим, що довільна функція $f \in S_+$, як легко бачити, завжди має порядок $\rho_f \geq 1$.

Теорему C застосовано в [1] для дослідження властивостей характеристичних функцій імовірнісних законів. Проте, як зазначено в [1], ця теорема може мати й самостійний інтерес.

Зауважимо також, що теореми B і C лише стверджують існування цілих функцій, що мають ефект Пелі. Їх доведення є чисто конструктивними, що не дає змоги вказати прості достатні умови наявності у цілої функції ефекту Пелі.

Але, як виявляється, для функції f класу S_+ можна навести необхідні і достатні умови на послідовності коефіцієнтів (a_n) і показників (λ_n), за яких ця функція має ефект Пелі. Ці умови сформулюємо нижче, а зараз вкажемо на ту характерну особливість функцій $f \in S_+$, завдяки якій вдалося знайти ці умови.

Нехай α — неспадна додатна на $[a,+\infty)$ функція. Як прийнято, функцію α називатимемо *помірно змінною*, якщо $\alpha(2x) = O(\alpha(x))$, $x \to +\infty$. Легко перевірити, що наведене означення рівносильне таким:

1) $\alpha(Cx) = O(\alpha(x))$, $x \to +\infty$, для кожного фіксованого $C > 1$;

2) існує $C > 1$ таке, що $\alpha(Cx) = O(\alpha(x))$, $x \to +\infty$.

Використовуючи відомі нерівності (див., наприклад, [5, с. 54])

$$T_f(r) \le \ln^+ M_f(r) \le \frac{R+r}{R-r} T_f(R), \quad R > r > 0, \tag{5}$$

що виконуються для кожної цілої функції f, легко довести, що якщо f має ефект Пелі, то $\ln M_f(r)$ не є помірно змінною функцією. Обернене твердження, взагалі кажучи, не є правильне: згідно з теоремою А функція $\ln M_f(r)$ може не бути помірно змінною, проте f не повинна мати ефект Пелі. Однак, як доведено нижче, у випадку $f \in S_+$ обернене твердження є правильним, тобто f має ефект Пелі тоді і лише тоді, коли $\ln M_f(r)$ не є помірно змінною функцією. Саме цей факт дозволить описати наявність ефекту Пелі для цілої функції $f \in S_+$, заданої у вигляді ряду Діріхле (4), в термінах коефіцієнтів a_n і показників λ_n цього ряду.

1. Допоміжні результати. Для довільного ряду Діріхле $f \in D$ вигляду (4) приймемо

$$B_f = \{r \in \mathbb{R} \colon |a_n| e^{r\lambda_n} = o(1),\ n \to \infty\},$$

$$b_f = \begin{cases} -\infty, & B_f = \varnothing, \\ \sup B_f, & B_f \ne \varnothing. \end{cases}$$

Легко довести, що

$$b_f = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}.$$

Зрозуміло також, що якщо $B_f \ne \varnothing$, то $B_f = (-\infty, b_f)$ або $B_f = (-\infty, b_f]$ і для кожного $r \in (-\infty, b_f)$ визначено максимальний член $\mu_f(r) = \max\{|a_n| e^{r\lambda_n} : n \in \mathbb{Z}_+\}$ та центральний індекс $\nu_f(r) = \max\{n \in \mathbb{Z}_+ : |a_n| e^{r\lambda_n} = \mu_f(r)\}$ ряду Діріхле (4). Крім того, відомим є наступне просте твердження (див. [6, с. 180 – 184]).

Лема А. *Якщо ряд Діріхле $f \in D$ вигляду* (4) *такий, що $b_f = +\infty$, то існують зростаючі до $+\infty$ послідовності (n_k) і (κ_k) відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел такі, що*

$$a_n = 0, \quad n < n_0, \quad a_{n_k} \ne 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{6}$$

$$\kappa_k = \frac{\ln|a_{n_k}| - \ln|a_{n_{k+1}}|}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{7}$$

$$|a_n| \le |a_{n_k}| e^{\kappa_k(\lambda_{n_k} - \lambda_n)}, \quad n \in [n_k, n_{k+1}), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{8}$$

і $\nu_f(r) = n_0$, якщо $r < \kappa_0$, та $\nu_f(r) = n_{k+1}$, якщо $r \in [\kappa_k, \kappa_{k+1})$ і $k \in \mathbb{Z}_+$.

Послідовності (n_k) і (κ_k) , про які йдеться в лемі А, є відповідно зростаючими послідовностями всіх значень і всіх точок розриву центрального індексу $\nu_f(r)$. За умов леми А маємо $\lambda_{\nu_f(r)} = \lambda_{n_0}$, $\mu_f(r) = |a_{n_0}| e^{r\lambda_{n_0}}$, якщо $r < \kappa_0$, та $\lambda_{\nu_f(r)} = \lambda_{n_{k+1}}$, $\mu_f(r) = |a_{n_{k+1}}| e^{r\lambda_{n_{k+1}}}$, якщо $r \in [\kappa_k, \kappa_{k+1})$ і $k \in \mathbb{Z}_+$. Отже,

$$\lambda_{\nu_f(r)} = (\ln \mu_f(r))'_+,$$

а тому

$$\ln \mu_f(R) - \ln \mu_f(r) = \int\limits_r^R \lambda_{\nu_f(t)} dt, \quad R > r. \tag{9}$$

Крім того, $\mu_f(r)$ є зростаючою до $+\infty$ на $\mathbb{R}$ функцією, а тому з рівності $\ln \mu_f(r) = \ln |a_{\nu_f(r)}| + r\lambda_{\nu_f(r)}$, покладаючи

$$r_0 = \inf\{r \in \mathbb{R}_+ : \mu_f(r) > 1\},$$

отримуємо

$$\frac{r\lambda_{\nu_f(r)}}{\ln |a_{\nu_f(r)}|} < -1, \quad r > r_0 \geq 0. \tag{10}$$

В певному розумінні протилежним до леми A є таке твердження [7].

Лема B. *Якщо для ряду Діріхле $f \in D$ вигляду* (4) *існують зростаючі до $+\infty$ послідовності (n_k) і (κ_k) відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел такі, що виконуються співвідношення* (6)–(8), *то для цього ряду $b_f = +\infty$ і $\nu_f(r) = n_0$, якщо $r < \kappa_0$, та $\nu_f(r) = n_{k+1}$, якщо $r \in [\kappa_k, \kappa_{k+1})$ і $k \in \mathbb{Z}_+$.*

Доведення наступної леми ґрунтується на міркуваннях, близьких до міркувань із [8].

Лема 1. *Нехай ряд Діріхле $f \in D$ вигляду* (4) *такий, що $b_f = +\infty$, а (n_k) і (κ_k) — зростаючі послідовності відповідно всіх значень і всіх точок розриву центрального індексу $\nu_f(r)$. Тоді наступні твердження є рівносильними:*

(i) $\ln \mu_f(r)$ *не є помірно змінною функцією;*

(ii) *справджується співвідношення*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{r\lambda_{\nu_f(r)}}{\ln \mu_f(r)} = +\infty; \tag{11}$$

(iii) *виконується рівність*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{r\lambda_{\nu_f(r)}}{\ln |a_{\nu_f(r)}|} = -1;$$

(iv) *справджується співвідношення*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\kappa_k \lambda_{n_{k+1}}}{\ln |a_{n_{k+1}}|} = -1. \tag{12}$$

Доведення. Насамперед доведемо, що $\ln \mu_f(r)$ є помірно змінною функцією тоді і лише тоді, коли рівність (11) не виконується. Звідси буде випливати рівносильність тверджень (i) та (ii).

Якщо $\ln \mu_f(r)$ — помірно змінна функція, то існує стала $C_1 > 1$ така, що $\ln \mu_f(2r) \leq C_1 \ln \mu_f(r)$ для всіх $r \geq r_1$. Тоді, згідно з (9),

$$r\lambda_{\nu_f(r)} \leq \int\limits_r^{2r} \lambda_{\nu_f(t)} dt = \ln \mu_f(2r) - \ln \mu_f(r) \leq (C_1 - 1) \ln \mu_f(r), \quad r \geq r_1,$$

звідки бачимо, що (11) не виконується.

Навпаки, якщо (11) не виконується, то існує стала C_2 така, що $r\lambda_{\nu_f(r)} \le C_2 \ln \mu_f(r)$ для всіх $r \ge r_2$. Виберемо сталу $C > 1$ так, щоб виконувалась нерівність $\dfrac{C-1}{C} C_2 \le \dfrac{1}{2}$. Тоді, згідно з (9),

$$\ln \mu_f(Cr) - \ln \mu_f(r) = \int\limits_r^{Cr} \lambda_{\nu_f(t)} dt \le (C-1) r \lambda_{\nu_f(Cr)} \le \frac{C-1}{C} C_2 \ln \mu_f(r) \le \frac{1}{2} \ln \mu_f(Cr),$$

звідки отримуємо, що $\ln \mu_f(Cr) \le 2 \ln \mu_f(r)$ для всіх $r \ge r_2$. Отже, $\ln \mu_f(r)$ є помірно змінною функцією. Рівносильність тверджень (i) та (ii) доведено.

Рівносильність тверджень (ii) та (iii) випливає з рівностей

$$\frac{r\lambda_{\nu_f(r)}}{\ln \mu_f(r)} = \frac{r\lambda_{\nu_f(r)}}{\ln |a_{\nu_f(r)}| + r\lambda_{\nu_f(r)}} = \frac{1}{\frac{\ln |a_{\nu_f(r)}|}{r\lambda_{\nu_f(r)}} + 1}$$

і з нерівності (10).

Доведемо рівносильність тверджень (iii) та (iv). Нехай $k_0 = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ \colon \ln |a_{n_{k+1}}| < 0\}$. Тоді для всіх цілих $k \ge k_0$ маємо

$$\max \left\{ \frac{r\lambda_{\nu_f(r)}}{\ln |a_{\nu_f(r)}|} : r \in [\kappa_k, \kappa_{k+1}) \right\} = \frac{\kappa_k \lambda_{n_{k+1}}}{\ln |a_{n_{k+1}}|}.$$

Отже,

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{r\lambda_{\nu_f(r)}}{\ln |a_{\nu_f(r)}|} = \varlimsup_{k \to \infty} \frac{\kappa_k \lambda_{n_{k+1}}}{\ln |a_{n_{k+1}}|}.$$

З отриманої рівності і випливає рівносильність (iii) та (iv).

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай ряд Діріхле* $f \in D$ *вигляду* (4) *такий, що* $b_f = +\infty$, *а* (n_k) *і* (κ_k) *— зростаючі послідовності відповідно всіх значень і всіх точок розриву центрального індексу* $\nu_f(r)$. *Тоді*

$$\varlimsup_{k \to \infty} \frac{\ln \lambda_{n_{k+1}}}{\ln \kappa_k} = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln \ln \mu_f(r)}{\ln r} - 1. \tag{13}$$

Доведення. З нерівності (9) для всіх достатньо великих r отримуємо

$$r\lambda_{\nu_f(r)} \le \int\limits_r^{2r} \lambda_{\nu_f(t)} dt = \ln \mu_f(2r) - \ln \mu_f(r) \le \ln \mu_f(2r),$$

$$r\lambda_{\nu_f(r)} \ge \int\limits_0^{r} \lambda_{\nu_f(t)} dt = \ln \mu_f(r) - \ln \mu_f(0).$$

Звідси бачимо, що

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\lambda_{\nu_f(r)}}{\ln r}+1=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln\mu_f(r)}{\ln r}. \tag{14}$$

Нехай $k_0=\min\{k\in\mathbb{Z}_+:\ \ln\varkappa_k>0\}$. Тоді для всіх цілих $k\geq k_0$ маємо

$$\max\left\{\frac{\ln\lambda_{\nu_f(r)}}{\ln r}: r\in[\varkappa_k,\varkappa_{k+1})\right\}=\frac{\ln\lambda_{n_{k+1}}}{\ln\varkappa_k}.$$

Отже,

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\lambda_{\nu_f(r)}}{\ln r}=\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln\lambda_{n_{k+1}}}{\ln\varkappa_k},$$

звідки, згідно з (14), отримуємо (13).

Лему 2 доведено.

Далі знову розглянемо довільний ряд Діріхле $f\in D$ вигляду (4) і покладемо

$$A_f=\left\{r\in\mathbb{R}:\ \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|e^{r\lambda_n}<+\infty\right\},$$

$$a_f=\begin{cases}-\infty, & A_f=\varnothing,\\ \sup A_f, & A_f\neq\varnothing.\end{cases}$$

Величина a_f, як відомо, називається *абсцисою абсолютної збіжності* ряду (4). Для неї, очевидно, виконується нерівність $a_f\leq b_f$. (Детальніше про співвідношення між a_f і b_f див. [6, с. 113 – 116; 9]; зауважимо, що існують ряди Діріхле $f\in D$, для яких $a_f=-\infty$ і $b_f=+\infty$.)

Якщо $A_f\neq\varnothing$, то для всіх $r<a_f$ покладемо

$$G_f(r)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|e^{r\lambda_n}.$$

Зрозуміло, що ряд (4) є цілим, тобто $f\in S$, тоді і лише тоді, коли $a_f=+\infty$. Для цілого ряду Діріхле функція $G_f(r)$ є визначеною на $\mathbb{R}$ і, очевидно, $M_f(r)\leq G_f(r)$ для всіх $r\geq 0$; якщо ж $f\in S_+$, то $M_f(r)=G_f(r)$, $r\geq 0$.

Нам буде потрібний наступний критерій цілості ряду (4) (див., наприклад, [10]).

Лема C. *Для того щоб ряд Діріхле $f\in D$ вигляду* (4) *був цілим* (*тобто належав до класу S*), *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|}=+\infty.$$

Для послідовності $\lambda\in\Lambda$ покладемо

$$\tau(\lambda)=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}.$$

Справджується така класична лема Ж. Валірона [11] (див. також [6, с. 184; 12; 7]).

Лема D. *Нехай послідовність* $\lambda \in \Lambda$ *така, що* $\tau(\lambda) < A < +\infty$. *Тоді для кожного ряду Діріхле* $f \in S$ *вигляду* (4) *виконується співвідношення*

$$G_f(r) = o(\mu_f(r + A)), \quad r \to +\infty.$$

Лема 3. *Нехай* $\lambda \in \Lambda$ — *послідовність цілих чисел. Тоді для кожного ряду Діріхле* $f \in S$ *вигляду* (4) *і довільного фіксованого* $A > 0$ *виконується співвідношення*

$$G_f(r) = o(M_f(\sqrt{(r + A)^2 + \pi^2})), \quad r \to +\infty. \tag{15}$$

Доведення. Нехай $f \in S$ — ряд Діріхле вигляду (4). Для всіх $x \in \mathbb{R}$ покладемо

$$\mathcal{M}_f(x) = \sup\{|f(x + iy)| : y \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, що $\mathcal{M}_f(r) \le G_f(r)$. Відомо (див., наприклад, [6, c. 183]), що $\mu_f(r) \le \mathcal{M}_f(r)$. Крім того, оскільки $\lambda \in \Lambda$ — послідовність цілих чисел, то $\lambda_n \ge n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. Отже, $\tau(\lambda) = 0$, а тому, згідно з лемою D, для довільного фіксованого $A > 0$ виконується співвідношення

$$G_f(r) = o(\mathcal{M}_f(r + A)), \quad r \to +\infty. \tag{16}$$

З цілості показників λ_n випливає також, що для кожного фіксованого $x \in \mathbb{R}$ функція $|f(x + iy)|$, як функція від y, є періодичною з періодом 2π. Отже,

$$\mathcal{M}_f(x) = \max\{|f(x + iy)| : y \in [-\pi, \pi]\}.$$

Враховуючи, що для $r \ge 0$ круг $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le \sqrt{r^2 + \pi^2}\}$ містить відрізок $[r - i\pi, r + i\pi]$, за принципом максимуму модуля отримуємо

$$\mathcal{M}_f(r) \le M_f(\sqrt{r^2 + \pi^2}), \quad r \ge 0.$$

Звідси і з (16) отримуємо (15).

Лему 3 доведено.

Наступна лема є відомою.

Лема E. *Нехай* f — *ціла функція, відмінна від тотожної сталої. Якщо* $\ln M_f(r)$ *є помірно змінною функцією, то* $\rho_f < +\infty$.

Справді, якщо функція $\ln M_f(r)$ є помірно змінною, то існує стала $C_0 > 1$ така, що $\ln M_f(er) \le C_0 \ln M_f(r)$ для всіх $r \ge r_0$. Крім того, як відомо, функція $\ln M_f(r)$ є опуклою відносно $\ln r$, тому $K_f(r) = r(\ln M_f(r))'_+$ є неспадною невід'ємною на $(0, +\infty)$ функцією. З огляду на це маємо

$$K_f(r) \le \int\limits_r^{er} \frac{K_f(t)}{t} dt = \ln M_f(er) - \ln M_f(r) \le (C_0 - 1) \ln M_f(r), \quad r \ge r_0.$$

Тоді для всіх $r \ge r_0$ отримуємо

$$\ln\ln M_f(r) - \ln\ln M_f(r_0) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{K_f(t)}{t \ln M_f(t)}\, dt \le (C_0 - 1) \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{t} = (C_0 - 1) \ln\, \frac{r}{r_0},$$

звідки й випливає, що $\rho_f \le C_0 - 1 < +\infty$.

2. Основні результати. Для ряду Діріхде $f \in S$ вигляду (4) і всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ покладемо $T_n = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|$. Поряд з рядом (4) розглянемо ряд Діріхле

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n e^{z\lambda_n}. \tag{17}$$

За лемою С маємо

$$b_{\tilde{f}} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{T_n} = +\infty.$$

Отже, для ряду (17) його максимальний член

$$\mu_{\tilde{f}}(r) = \max\{T_n e^{r\lambda_n} : n \in \mathbb{Z}_+\}$$

є визначеним для кожного $r \in \mathbb{R}$.

Позначимо через S_* клас рядів Діріхле $f \in S$, для яких існує додатна спадна до 0 на $(a, +\infty)$ функція α така, що

$$\ln G_f(r) = O(\ln M_f((1 + \alpha(r))r)), \quad r \to +\infty. \tag{18}$$

Зрозуміло, що $S_+ \subset S_* \subset S$.

Основним результатом цієї статті є наступний критерій наявності ефекту Пелі для цілого ряду Діріхле $f \in S_*$ у термінах його коефіцієнтів і показників.

Теорема 1. *Для кожного цілого ряду Діріхле* $f \in S_*$ *вигляду* (4) *рівносильними є такі твердження*:

(i) f *має ефект Пелі;*

(ii) $T_f(r)$ *не є помірно змінною функцією;*

(iii) $\ln M_f(r)$ *не є помірно змінною функцією;*

(iv) $\ln G_f(r)$ *не є помірно змінною функцією;*

(v) $\ln \mu_{\tilde{f}}(r)$ *не є помірно змінною функцією;*

(vi) *існують зростаючі до* $+\infty$ *послідовності* (n_k) *і* (K_k) *відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел такі, що*

$$T_n = 0, \quad n < n_0, \quad T_{n_k} \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{19}$$

$$K_k = \frac{\ln |T_{n_k}| - \ln |T_{n_{k+1}}|}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{20}$$

$$|T_n| \leq |T_{n_k}| e^{K_k(\lambda_{n_k} - \lambda_n)}, \quad n \in [n_k, n_{k+1}), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{21}$$

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{K_k \lambda_{n_{k+1}}}{\ln |T_{n_{k+1}}|} = -1. \tag{22}$$

Доведення. Нехай $f \in S_*$ — цілий ряд Діріхле вигляду (4), а α — додатна спадна до 0 на $(a, +\infty)$ функція така, що виконується співвідношення (18).

Легко бачити, що рівносильність тверджень (ii) і (iii) випливає з нерівностей (5), тверджень (iii) і (iv) — із нерівності $M_f(r) \leq G_f(r)$ і співвідношення (18), а тверджень (iv) і (v) — із встановлених у [10] нерівностей

$$\mu_{\tilde{f}}(r) \le G_f(r) \le G_f(0) + \varepsilon\mu_{\tilde{f}}((\varepsilon+1)r), \quad \varepsilon > 0, \quad r \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

Доведемо рівносильність тверджень (v) і (vi). Розглянемо ряд (17) і нехай $\ln\mu_{\tilde{f}}(r)$ не є помірно змінною функцією. За лемою A, застосованою до цього ряду, існують зростаючі до $+\infty$ послідовності (n_k) і (K_k) відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел такі, що виконуються співвідношення (19) – (21). За цією ж лемою (n_k) і (K_k) є зростаючими послідовностями відповідно усіх значень і всіх точок розриву центрального індексу $\nu_{\tilde{f}}(r)$. Тому, згідно з лемою 1, для цих послідовностей виконується (22).

Навпаки, нехай для ряду (17) існують зростаючі до $+\infty$ послідовності (n_k) і (K_k) відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел такі, що виконуються співвідношення (19) – (22). Зі співвідношень (19) – (21), згідно з лемою B, випливає, що (n_k) і (K_k) є зростаючими послідовностями відповідно всіх значень і всіх точок розриву центрального індексу $\nu_{\tilde{f}}(r)$. Тому, враховуючи (22) і застосовуючи до ряду (17) лему 1, можемо зробити висновок, що $\ln\mu_{\tilde{f}}(r)$ не є помірно змінною функцією. Отже, рівносильність тверджень (v) і (vi) доведено.

Крім того, як вже зазначалось у вступі, з (i) випливає (iii) за нерівностями (5). Тому нам залишається показати, що з (iii) випливає (i).

Отже, нехай функція $\ln M_f(r)$ не є помірно змінною, тобто

$$\forall\, C > 1\colon \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(Cr)}{\ln M_f(r)} = +\infty. \tag{24}$$

Зафіксуємо довільне $L > 0$ і виберемо $\varepsilon > 0$ настільки малим, щоб виконувалась нерівність $\delta := \arccos\dfrac{1}{1+\varepsilon} \le \dfrac{1}{L}$. Зі співвідношень (18) і (24) отримуємо

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f((1+\varepsilon)r)}{\ln G_f(r)} = +\infty,$$

звідки безпосередньо випливає існування додатних зростаючих $+\infty$ послідовностей (γ_k) і (r_k) таких, що

$$\ln M_f((1+\varepsilon)r_k) = \gamma_k \ln G_f(r_k), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Нехай $E = [-\pi,\pi]\backslash[-\theta,\theta]$. Оскільки

$$|f(re^{i\theta})| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\lambda_n r(\cos\theta + i\sin\theta)}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{\lambda_n r\cos\theta} = G_f(r\cos\theta),$$

то для всіх $r > 0$ і $\theta \in E$ маємо

$$|f((1+\varepsilon)re^{i\theta})| \le G_f(r).$$

Тоді для всіх цілих $k \ge k_0$ отримуємо

$$T_f((1+\varepsilon)r_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+|f((1+\varepsilon)r_k e^{i\theta})|d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \ln^+ |f((1+\varepsilon)r_k e^{i\theta})|d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_E \ln^+ |f((1+\varepsilon)r_k e^{i\theta})|d\theta \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \ln M_f((1+\varepsilon)r_k)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_E \ln G_f(r_k)d\theta \le$$

$$\le \frac{\delta}{\pi}\ln M_f((1+\varepsilon)r_k) + \ln G_f(r_k) \le \left(\frac{1}{\pi L} + \frac{1}{\gamma_k}\right)\ln M_f((1+\varepsilon)r_k).$$

Отже,

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{T_f(r)} \ge \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln M_f((1+\varepsilon_k)r_k)}{T_f((1+\varepsilon)r_k)} \ge \pi L.$$

З довільності L випливає, що для функції f виконується співвідношення (1), тобто ця функція має ефект Пелі.

Теорему 1 доведено.

***Наслідок* 1.** (i) *Кожен ряд Діріхле $f \in S_*$ порядку $\rho_f = +\infty$ має ефект Пелі.*

(ii) *Нехай $\lambda \in \Lambda$ — послідовність цілих чисел. Кожен ряд Діріхле $f \in S$ вигляду* (4) *порядку $\rho_f = +\infty$ має ефект Пелі.*

Доведення. Твердження (i) є безпосереднім наслідком з теореми 1 і леми E. Тому для доведення твердження (ii) достатньо показати, що якщо $\lambda \in \Lambda$ — послідовність цілих чисел, а $f \in S$ — ряд Діріхле вигляду (4), то $f \in S_*$.

Отже, нехай $\lambda \in \Lambda$ — послідовність цілих чисел, а $f \in S$ — ряд Діріхле вигляду (4). Покладемо

$$\alpha(r) = \frac{\sqrt{(r+1)^2+\pi^2}}{r} - 1.$$

Зрозуміло, що α є додатною спадною до 0 на $(0,+\infty)$ функцією. Крім того, застосовуючи лему 3 з $A = 1$, отримуємо

$$G_f(r) = o(M_f((1+\alpha(r))r)), \quad r \to +\infty.$$

Звідси бачимо, що для функції f виконується співвідношення (18), тобто $f \in S_*$.

Наслідок 1 доведено.

У випадку, коли послідовність $\lambda = (\lambda_n)$ не надто повільно прямує до $+\infty$, для ряду Діріхле $f \in S_*$ вигляду (4) правильним є простіший для перевірки критерій наявності ефекту Пелі.

Теорема 2. *Нехай послідовність $\lambda \in \Lambda$ така, що $\tau(\lambda) < +\infty$. Тоді для кожного цілого ряду Діріхле $f \in S_*$ вигляду* (4) *рівносильними є такі твердження*:

(i) *f має ефект Пелі;*

(ii) *$\ln \mu_f(r)$ не є помірно змінною функцією;*

(iii) *існують зростаючі до $+\infty$ послідовності (n_k) і (κ_k) відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел такі, що виконуються співвідношення* (6) – (8) *і* (12).

Доведення. За теоремою 1 функція f має ефект Пелі, якщо і лише якщо $\ln G_f(r)$ не є помірно змінною функцією. Оскільки $\tau(\lambda) < +\infty$, то з нерівності $\mu_f(r) \leq G_f(r)$ і леми D випливає, що $\ln G_f(r)$ не є помірно змінною функцією тоді і лише тоді, коли $\ln \mu_f(r)$ не є помірно змінною функцією. Отже, твердження (i) і (ii) є рівносильними. Рівносильність тверджень (ii) і (iii) для ряду (4) доводиться аналогічно до рівносильності тверджень (v) і (vi) для ряду (17) в теоремі 1.

Теорему 2 доведено.

Нехай $\lambda \in \Lambda$ — послідовність цілих чисел. Тоді $\tau(\lambda) = 0$ і (див. доведення наслідку 1) кожен ряд Діріхле $f \in S$ вигляду (4) належить до класу S_*. Тому з теореми 2 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай $\lambda \in \Lambda$ — послідовність цілих чисел. Ряд Діріхле $f \in S$ вигляду* (4) *має ефект Пелі тоді і лише тоді, коли існує зростаюча послідовність невід'ємних цілих чисел (n_k), для якої виконуються співвідношення* (6) – (8) *і* (12).

3. Ряди Діріхле заданого порядку з ефектом Пелі. З огляду на теорему C виникає задача про можливість встановлення необхідних і достатніх умов на коефіцієнти і показники ряду Діріхле $f \in S_+$, за яких цей ряд має одночасно як ефект Пелі, так і заданий порядок $\rho \in \in [1, +\infty)$. Розв'язок цієї задачі містить така теорема.

Теорема 3. *Нехай $\rho \in [1, +\infty)$, а $f \in S_*$ — цілий ряд Діріхле вигляду* (4). *Для того щоб функція f мала ефект Пелі і порядок $\rho_f = \rho$, необхідно і достатньо, щоб існували зростаючі до $+\infty$ послідовності (n_k) і (K_k) відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел такі, що виконуються співвідношення* (19) – (22) *і*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln \lambda_{n_{k+1}}}{\ln K_k} = \rho - 1. \tag{25}$$

Доведення. Нехай $f \in S_*$ — цілий ряд Діріхле вигляду (4), а α — додатна спадна до 0 на $(a, +\infty)$ функція така, що виконується співвідношення (18).

Поряд з рядом (4) розглянемо ряд (17).

З нерівності $M_f(r) \leq G_f(r)$ і співвідношення (18) випливає, що в означенні порядку ρ_f функцію $M_f(r)$ можна замінити функцією $G_f(r)$, яку, в свою чергу, можна замінити на $\mu_{\tilde{f}}(r)$ згідно з нерівностями (23). Отже,

$$\rho_f = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln \mu_{\tilde{f}}(r)}{\ln r}. \tag{26}$$

Доведемо спочатку *достатність* умов теореми 3. Припустимо, що існують зростаючі до $+\infty$ послідовності (n_k) і (K_k) відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел такі, що виконуються співвідношення (19) – (22) і (25). Тоді з теореми 1, згідно зі співвідношеннями (19) – (22), випливає, що f має ефект Пелі. Крім того, зі співвідношень (19) – (21) і леми B, застосованої до ряду (17), можемо зробити висновок, що (n_k) і (K_k) є зростаючими послідовностями відповідно всіх значень і всіх точок розриву центрального індексу $\nu_{\tilde{f}}(r)$. Застосовуючи до ряду (17) лему 2, отримуємо

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln \lambda_{n_{k+1}}}{\ln K_k} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln \mu_{\tilde{f}}(r)}{\ln r} - 1. \tag{27}$$

Враховуючи (27), (26) і (25), бачимо, що $\rho_f = \rho$.

Перейдемо до доведення *необхідності* умов теореми 3. Нехай f має ефект Пелі і порядок $\rho_f = \rho$. За теоремою 1 з наявності ефекту Пелі випливає існування зростаючих до $+\infty$ послідовностей (n_k) і (K_k) відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел таких, що виконуються співвідношення (19) – (22). Зі співвідношень (19) – (21) і леми B, застосованої до ряду (17), можемо зробити висновок, що (n_k) і (K_k) є зростаючими послідовностями відповідно всіх значень і всіх точок розриву центрального індексу $\nu_{\tilde{f}}(r)$. Застосовуючи до ряду (17) лему 2, отримуємо (27). Тоді з (27), (26) і рівності $\rho_f = \rho$ випливає, що виконується (25).

Теорему 3 доведено.

Нехай послідовність $\lambda \in \Lambda$ така, що $\tau(\lambda) < +\infty$, $f \in S_*$ — довільний цілий ряд Діріхле вигляду (4). Як зазначено вище, в означенні порядку ρ_f функцію $M_f(r)$ можна замінити функцією $G_f(r)$; функцію $G_f(r)$, в свою чергу, можна замінити на $\mu_f(r)$ згідно з нерівністю $\mu_f(r) \leq G_f(r)$ і лемою D. Отже,

$$\rho_f = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln \ln \mu_f(r)}{\ln r}. \tag{28}$$

Застосовуючи до ряду (4) і співвідношення (28) такі ж міркування, як і при доведенні теореми 3 до ряду (17) і співвідношення (26), бачимо, що справджується наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай* $\rho \in [1, +\infty)$, *послідовність* $\lambda \in \Lambda$ *така, що* $\tau(\lambda) < +\infty$, *а* $f \in S_*$ — *цілий ряд Діріхле вигляду* (4). *Для того щоб функція* f *мала ефект Пелі і порядок* $\rho_f = \rho$, *необхідно і достатньо, щоб існували зростаючі до* $+\infty$ *послідовності* (n_k) *і* (κ_k) *відповідно невід'ємних цілих і дійсних чисел такі, що виконуються співвідношення* (6) – (8), (12) *і*

$$\varlimsup_{k \to \infty} \frac{\ln \lambda_{n_{k+1}}}{\ln \kappa_k} = \rho - 1.$$

4. Відкрите питання. Позначимо через Λ_* підклас послідовностей $\lambda \in \Lambda$, для яких кожен цілий ряд Діріхле $f \in S$ вигляду (4) входить до класу S_*. Зрозуміло, що тоді наслідок 2 і твердження (ii) наслідку 1 є правильними для кожної послідовності $\lambda \in \Lambda_*$. З огляду на це виникає така задача: *Описати клас* Λ_*, *тобто знайти необхідну і достатню умову на послідовність* $\lambda \in \Lambda$, *за якої для кожного цілого ряду Діріхле* $f \in S$ *вигляду* (4) *існує додатна спадна до* 0 *на* $(a, +\infty)$ *функція* α *така, що виконується співвідношення* (18).

З викладеного вище випливає, що достатньою умовою належності послідовності $\lambda \in \Lambda$ до класу Λ_* є цілість її членів. Іншу достатню умову дозволяє знайти наступна теорема О. Б. Скасківа [13].

Теорема D. *Нехай* $\lambda \in \Lambda$. *Для того щоб для довільного ряду Діріхле* $f \in S$ *вигляду* (4) *існувала множина* $E_f \subset (0, +\infty)$ *скінченної міри така, що*

$$G_f(r) \sim m_f(r), \quad E_f \not\ni r \to +\infty, \tag{29}$$

де $m_f(x) = \inf\{|f(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\}$, $x \in \mathbb{R}$, *необхідно і достатньо, щоб для послідовності* λ *виконувалась умова*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty. \tag{30}$$

***Наслідок* 3.** *Якщо для послідовності* $\lambda \in \Lambda$ *виконується умова* (30), *то* $\lambda \in \Lambda_*$.

Доведення. Нехай для послідовності $\lambda \in \Lambda$ виконується умова (30), а $f \in S$ — довільний ряд Діріхле вигляду (4). Тоді за теоремою D існує множина $E_f \subset (0, +\infty)$ скінченної міри δ така, що для функції f виконується співвідношення (29). Нехай $c > \delta$. Тоді на кожному інтервалі $(r, r + c)$, $r > 0$, знайдеться точка $\gamma(r)$, яка не належить множині E_f. Згідно з (29),

$$G_f(\gamma(r)) \sim m_f(\gamma(r)), \quad r \to +\infty.$$

З отриманого співвідношення випливає існування додатної спадної до 0 на $(a, +\infty)$ функції α такої, що виконується співвідношення (18).

Наслідок 3 доведено.

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Об эффекте Пейли для целых характеристических функций и целых функций, представленных рядами Дирихле // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1985. – Вып. 43. – С. 18 – 23.
2. *Clunie J.* On integral function having prescribed asymptotic growth // Can. J. Math. – 1965. – **17**, № 3. – P. 396 – 404.
3. *Заболоцкий Н. В., Шеремета М. Н.* О медленном росте основных характеристик целых функций // Мат. заметки. – 1999. – **65**, № 2. – С. 206 – 214.
4. *Filevych P. V.* On Paley's effect for entire functions // Mat. Stud. – 2003. – **19**, № 1. – P. 37 – 41.
5. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 590 с.
6. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.
7. *Филевич П. В.* К теореме Валирона о соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 4 (503). – С. 66 – 72.
8. *Филевич П. В., Шеремета М. Н.* Правильно растущие целые ряды Дирихле // Мат. заметки. – 2003. – **74**, № 1. — С. 118 – 131.
9. *Filevych P. V.* On relations between the abscissa of convergence and the abscissa of absolute convergence of random Dirichlet series // Mat. Stud. – 2003. – **20**, № 1. – P. 33 – 39.
10. *Шеремета М. М.* Про зростання цілого ряду Діріхле // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 8. – С. 1149 – 1153.
11. *Valiron G.* Sur l'abscisse de convergence des series de Dirichlet // Bull. Soc. Math. France. – 1924. – **52**. – P. 86 – 98.
12. *Притула Я. Я.* Про максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1995. – Вип. 43. – С. 25 – 30.
13. *Скасків О. Б.* Максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1984. – № 11. – С. 22 – 24.

Одержано 24.04.14