УДК 517.5

О. М. Піддубний (Східноєвроп. нац. ун-т ім. Лесі Українки)

ОЦІНКИ ЗРОСТАННЯ ВЗДОВЖ РАДІУСА ПОХІДНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

We study the radial boundary behavior of functions analytic in a unit disk of the complex plane.

Исследуется радиальное граничное поведение функций, аналитических в единичном круге комплексной плоскости.

1. Класична теорема Гарді – Літтлвуда [1] описує зв’язок між гладкістю граничних значень аналітичної функції на межі круга аналітичності та швидкістю зростання модуля її похідних вищих порядків. Ця теорема стала ефективним знаряддям у розв’язанні багатьох задач теорії функцій і теорії тригонометричних рядів. Але досить часто виникає потреба оцінювати похідні вищих порядків аналітичної функції, використовуючи інформацію лише про модуль неперервності граничних значень її дійсної частини.

У даній роботі ми розглянемо таке питання.

Нехай функція f є аналітичною в крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$, а функція $u := \operatorname{Re} f$ — неперервною в $\overline{\mathbb{D}}$. Відомо, що при даному $n \in \mathbb{Z}_+$ функцію $t \mapsto u(e^{it})$ можна зобразити у вигляді

$$u(e^{it}) = \sum_{j=0}^{n+k-1} a_j t^j + R_{n+k}(t), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

де a_j — дійсні числа, а R_{n+k} — деяка функція, визначена на $[-\pi, \pi]$, що задовольняє певні умови. Якими при цьому будуть швидкості зростання величин $\left|f^{(n+k)}(z)\right|$, $k \in \mathbb{N}$, коли точка z наближається до точки 1 вздовж радіуса $[0, 1]$?

Це питання мотивоване таким твердженням, доведеним у [2].

Нехай виконується (1) *при* $k = 1$ *і при цьому функція* R_{n+k} *задовольняє умову*

$$R_{n+k}(t) = O\Big(|t|^n \lambda\big(|t|\big)\Big), \tag{2}$$

де $\lambda\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *— неперервна зростаюча функція. Якщо* $t = O\big(\lambda(|t|)\big)$, *то існує стала* M, *залежна тільки від* n, *чисел* $\{a_j\}$ *і сталої у співвідношенні* (2), *така, що*

$$\left|f^{(n+1)}(\varrho)\right| \le M \int\limits_{1-\varrho}^{\pi} \frac{\lambda(t)}{t^2} dt, \qquad \frac{1}{2} \le \varrho < 1. \tag{3}$$

Подібні задачі досліджувалися також у [3].

Наша мета полягає в тому, щоб поширити останнє твердження на випадок довільних натуральних k.

Теорема 1. *Нехай* f *— функція, аналітична в крузі* $\mathbb{D}$, *а функція* $u = \operatorname{Re} f$ *є неперервною в* $\overline{\mathbb{D}}$. *Якщо для деякого* $n \in \mathbb{Z}_+$ *і* $k \in \mathbb{N}$ *функцію* $t \mapsto u(e^{it})$ *можна подати у вигляді* (1), *в якому* R_{n+k} *задовольняє умову* (2), *де* $\lambda\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *— неперервна зростаюча функція, для якої*

$|t|^k = O\Big(\lambda\big(|t|\big)\Big)$, *то існує стала* $M > 0$, *яка залежить тільки від* n, *чисел* $\{a_j\}_{j=0}^{n+k-1}$ *і сталої у співвідношенні* (2), *така, що виконується нерівність*

$$\left|f^{(n+k)}(\varrho)\right| \le M \int\limits_{1-\varrho}^{\pi} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}} dt \quad \forall\, \varrho \in [1/2, 1). \tag{4}$$

Доведення теореми 1 спирається на таке твердження, не позбавлене й самостійного інтересу.

Лема 1. *Нехай функція* f *є аналітичною в крузі* $\mathbb{D}$, *а функція* $u = \operatorname{Re} f$ *— неперервною в* $\overline{\mathbb{D}}$ *і* $\theta \in [0, 2\pi]$. *Якщо для деякого* $n \in \mathbb{Z}_+$ *виконується нерівність*

$$\left|u\big(e^{i(t+\theta)}\big) - u\big(e^{i\theta}\big)\right| \le A|t|^n \lambda_\theta\big(|t|\big), \quad |t| \le \pi,$$

де $A = A(\theta) > 0$, $\lambda_\theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *— неперервна зростаюча функція, то для будь-якого* $k \in \mathbb{N}$ *і* $\varrho \in [1/2, 1)$

$$\left|f^{(n+k)}(\varrho e^{i\theta})\right| \le M \int\limits_{1-\varrho}^{\pi} \frac{\lambda_\theta(t)}{t^{k+1}} dt, \tag{5}$$

де $M = M(\theta, n, k, A) > 0$ *— величина, залежна тільки від вказаних параметрів.*

Зауваження. Оцінка (5), взагалі кажучи, є непокращуваною. Наприклад, якщо $n = \theta = 0$, $\lambda(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, і $k = 1$, то за теоремою 1 справджується імплікація

$$\left|u\big(e^{i(t+\theta)}\big) - u(e^{i\theta})\right| \le At^\alpha \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left|f'(\varrho)\right| \le M \int\limits_{1-\varrho}^{\pi} t^{\alpha-2} dt \le C \begin{cases} (1-\varrho)^{\alpha-1}, & 0 < \alpha < 1, \\ -\ln(1-\varrho), & \alpha = 1, \end{cases} \qquad \forall \varrho \in [1/2, 1).$$

Якщо ж $n = \theta = 0$, $\lambda(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, і $k = 2$, то

$$\left|u\big(e^{i(t+\theta)}\big) - u(e^{i\theta})\right| \le At^\alpha \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left|f''(\varrho)\right| \le M \int\limits_{1-\varrho}^{\pi} t^{\alpha-2} dt \le C \begin{cases} (1-\varrho)^{\alpha-1}, & 0 < \alpha < 1, \\ (1-\varrho)^{-1}, & \alpha = 1, \end{cases} \qquad \forall \varrho \in [1/2, 1).$$

Нескладно показати, що для функції

$$f(z) = \operatorname{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$$

виконується співвідношення

$$\frac{\left|u(e^{it}) - u(1)\right|}{|t|} = \frac{1}{|t|} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt - 1}{k^2} \right| =$$

$$= \frac{1}{|t|}\left|\int\limits_0^{|t|}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}dx\right| = \frac{1}{|t|}\int\limits_0^{|t|}\frac{\pi - x}{2}dx = \frac{\pi}{2} - \frac{|t|}{4} < \frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, функція u задовольняє умови теореми 1 при $n = 0$ і $\lambda(t) = t$.

З іншого боку,

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{k} = \frac{1}{z}\ln\frac{1}{1-z}$$

і

$$\left|f''(z)\right| = \frac{1}{z(1-z)} - \frac{1}{z^2}\ln\frac{1}{1-z}.$$

Отже,

$$\ln\frac{1}{1-\varrho} \le \left|f'(\varrho)\right| \le 2\ln\frac{1}{1-\varrho} \quad \forall\, \varrho \in [1/2, 1)$$

і

$$\frac{c}{1-\varrho} \le \left|f''(\varrho)\right| \le \frac{2}{1-\varrho} \quad \forall\, \varrho \in [1/2, 1),$$

де

$$c = \min_{\varrho\in[1/2,1)}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1-\varrho}{\varrho^2}\ln\frac{1}{1-\varrho}\right) = 2 - 2\ln 2.$$

Доведення леми. Не втрачаючи загальності будемо вважати, що $\theta = 0$, а $u(1) = 0$.

За інтегральною формулою Шварца

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{u(e^{it})}{1 - e^{-it}z}dt + i\,\mathrm{Im}\,f(0) \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Отже,

$$\frac{f^{(n+k)}(z)}{(n+k)!} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\Big(u(e^{it}) - u(e^{i0})\Big)e^{-i(n+k)t}}{(1 - e^{-it}z)^{n+k+1}}dt. \tag{6}$$

Використовуючи відомі співвідношення

$$\left|1 - \varrho e^{-it}\right| = \sqrt{1 - 2\varrho\cos t + \varrho^2},$$

$$1 - 2\varrho\cos t + \varrho^2 = (1-\varrho)^2 + 4\varrho\sin^2\frac{t}{2}$$

і

$$\sin\alpha \ge \frac{2}{\pi}\alpha, \qquad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2},$$

з рівності (6) одержуємо

$$\frac{\left|f^{(n+k)}(r)\right|}{(n+k)!} \leq \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{2At^n\lambda_0(t)dt}{(1-2\varrho\cos t+\varrho^2)^{(n+k+1)/2}} \leq$$

$$\leq \frac{2A}{\pi}\left(\int\limits_0^{1-\varrho} \frac{t^n\lambda_0(t)}{(1-\varrho)^{n+k+1}}dt + \int\limits_{1-\varrho}^{\pi} \frac{t^n\lambda_0(t)dt}{\left(\dfrac{4\varrho t^2}{\pi^2}\right)^{(n+k+1)/2}}\right) \leq$$

$$\leq \frac{2A}{\pi}\left(\frac{\lambda_0(1-\varrho)}{(1-\varrho)^{n+k+1}}\int\limits_0^{1-\varrho} t^n dt + \left(\frac{\pi^2}{4\varrho}\right)^{(n+k+1)/2}\int\limits_{1-\varrho}^{\pi}\frac{\lambda_0(t)}{t^{k+1}}dt\right) \leq$$

$$\leq A_1\frac{\lambda_0(1-\varrho)}{(1-\varrho)^k} + B_1\int\limits_{1-\varrho}^{\pi}\frac{\lambda_0(t)}{t^{k+1}}dt, \qquad (7)$$

де

$$A_1 := \frac{2A(n+k)!}{\pi(n+1)}, \qquad B_1 := \left(\frac{\pi^2}{2}\right)^{(n+k+1)/2}$$

— сталі, які не залежать від ϱ.

Порівняємо доданки в нерівності (7), врахувавши, що за умовою $1/2 \leq \varrho < 1$.

Внаслідок монотонності функції λ_0 маємо

$$\int\limits_{1-\varrho}^{\pi}\frac{\lambda_0(t)}{t^{k+1}}dt \geq \lambda_0(1-\varrho)\int\limits_{1-\varrho}^{\pi}\frac{dt}{t^{k+1}} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{(1-\varrho)^k} - \frac{1}{\pi^k}\right)\lambda_0(1-\varrho) \qquad (8)$$

для всіх $\varrho \in [1/2, 1)$.

Легко бачити, що для будь-якого $\varrho \in [1/2, 1)$

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{(1-\varrho)^k} - \frac{1}{\pi^k}\right) > C\frac{1}{(1-\varrho)^k},$$

де

$$C = \min_{\varrho\in[1/2,1)}\frac{1}{k}\left(1 - \frac{(1-\varrho)^k}{\pi^k}\right) = \frac{(2\pi)^k - 1}{k(2\pi)^k}.$$

Таким чином, з (8) випливає оцінка

$$\int\limits_{1-\varrho}^{\pi}\frac{\lambda_0(t)}{t^{k+1}}dt \geq C\frac{\lambda_0(1-\varrho)}{(1-\varrho)^k}.$$

Об'єднавши це співвідношення з (7), одержимо нерівність (5).

Лему доведено.

Нехай

$$\omega(u,\delta) := \sup_{|t|\le\delta} \left\| u(e^{it}\cdot) - u(\cdot) \right\|, \quad \delta > 0,$$

— модуль неперервності функції u в просторі неперервних функцій на колі $\mathbb{T} := \{z\colon |z| = 1\}$, наділеному нормою $\|u\| = \max_{x\in[-\pi,\pi]} \left|u(e^{ix})\right|$.

Наслідок. *Нехай* $\lambda\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *— неперервна зростаюча функція,* $\lambda(0) = 0$, *а* f *— функція, така, як у лемі* 1. *Якщо для деякого* $n \in \mathbb{Z}_+$ *виконується нерівність*

$$\omega(u,\delta) \le A\delta^n \lambda(\delta), \quad 0 < \delta \le \pi,$$

де $A = \mathrm{const} > 0$, *то для будь-якого* $k \in \mathbb{N}$

$$\left| f^{(n+k)}(z) \right| \le M \int\limits_{1-|z|}^{\pi} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}} dt, \quad 1/2 \le |z| < 1, \tag{9}$$

де $M = M(n,k,A) = \mathrm{const}$ *— стала, залежна тільки від вказаних параметрів.*

Доведення теореми **1.** Покладемо

$$p_m(t) := \mathrm{Re}\,\frac{(e^{it}-1)^m}{i^m} = \mathrm{Re}\left(\frac{i^m t^m}{i^m} + \frac{m}{2}\frac{i^{m+1}t^{m+1}}{i^m} + \ldots \right) =$$

$$= \sum_{j=m}^{n+k-1} a_{j,m} t^j + O\left(|t|^{n+k} \right),$$

де $a_{m,m} = 1$, $0 \le m \le n+k-1$.

Розглянемо рівність

$$\sum_{m=0}^{n+k-1} x_m p_m(t) = \sum_{m=0}^{n+k-1} x_m \left(\sum_{j=m}^{n+k-1} a_{j,m} t^j + O\left(|t|^{n+k} \right) \right),$$

де x_m, $m = 0, 1, \ldots, n+k-1$, — дійсні числа, які вибираємо так, щоб виконувалась рівність

$$\sum_{m=0}^{n+k-1} x_m \left(\sum_{j=m}^{n+k-1} a_{j,m} t^j \right) = \sum_{j=0}^{n+k-1} a_j t^j.$$

Отже, числа x_m можуть бути знайдені як розв'язок системи рівнянь (при відомих $a_{j,m}$, a_j):

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+k-1,0} & a_{n+k-1,1} & \ldots & a_{n+k-1,n+k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n+k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{pmatrix}.$$

Покладемо

$$p(z) = \sum_{m=0}^{n+k-1} x_m \frac{(z-1)^m}{i^m}$$

і розглянемо функцію $g = f - p - u(1) + x_0$.

Зрозуміло, що функція g є аналітичною в крузі $\mathbb{D}$, неперервною в $\overline{\mathbb{D}}$ і

$$g^{(n+k)}(z) = f^{(n+k)}(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{D}. \tag{10}$$

Крім того, справджується співвідношення

$$\left|\operatorname{Re} g(e^{it}) - \operatorname{Re} g(1)\right| = \left|u(e^{it}) - \operatorname{Re} p(e^{it})\right| =$$

$$= \left|u(e^{it}) - \sum_{m=0}^{n+k-1} x_m p_m(t)\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=0}^{n+k-1} a_j t^j + O\Big(|t|^n \lambda\big(|t|\big)\Big) - \sum_{j=0}^{n+k-1} a_j t^j - O\left(|t|^{n+k}\right)\right| \leq$$

$$\leq O\Big(|t|^n \lambda\big(|t|\big)\Big) + O\Big(|t|^{n+k}\Big).$$

Якщо тепер врахувати умову $|t|^k = O\big(\lambda(|t|)\big)$, то одержимо оцінку

$$\left|\operatorname{Re} g(e^{it}) - \operatorname{Re} g(1)\right| \leq O\Big(|t|^n \lambda\big(|t|\big)\Big). \tag{11}$$

Отже, функція g задовольняє умови леми 1 при $\theta = 0$, згідно з якою на підставі (10) справджується (4).

Як видно з наведеного доведення, стала $M > 0$ в (4) залежить від n, послідовності (a_j) і сталої в залишковому члені $O\Big(|t|^n \lambda\big(|t|\big)\Big)$.

Теорему доведено.

2. У цьому пункті ми розглянемо умови існування граничних радіальних значень функції f, яка є аналітичною в одиничному крузі $\mathbb{D}$, а її похідні вищих порядків задовольняють умову типу (9), в якій λ є функцією типу модуля неперервності.

Теорема 2. *Нехай f — функція, аналітична в крузі $\mathbb{D}$. Якщо для даного $n \in \mathbb{N}$ виконується умова*

$$\left|f^{(n)}\big(\varrho e^{i\theta}\big)\right| \leq M \int\limits_{1-\varrho}^{\pi} \frac{\lambda(t)}{t^{n+1}} dt, \quad M = \text{const} > 0, \tag{12}$$

для всіх $\theta \in [-\pi, \pi]$ і всіх $\varrho \in [0, 1)$, де λ — функція типу модуля неперервності, яка задовольняє умову Діні

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\lambda(t)}{t} dt < \infty,$$

то існує скінченна границя

$$\lim_{\varrho \to 1-} f(\varrho e^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) \quad \forall \theta \in [-\pi, \pi]. \tag{13}$$

Доведення. В лемі 3 роботи [2] доведено, що аналітична в $\mathbb{D}$ функція f, яка задовольняє умову

$$\left|f'(z)\right| \leq M \int\limits_{1-r}^{\pi} \frac{\lambda(t)}{t^2} dt, \quad |z| = r < 1, \tag{14}$$

є неперервною в замкненому крузі $\overline{\mathbb{D}}$ та існує границя (13).

Покажемо, що з умови (12) при довільному $n \in \mathbb{N}$ випливає умова (14). Цим самим ми покажемо, що за наших умов співвідношення (13) випливає з результату Ф. Леслі [2].

Справді, оскільки для довільного $n \in N$ справджується рівність

$$f^{(n-1)}(z) = \int\limits_0^z f^{(n)}(w)dw + f^{(n-1)}(0), \quad |z| < 1,$$

то, покладаючи $w = \rho e^{i\theta}$ і розглядаючи інтегрування по відрізку, що з'єднує точки 0 та z, одержуємо співвідношення

$$\left|f^{(n-1)}\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \int\limits_0^r \left|f^{(n)}(\rho e^{i\theta})\right| d\rho + \left|f^{(n-1)}(0)\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^r M \int\limits_{1-\rho}^{\pi} \frac{\lambda(t)}{t^{n+1}} dt d\rho + \left|f^{(n-1)}(0)\right| \leq$$

$$\leq M \int\limits_{1-r}^{1} \frac{\lambda(t)}{t^{n+1}} \int\limits_{1-t}^{r} d\rho dt + M\lambda(\pi)(\pi - 1) + \left|f^{(n-1)}(0)\right| \leq$$

$$\leq M \int\limits_{1-r}^{1} \frac{\lambda(t)}{t^n} dt + A,$$

де $A = \mathrm{const} > 0$. Понижуючи далі порядок диференціювання, отримуємо при r, близьких до 1, оцінку (14).

Теорему доведено.

1. *Hardy G., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals. II // Math. Z. – 1931. – **34**. – S. 403 – 439.
2. *Lesley F. D.* Differentiability of minimal surfaces at the boundary // Pacif. J. Math. – 1971. – **37**, № 1. – P. 123 – 139.
3. *Warschawski S.* Boundary derivatives of minimal surfaces // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1970. – **38**. – P. 241 – 256.

Одержано 14.02.13